1. 复数：运算与几何

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2 \qquad \bar{z} = x - iy$

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$|z|^2 \overset{def}{=} x^2 + y^2 \overset{pf}{=} z\bar{z}$

三角不等式 $|z| + |w| \geq |z+w| \geq \big||z| - |w|\big|$

实部 $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ 虚部 $\mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2}$

极坐标 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\mathrm{Arg}\, z := \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 多值

$\arg z$ 单值. 取在 $(-\pi, \pi)$ 或 $(0, 2\pi)$

若记集合计算 $\begin{cases} A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\} \\ A-B := \{a-b : a \in A, b \in B\} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$$
$$\mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$$

(与 log 比较)

因为可以直接验证 $\begin{cases} z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \\ z_1/z_2 = r_1/r_2\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right) \end{cases}$

但是注意、 $\operatorname{Arg} 1 + \operatorname{Arg} 1 \neq 2\operatorname{Arg} 1$

故 $\operatorname{Arg} a^2 = \operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{不一定成立}}}{=} 2\operatorname{Arg} a$

（定义 $2A = \{2a : a \in A\}$）

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ （定义？还是合理化级数论后的证明）

继承 e^x 的运算模式

命题. $A, C \in \mathbb{R}$. $B \in \mathbb{C}$. $|B|^2 - AC > 0$ 则

$$(*) \quad A|z|^2 + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$$

表示 $\begin{cases} \text{直线} & A = 0 \\ \text{圆} & A \neq 0 \end{cases}$

Pf: $A = 0$ ✓

$A \neq 0$、 $\left|z + \frac{B}{A}\right|^2 = |z|^2 + \frac{|B|^2}{A^2} + \frac{\bar{B}z + B\bar{z}}{A}$

$$\Rightarrow 0 = A\left|z + \frac{B}{A}\right|^2 + C - \frac{|B|^2}{A}$$

$$\Longleftarrow \quad \left|z + \frac{B}{A}\right|^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A} > 0 \qquad \square$$

由球极投影，将北极与 ∞ 对应，得到

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ （将 $\mathbb{C}$ 单点紧化为 $\bar{\mathbb{C}}$）

$B(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

$\mathbb{C}$ 作为度量空间，其拓扑和 $\mathbb{R}^2$ 是一样的，有自然的收敛性

基于拓扑结构的全部结论都可从 $\mathbb{R}^2$ 继承.

2. 全纯函数 holomorphic function

连续 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续. 若

$\forall \varepsilon>0$、$\exists \delta>0$. 当 $|z-z_0|<\delta$. 有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

↓

可导 若极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在, 则称 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可导

记为 $f'(z_0)$

↓

可微 若 $f(z)$ 在 z 处 "改变量" 满足

$$\Delta f = A(z_0)\,\Delta z + \rho(\Delta z) \quad , \quad \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$$

则称 f 在 $z=z_0$ 处可微. 其中 $\Delta f = f(z)-f(z_0)$ $\Delta z = z-z_0$.

引理. 可导 = 可微

因为 $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim \frac{A(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)}{\Delta z} = A(z)+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}$$

定义. 1. $f(z)$ 在区域 D 中全纯, 若 f 在 D 中每点可导

2. $f(z)$ 在 $z=z_0$ 中全纯, 若 f 在 z_0 的某个邻域中每点可导

例子 1. $f(z)=\bar{z}$ 不全纯

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} 1 & h\in\mathbb{R} \\ -1 & h\in i\mathbb{R} \\ * & \text{otherwise}\end{cases}$$

2. $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$ 在 $z=0$ 处

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{x^2}{x+iy}} \qquad \left|\frac{x^2}{x+iy}\right| \le \sqrt{x^2+y^2} = |z| \to 0$$

但若 $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2x_0$$

$\times$ 故 $f(z)$ 在 z_0 处不可导.

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0} \frac{0}{\cdots} = 0$$

实可微 若 $f = u + iv$. u, v 作为二元函数在 (x_0, y_0) 处可微

那么 f 在 z_0 处实可微

引理 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

那么 f 在 z_0 处实可微 $\Leftrightarrow f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta \bar{z} + o(|\Delta z|)$

Pf: 展开计算

$u(x+\Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$ 另边是实虚部对应

$v\cdots$

$\Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}$ $\Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}$

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \Big(u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)\Big) + i\Big(v\cdots\Big)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o$$

从记号上看比较合理.(这样说没有道理).

另一方面. 由 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$ 视 $z, \bar{z}$ 无关, 求导

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

比较知 复可微 $\Delta f \approx A(z_0)\,\Delta z$

实可微 $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta \bar{z}}$ 这一项

引理. $f(z)$ 在 z_0 处可导

$\overset{1}{\Longleftrightarrow}$ f 在 z_0 处实可微 + $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$

$\overset{2}{\Longleftrightarrow}$ f 在 z_0 处实可微 + $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$ C-R方程

Pf: 只证 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \Longleftrightarrow$ C-R方程.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \square$$

归结为 定理: f 在区域D上全纯 $\Longleftrightarrow$ f 实可微 + $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$

例. $f(z)=z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$$\frac{\partial}{\partial x}z^n=\frac{\partial}{\partial x}(x+iy)^n=n(x+iy)^{n-1}=nz^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z^n=inz^{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y}=nz^{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$$

实可微: $\left|\dfrac{(z_0+\Delta z)^n-z_0^n-nz_0^{n-1}\Delta z}{\Delta z}\right|=o(1)$ (二项展开)

例. $f=(\mathrm{Re}\,z)^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上不全纯

$$f=\frac{1}{4}(z+\bar z)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}(z+\bar z)=\mathrm{Re}\,z.$$

$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ 的定义表明可以视 z, $\bar z$ 独立.

命题 $u\in C^2(\Omega)$. $\Delta u=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar z}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\frac{1}{4}\Delta u$$

命题 $f=u+iv$ 在 Ω 上全纯, 则 u, v 是 Ω 上的调和函数

Pf: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=0\Rightarrow\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}=0$ $\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{2}i\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \overline{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}\right)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \bar f}{\partial x}-\dfrac{1}{2}i\dfrac{\partial \bar f}{\partial y}=\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}\end{array}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\bar z}=\frac{\partial \bar f}{\partial z\partial \bar z}=0$$

$$\Rightarrow\Delta u=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}=2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}(f+\bar f)=0\quad.\ \Delta v=0$$

定义(共轭调和函数)　u.v 在区域Ω上 为调和函数. 且 u.v 满足 C-R方程 i.e. $\left(\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\right)$, 则称 u.v 为共轭调和函数

已知 全纯函数的两部为共轭调和函数. 那么 已知一对共轭调和函数

定理. Ω单连通, u在Ω上调和, 则存在u的共轭调和函数 v, 使 u+iv 为Ω上全纯函数

Pf: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　令 $P=-\frac{\partial u}{\partial y}$　$Q=\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow Pdx+Qdy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

要做 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

由 Green公式 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ 与路径无关

令 $v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$

求导为 $\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\end{cases}$　□

导数运算: f, g 在区域Ω上全纯. ⇒ f±g, fg 在区域Ω上全纯.

有 $(f\pm g)'=f\pm g$　　若 $\overset{\varphi=}{g}(f(z))$ 有定义 ⇒ $\varphi(z)=g'(f(z))f'(z)$.

$(fg)'=f'g+fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$　$(g\neq 0)$

NOTE、若 g 为一般函数 $g(\omega, \bar{\omega})$ 则不一定全纯，但具体如求导 later.

导数的几何意义　　光滑曲线 γ 经过 z_0.　$z=\gamma(t)$　$a \le t \le b$.

$\omega = f(z)$ 把 γ 映成 σ

$\omega = \sigma(t) = f(\gamma(t))$

$$\sigma' = f'\big|_{\gamma} \cdot \gamma'$$

$$\operatorname{Arg} \sigma' = \operatorname{Arg} f'|_{\gamma} + \operatorname{Arg} \gamma'$$
$$= \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} \gamma'$$

考虑其余过 z_0 的光滑曲线 $\tilde{\gamma}$，可以注意到

$$\operatorname{Arg} \sigma' - \operatorname{Arg} \tilde{\sigma}' = \operatorname{Arg} \gamma' - \operatorname{Arg} \tilde{\gamma}'$$

i.e.　f 在 z_0 处保角（当然 $f'(z_0) \ne 0$）.

总结为

定理. 全纯函数在其导数 $\ne 0$ 的点处是保角的.

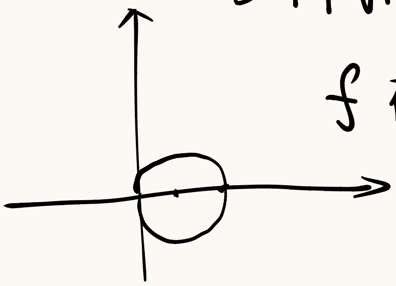
注意. 若 $f'(z)=0$. 则一定不保角，这个结果要用到展开. later.

当然. $f'(z)=0$ 存在不保角的例子是容易的. e.g. $f(z)=z^2$

导数的模　$|f'(z_0)| = \left| \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$

↳ 伸缩率.

例



f 在 $B(0,1) \cup \{1\}$ 上全纯. $f(B(0,1)) \subseteq B(0,1)$

$f(1)=1 \Rightarrow$ "$f'(1) \geq 0$"

Pf. $f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + o(|z-1|)$

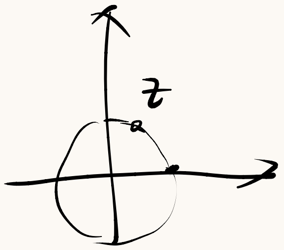
$\quad = 1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|)$

$\Rightarrow \left| 1 + f'(1)(z-1) + o(|z-1|) \right| < 1 \quad \forall z.\ |z|<1$

$\Rightarrow \left(1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)\right)\left(1+\overline{f'(1)}(\bar{z}-1)+o(|z-1|)\right) < 1$

$\Rightarrow 1 + \mathrm{Re}\left(f'(1)(z-1)\right) + o(|z-1|) < 1$

$z-1 = re^{i\theta}$ $\qquad \Rightarrow \mathrm{Re}\, f'(1)(z-1) + o(|z-1|) < 0$



$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \mathrm{Re}\left(f'(1)e^{i\theta}\right) + o(1) < 0$

$\xRightarrow{r\to 0} \mathrm{Re}\left(f'(1)e^{i\theta}\right) \leq 0$

令 $f'(1) = |f'(1)|e^{i\arg f'(1)}$, if $f'(1) \neq 0$.

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, e^{i(\theta + \arg f'(1))} \leq 0$

$\Rightarrow$ since $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \arg f'(1) = 0$.

$\Rightarrow f'(1) = |f'(1)| \geq 0$ $\qquad \square$

初等全纯函数

设 $z = x+iy$. 定义 $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

那么 1. $\forall z \in \mathbb{C}.\ e^z \neq 0$

2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \forall z_1, z_2$

since $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\left[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\right]$

$= e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right)$

$= e^{z_1+z_2}$

3. e^z 以 $2\pi i$ 为周期.

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = \cdots = e^{x+iy} = e^z.$$

4. e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全纯

$$e^z = u+iv \qquad \begin{cases} u = e^x\cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

$$u_x = e^x\cos y = v_y \qquad u_y = -e^x\sin y = -v_x$$

$\Rightarrow e^z$ 复可微 $(e^z)' = e^z$

5. (1) 若 $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 f 为单叶函数.

(2) 若 f 在区域 Ω 中是单叶函数 则称 Ω 是 f 的单叶域

那么 e^z 的单叶域 D 只要满足:

$\forall z_1, z_2 \in D$. $z_1 - z_2 \neq 2k\pi i$ $(k \neq 0)$.

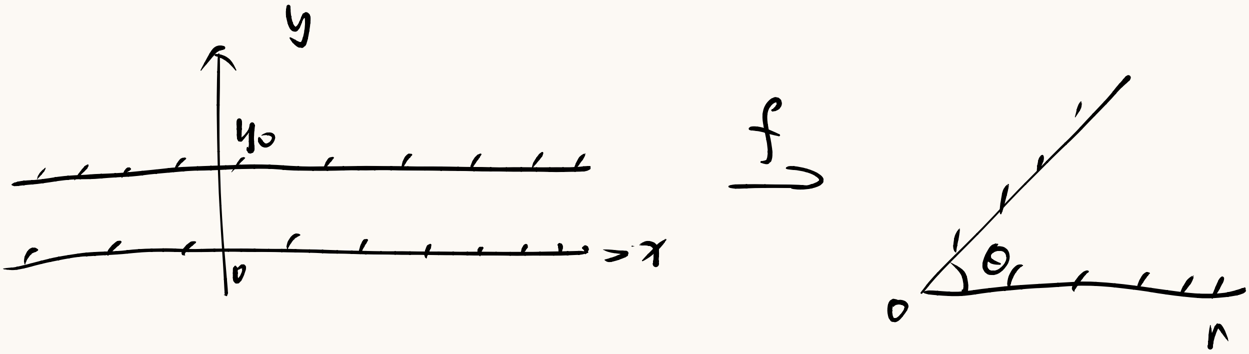
e^z 作为映射. 设 $z = x+iy$

$$f(z) = re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r = e^x \\ \theta = y \end{cases}$$

$$(x,y) \longrightarrow (r,\theta) \longrightarrow (e^x, y)$$

$D = \{(x,y): 0<y<y_0\}$ $y_0 \in (0, 2\pi)$.

f 把 D 映成 $\{(r,\theta): \theta \in (0,y_0)\}$



对数函数. 若 $e^{w(z)}=z$，则称 $w(z)$ 为 z 的对数. 记 $\operatorname{Log} z=w(z)$

令 $z=re^{i\theta}$ $\Rightarrow e^{w(z)}=re^{i\theta}$

设 $w(z)=u(z)+iv(z)$ $\Rightarrow \begin{cases} e^{u(z)}=r \\ e^{iv(z)}=e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(z)=\operatorname{Log} r \\ v(z)=\theta+2k\pi \end{cases}$

$$\operatorname{Log} z=\{\log r+i(\theta+2k\pi)\}=\log r+i\operatorname{Arg} z.$$

「这里用 Log 表示 $\mathbb{C}$ 上的函数 log 表示熟悉的 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$(\operatorname{Log} z)_k=\log|z|+i(\arg z+2k\pi) \quad k \text{ fixs.}$$

$\arg z\in[0,2\pi)$ 」

Denote $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

那么 $(\operatorname{Log} z)_k$ 不是 $\mathbb{C}^*$ 上的连续函数.

Pf: $(\operatorname{Log} z)_k=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)$

$(\operatorname{Log} 1)_k=i\cdot 2k\pi$

令 $z(s)=e^{is}$ $s\in[0,2\pi)$.

$(\operatorname{Log} e^{is})_k=i(s+2k\pi)$ $\quad \lim\limits_{s\to 2\pi}(\operatorname{Log} e^{is})_k=i(2\pi+2k\pi)\neq(\operatorname{Log} 1)_k$

$\square$

Q: 怎么找区域 D，使得 $(\operatorname{Log} z)_k$ 为连续函数?

对多值函数，如下定义

(1) 设 $F(z)$ 多值，定义于 Ω，初值为 $f(z_0)$，当 z_0 沿曲线 C 连续运动至 z_1

$f(z_0)$ "连续"运动至唯一确定 $f(z_1)$，则称 $F(z)$ 在 C 上的改变量

$\Delta_C F(z) = f(z_1) - f(z_0)$ 　且 $\Delta_C (F_1 \pm F_2) = \Delta_C F_1 \pm \Delta_C F_2$

(2) 若 $\Delta_C F(z)$ 的值仅依赖于 z_0, z_1，不依赖于 C 的选取，则称 $F(z)$ 在 Ω 内有单值分支，该分支在任何点 z 的值为 $f(z) = f(z_0) + \Delta_C F(z)$ 　$C: z_0 \to z$

这个定义是否不太准确，参考对数螺旋，到底在处理哪个区域...

判断 $F(z)$ 在 Ω 上是否有单值分支 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ Ω 中闭曲线，$\Delta_C F(z) = 0$

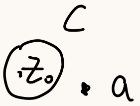
此时称 Ω 是 $F(z)$ 的一个单值域

Ω 通常不唯一，以及我们一般想找最大的 i.e. $\nexists\, \Omega' \supseteq \Omega$ s.t. F 在 Ω' 上有单值分支.

定义（寻常点）设 $z_0 \in \Omega$，若存在 z_0 的一个邻域，使多值函数 $F(z)$ 在此邻域中有单值分支，则该点称为寻常点

定义（支点）设多值函数 $F(z)$ 在 $z_0 \in \Omega$ 点某充分小的去心邻域中有定义且其点为寻常点，又以 z_0 为中心的任意小的去心邻域中都存在围绕 z_0 的简单闭曲线使得 $\Delta_C F(z) \neq 0$，则称 z_0 为 $F(z)$ 的支点

例、$\mathrm{Arg}(z-a)$ 的支点 on $\mathbb{C}$



支点：Branch point

① $\forall z_0 \in \mathbb{C}$，$z_0 \neq a$ 　　a 在 C 外 　$\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 0$.

② $z_0 = a$. 　C 包含 a. 　$\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 2\pi$

③ $z_0 = \infty$ 　$B_r(\infty, R) = \{z : |z| > R\}$

取 $C = \{z : |z| = R+1\} \subseteq B(\infty, R)$

$\Delta_C (z-a) \neq 0$

□

到底如何理解？覆叠？

① 下面的例子说明闭曲线包含支点，F的改变量可以为 0

例. $F(z)=\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$ $a\neq b$

$\Delta F_c=0$ 而 a, b 都为 $\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$ 的支点

复版本的链式法则

$h=g\circ f$. $g=g(w,\bar{w})$. $f=f(z,\bar{z})$ (因为 $g\circ f(z,\bar{z})=g(f(z,\bar{z}),\bar{f}(z,\bar{z}))$)

$dh=\partial_z h\,dz+\partial_{\bar{z}}h\,d\bar{z}$

$\partial_z h=(\partial_w g)\circ f\cdot\partial_z f+(\partial_{\bar{w}}g)\circ f\cdot\partial_z\bar{f}$ 应该没有记号混乱..

$\partial_{\bar{z}}h=(\partial_w g)\circ f\cdot\partial_{\bar{z}}f+(\partial_{\bar{w}}g)\circ f\cdot\partial_{\bar{z}}\bar{f}$

② 支点的定义中不能要求以 z_0 为中心的任意小去心邻域中围绕 z_0 的所有简单闭曲线都有 $\Delta_c F\neq 0$.

例. $f(z)=\sqrt{z}\sin\frac{1}{z}$. $z=0,\infty$ 为支点. 但在 $z=0$ 的小邻域. 以 $z=\frac{1}{n\pi}$ 为起/终点且绕 $z=0$ 的简单闭曲线都有 $\Delta_c F=0$

③ 在支点的定义中，要规定 z_0 的充分小去心邻域中都是寻常点"

例. $F(z)=\sqrt{\sin\frac{1}{z}}$. $z=\frac{1}{n\pi}$ $n\in\mathbb{Z}$ 都是支点. 但 $z=0$ 不是支点.

Rmk: 上面的例子目前还无法验证.

例. 求 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的所有支点和一个单值域

$$\Delta_C \mathrm{Log}(z-a) = \Delta_C\left(\log|z-a| + i\arg(z-a)\right)$$

$$= \Delta_C \log|z-a| + i\Delta_C \arg(z-a) = i\Delta_C \arg(z-a)$$

$$= \begin{cases} 0, & a在C外 \\ \pm 2\pi i, & a在C内 \end{cases}$$

⇒ $\mathrm{Log}(z-a)$ 的支点为 a, ∞. 而易验证其余点不是支点

D为单值域 ⟺ $\forall C \subseteq D$, $\Delta_C \mathrm{Log}(z-a) = 0$ ⟺ D中不包含绕 a 转动的简单闭曲线

那么 D的例子就有 $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.

注. 单值域不是不包含支点的区域, 而是"不包含 $\Delta_C \neq 0$ 的简单闭曲线"的区域

现在可以解释之前一个例子.

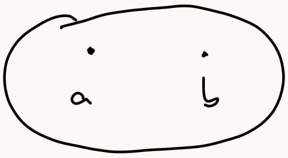
例. $\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$ 的支点和单值域.

$$\Delta_C\left(\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}\right) = \Delta_C\left(\mathrm{Log}(z-a) - \mathrm{Log}\, z-b\right)$$

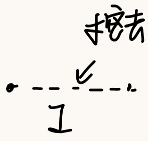
$$= i\left(\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) - \Delta_C \mathrm{Arg}(z-b)\right)$$

同时包含 a、b两点时 $\boxed{=0}$

∞ 不是支点



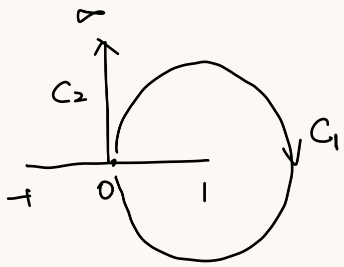
那么



$\mathbb{C}\setminus I$ 是单值域

例. $F(z)=\mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1}$ $D=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, 记 $f(z)$ 为 $F(z)$ 在D上的单值分支. 已知 $f(0_上)=\pi i$

求 $f(0_下)$, $f(\infty)$



$$f(0_下) = f(0_上) + \Delta_{C_1}\mathrm{Log}\frac{z-1}{z+1}$$

$$= f(0_上) + \Delta_{C_1}\mathrm{Log}\, z-1$$

$$= \pi i - 2\pi i = -\pi i$$

$$f(\infty) = f(0_+) + \Delta_{c_2} F = \pi i + i\Delta_{c_2}\left(\operatorname{Log}(z-1) - \operatorname{Log}(z+1)\right)$$
$$= \pi i + i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

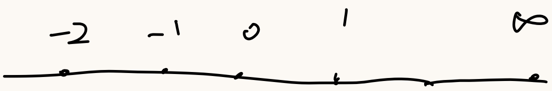
例：$F(z) = \operatorname{Log}\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)} = 2\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} z+1 - 3\operatorname{Log}(z-1) - \operatorname{Log}(z+2)$

支点为 $0, -1, 1, -2$. ，而 ∞、可以直接看出是支点. $\left(2+1-3-1=-2\neq 0\right.$ $\Rightarrow A\ominus \rightsquigarrow -2\pi i\left.\right)$

但是如何找出单值域

仅圈 $-2, -1$，$A_c = 0$

$\Rightarrow D = \mathbb{C} \setminus \left([-2,-1] \cup [0,\infty)\right)$ 是单值域



仅圈 $-1, 0, 1$，$D = \mathbb{C} \setminus \left((-\infty, -2] \cup [-1, 1]\right) \ldots$

好像是能看出一些几何的东西.

例. $R(z) = \prod_{i=1}^{m} (z-a_i)^{n_i}$ $n_i \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{Log} R(z)$ 的支点

$$A_c F = \sum_{\Lambda} n_i A_c \operatorname{Log}(z-a_i) = 2\pi i \sum_{\Lambda} n_i \qquad \Lambda = \{i : a_i 在 c 内部\}.$$

$A_c F = 0 \Leftrightarrow \sum_{\Lambda} n_i = 0$

∞ 不是支点 $\Leftrightarrow$ 充分大的 c. $A_c F = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} n_i = 0$.

幂函数. $w = z^{\alpha}$

①若 $\alpha \in \mathbb{N}$ $(z^n)' = n z^{n-1}$，z^{α} 为 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数

②若 $\alpha = \frac{1}{n}$. $n \in \mathbb{N}$.

$\operatorname{Log} w = \frac{1}{n} \operatorname{Log} z \Leftrightarrow e^{\operatorname{Log} w} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\operatorname{Arg} z)}$

$= |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}(\arg z + 2k\pi)}$

$k = 0, \cdots n-1 \Rightarrow w$ 有 n 个分支.

③若 $\alpha \in \mathbb{C}$. 令 $\alpha = a + bi$

$w = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{(a+bi)(\log|z| + i\operatorname{Arg} z)} = e^{a\log|z| - b\operatorname{Arg} z} \cdot e^{i(b\log|z| + a\operatorname{Arg} z)}$

若 $b=0$ $a=n$ 单值.

$b=0$ $a=\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ 有 q 个分支.

$b=0$ $a \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow$ 无穷多值.

$b\neq 0$. $|w| = e^{a\log|z| - b(\arg z + 2k\pi)}$

$\Rightarrow$ 无穷多值.

例. 若 $F(z)=\left(Re(z)\right)^{\frac{1}{n}}$ $Re(z)$ 为有理函数. 求其单值域

$$\Delta_c F = \Delta_c\left(|R(z)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z)}\right)$$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\left(\operatorname{Arg}R(z_0)+\Delta_c\operatorname{Arg}R(z)\right)} - |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z_0)}$$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg}R(z_0)}\left(e^{\frac{i}{n}\Delta_c\operatorname{Arg}R(z)}-1\right)$$

$$\Delta_c F=0 \iff e^{\frac{i}{n}\Delta_c\operatorname{Arg}R(z)}-1=0$$

$$\iff \Delta_c\operatorname{Arg}R(z)=2nk\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

设 $R(z)=\prod_{i=1}^{m}(z-a_i)^{n_i}$

$$\Delta_c\operatorname{Arg}R(z)=\sum_{i=1}^{m} n_i\operatorname{Arg}(z-a_i)$$

$$=\sum_{i\in\Lambda} n_i\cdot 2\pi = 2\pi\cdot nk.$$ $\Lambda=\{i: a_i$ 在 C 内部$\}$.

$$\Delta_c\operatorname{Arg}R(z)=0 \iff \sum_{i\in\Lambda} n_i = n\cdot k$$

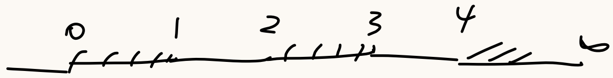
∞ 不是支点 $\iff \sum_{i=1}^{m} n_i = n\cdot k.$

代入一些数值.

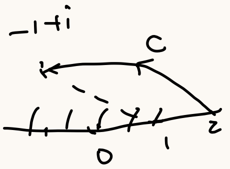
1、 $F(z)=\sqrt{z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$

支点	0	1	2	3	4
指数	1	1	1	1	1

单值域 如 1.



2. $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$ 若单值域 $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$ 取点 $z=2$ 取正值的分支. 在 $z=-1+i$ 的取值.



$$f(z)=|z-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\operatorname{Arg}(z-1)}$$

由 $f(2)$ 取正值. $\Rightarrow e^{\frac{i}{3}\operatorname{Arg}1}>0$

$$\operatorname{Arg}1=6k\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$f(z_0)=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i}{3}\operatorname{Arg}(z-1)}\Big|_{z=z_0}$$

$$=|z_0-1|^{\frac{1}{3}}e^{\Delta_c\frac{i}{3}\operatorname{Arg}(z-1)}$$

$$=5^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i}{3}(\pi-\arctan\frac{1}{2})}$$

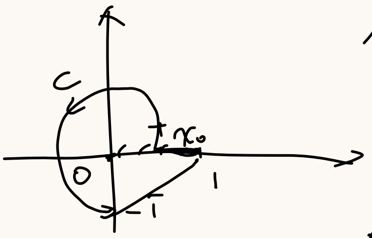
例. $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot\frac{1}{z+1}$. 确定在 $[0,1]$ 上方取正值的单值全纯分支 $f_0(z)$，并计算 $f_0(-i)$

NOTE： $\frac{1}{z+1}$ ← 单值.

奇点 0, -1.

$$f(z)=e^{\operatorname{Log}\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}\cdot e^{\frac{3}{2}\operatorname{Log}(1-z)+\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$$

∞ 不是支点. $\Rightarrow D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 是单值域



令 $\varphi(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$ $\quad\varphi(z)=|\varphi(z)|e^{i\operatorname{Arg}\varphi(z)}$

$$\operatorname{Arg}\varphi(z)\Big|_{z=-i}=\operatorname{Arg}\varphi(z)\Big|_{z=x_0}+\Delta_c\operatorname{Arg}\varphi(z)$$

$$\begin{aligned}\Delta_c\operatorname{Arg}\varphi(z)&=\frac{1}{2}\left(\Delta_c\operatorname{Arg}(1-z)^3-\Delta_c\operatorname{Arg}z\right)\\&=\frac{1}{2}\left(3\Delta_c\operatorname{Arg}(z-1)-\Delta_c\operatorname{Arg}z\right)\\&=\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\pi\right)\\&=-\frac{3}{8}\pi\end{aligned}$$

而取 $\operatorname{Arg}\varphi(z)\Big|_{z=x_0}=0 \Rightarrow \varphi(z)\Big|_{z=x_0}>0.$

$\varphi(-i)=|\varphi(-i)|e^{-\frac{3}{8}\pi}$ . . . 不管表达式咋算的也是神人了

三角函数

$$\begin{cases}e^{iy}=\cos y+i\sin y\\e^{-iy}=\cos y-i\sin y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\\\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\end{cases}$$

定义 $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{iz})$ $\quad\forall z\in\mathbb{C}$

$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{iz})$

性质：① 以 2π 为周期

② $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ $\qquad$ NOTE. 在 $\mathbb{R}$ 上成立的恒等式一般也成立.

③ $|\sin z|$, $|\cos z|$ 无界

Pf of ③ 令 $z=iy$ 即可 $\square$

反三角函数 $w = \text{Arcsin}\, z$ 为 $z = \sin w$ 定义的反三角函数

$$z = \frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)$$

$$\Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2+4}}{2}$$

$$= iz + \sqrt{1-z^2}$$

$$w = \frac{1}{i}\text{Log}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$ 多值函数

支点为 $\pm 1, \infty$

类似 $\text{Arccos}\, z = \frac{1}{i}\text{Log}\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right)$ $\pm 1, \infty$ 支点

$\text{Argtan}\, z = \frac{1}{2i}\text{Log}\frac{i-z}{i+z}$ $\pm i$ 支点

分式线性变换

$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\Delta = ad - bc \neq 0$ 若 $\Delta = 0$, 则 $f(z) \equiv$ const or non-sense.

特殊情况 ① 平移 $w = z + a$ $a \in \mathbb{C}$

② 旋转 $w = e^{i\theta} \cdot z$ $\theta \in \mathbb{R}$

③ 伸缩 $w = rz$ $r > 0$

④ 反演 $w = \frac{1}{z}$

定理. 任一分式线性变换为上述四种变换的复合.

pf: ① $c = 0$ $\Delta = ad \neq 0 \Rightarrow a, d \neq 0.$

$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b'$ $a' = r_0 e^{i\theta_0}$

$$z \xrightarrow{z_1 = e^{i\theta_0}\cdot z} z_1 \xrightarrow{z_2 = r_0 z_1} z_2 \xrightarrow{w = z_2 + b'} w$$

② $c \neq 0$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd}$$

$$z \xrightarrow{z_1 = c^2z+cd} z_1 \xrightarrow{z_2 = \frac{1}{z_1}} z_2 \xrightarrow{z_3 = (bc-ad)\cdot z_2} z_3 \xrightarrow{w = \frac{a}{c} + z_3} w = \frac{az+b}{cz+d}$$ □

引理. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ 是 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的双射

pf: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 令 $f^{-1}: w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$ 即可

$$\Rightarrow \frac{a\frac{dw-b}{-cw+a}+b}{c\frac{dw-b}{-cw+a}+d} = w \quad \cdots \qquad \square$$

引理 若分式线性变换有3个不动点，则必为恒等映射.

Pf: 展开表达式 □

定理. $\mathbb{C}$ 上互异的 (z_1, z_2, z_3) 和 (w_1, w_2, w_3) 则 $\exists!$ 分式线性变换 使 $f(z_i)=w_i$

Pf: 唯一性. $f_1, f_2 \Rightarrow f_2^{-1}\circ f_1$ 有三个不动点

存在性 $g : (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (1, 0, \infty)$

$$g(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \Big/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

$h = (w_1, w_2, w_3) \longmapsto (1, 0, \infty)$

$f := h^{-1}\circ g$ □

定义 (交比) $$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} \Big/ \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

上面定理中的映射效果 $\Leftrightarrow (z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$

引理. 分式线性变换保交比

Pf: (不嗯算) $w_i = f(z_i)$ $i=2,3,4$.

映射 $g: z_i \mapsto w_i$ $i=2,3,4$ 由 $(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_1, z_2, z_3)$ 确定.

由 f 定义 $\Rightarrow f = g \Rightarrow (f(z_i)) = (z_i)$ □

几何性质

引理. $\mathbb{C}$ 上的圆和直线 可写为 $Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$ $|B|^2 - AC > 0$

统称为圆周.

性质. 分式线性变换保圆周.

只要验证 $w=\frac{1}{z}$ 和 $w=az+b$ $(a\neq 0)$ 验算判别式即可.

$Cw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + A = 0$ $A|w|^2 + \overline{(B a - \bar{A} b)}w + (Ba - \bar{A}b)\bar{w} + \cdots = 0$

定理. 四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆 $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$

Pf: 令 $f(z)=(z, z_1, z_2, z_3)$ 则 $f(z_1)=1$, $f(z_2)=0$、$f(z_3)=\infty$.

引理. 过 $1, 0, \infty$ 的圆周为实轴.

$$A z\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0 \qquad \begin{cases} z=0 \Rightarrow C=0 \\ z=1 \Rightarrow A+2\operatorname{Re}B=0 \\ z=\infty \Rightarrow A+Bw+\bar{B}\bar{w}=0 \text{ 过 } w=0 \\ \qquad A=0 \\ \Rightarrow \operatorname{Re}B=0 \end{cases}$$

$$ib\bar{z}-ibz=0 \Leftarrow$$

$$\Rightarrow ib(\bar{z}-z)=0$$

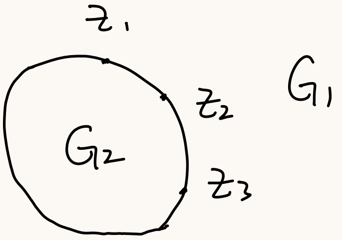
$$\Rightarrow \operatorname{Im} z=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}.$$

由引理. 四点共圆 $\Rightarrow f$ 将圆映为 $\mathbb{R}$ 四点 $\Rightarrow \operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$

设 $t=(z_1, z_2, z_3, z_4)\in\mathbb{R}$ $\quad f^{-1}: \mathbb{R}\to z_2, z_3, z_4$ 确定的圆周

$z_1=f^{-1}(t)$, $t\in\mathbb{R}$. 由于圆周·· □

如何确定点的位置 (左/右).

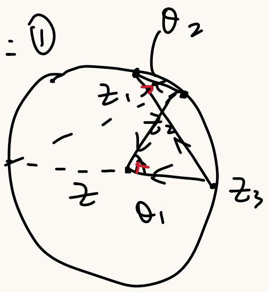


$z_1\to z_2\to z_3$ $\quad G_1$ 左, G_2 右

$z_3\to z_2\to z_1$ $\quad G_2$ 左, G_1 右

定理. z_1, z_2, z_3 为 $\mathbb{C}$ 上圆周 γ 的有序三点. 则对 $z_1\to z_2\to z_3$ 右边的点有 $\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3)>0$. 左边 --- <0.

Pf: ①



$$(z, z_1, z_2, z_3)=\frac{z-z_2}{z-z_3}\Big/\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

$$\operatorname{Arg}(z, z_1, z_2, z_3)=\theta_1-\theta_2\in(0,\pi)$$

$$\operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3)>0.$$

② 圆右边 $\quad$ ③ 直线左右 $\quad$ 类似讨论 $\quad$ □

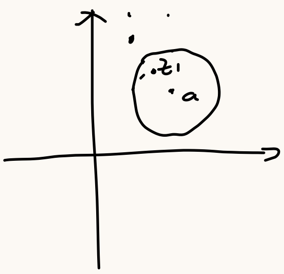
由分式线性变换

推论 $f: z_i\mapsto w_i$ $\quad i=1,2,3.$ 则 f 将走向 $z_1\to z_2\to z_3$ 的左/右侧映为

$w_1\to w_2\to w_3$ 的左右侧.

分式线性变换保对称点

定义. 称 z_1, z_2 关于圆 $|z-a| = R$ 对称, 若 $z_2 - a = \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - a}}$



是否符合直觉? 设 $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$

$z_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(y-2) = 1$

$\rightsquigarrow \begin{cases} y-x=2 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow z_2 = (1,3)$ 令 $\begin{cases} z_1 = \frac{3}{2}+\frac{5}{2}i \\ z_2 = 1+3i \\ a = 2+2i \end{cases}$ 符合猜想.

定理 ① z_1, z_2 关于 $Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$ 对称 $\Leftrightarrow Az_1\bar{z}_2 + B\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 + C = 0$

② 分式线性变换保持对称点.

Pf: 对称 $\Leftrightarrow (\overline{z_1 - a})(z_2 - a) = R^2 = \bar{z}_1 z_2 - \bar{a}z_2 - a\bar{z}_1 + |a|^2 - R^2 = 0$ ① ✓

命题. 设直线 L 的方程 $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$ $(B \neq 0, C \in \mathbb{R})$

则 z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$

Pf: 依赖一些基本的转化 from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{C}$

(1). 设 $\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = x_1 + iy_1 \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = x_2 + iy_2 \end{cases}$ $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 := \langle \vec{Oz_1}, \vec{Oz_2} \rangle$

(2) $ax + by + c = 0$ $\quad \vec{n} = (a, b)$

$\hookrightarrow a\frac{z+\bar{z}}{2} + b\frac{z-\bar{z}}{2i} + c = \left(\frac{a}{2} - \frac{ib}{2}\right)z + \left(\frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right)\bar{z} + c = 0$

$= \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$

$\vec{OB} \parallel \vec{n} \rightsquigarrow \vec{OB}$ 是直线的法向量.

z_1, z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 \text{ 中点在 L 上} & ① \\ \vec{z_1z_2} \perp L & ② \end{cases}$

② $\Leftrightarrow \overline{z_1z_2} \parallel \vec{OB} \Leftrightarrow \vec{z_1z_2}$ 与 iB 正交

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(iB \cdot \overline{z_1 - z_2}) = 0 \Leftrightarrow iB(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - i\bar{B}(z_1 - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{B}z_2 + B\bar{z}_1 = B\bar{z}_2 + \bar{B}z_1$

① $\Leftrightarrow B(\overline{z_1 + z_2}) + \bar{B}(z_1 + z_2) + 2C = 0$

$\Leftrightarrow (\bar{B}z_2 + B\bar{z}_1 + C) + (B\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 + C) = 0$

i.e. 对称 $\Rightarrow \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$

而 $\bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0 \overset{\text{bar}}{\rightsquigarrow} B\bar{z}_1 + \bar{B}z_2 + C = 0$, 相差即得. □

② 设分式线性变换为 $w = \frac{1}{z}$

则 $Az\bar z+\bar Bz+B\bar z+C=0$

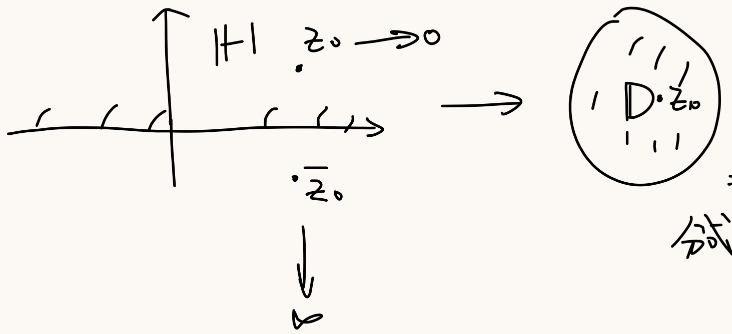
$\overset{\text{对称}}{\Longleftrightarrow} Az_1\bar z_2+\bar Bz_1+B\bar z_2+C=0$

$\Longleftrightarrow A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar w_2}+\bar B\frac{1}{w_1}+B\frac{1}{\bar w_2}+C=0$

$\Longleftrightarrow A+\bar B\bar w_2+Bw_1+Cw_1\bar w_2=0$

$\Longleftrightarrow w_1, w_2$ 关于 $Cw\bar w+Bw+\bar B\bar w+A=0$ 对称. □

例. 求将上半平面 $\mathbb{H}$ 映成单位圆 $\mathbb{D}$ 的映射.



$\exists z_0$ s.t. $f(z_0)=0$, $f(\bar z_0)=\infty$

令 $f(a)=b$

$\Rightarrow (a, z_0, \bar z_0) \Rightarrow (b, 0, \infty)$

分式由下式确定

$(z, a, z_0, \bar z_0)=(w, b, 0, \infty)$

$$\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}\Big/\frac{a-z_0}{a-\bar z_0}=\frac{w-0}{w-\infty}\Big/\frac{b-0}{b-\infty}$$

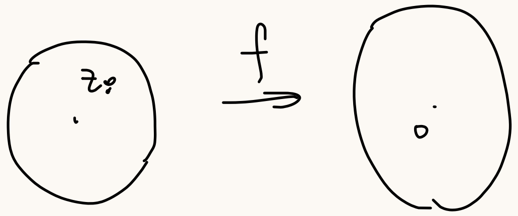
$$=\frac{w}{b}$$

$$w=k\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$$

f 将实轴映为单位圆 $\Rightarrow z=x\in\mathbb{R}$, 有 $\left|k\frac{x-z_0}{x-\bar z_0}\right|=1$

$\Rightarrow |k|=1$ 故 $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$ $\theta\in\mathbb{R}$. $z_0\in\mathbb{H}$. □

例. 将单位圆映成单位圆.



$f(z_0)=0$ $f\left(\frac{1}{\bar z_0}\right)=\infty$. $f(a)=b$

$\left(z, a, z_0, \frac{1}{\bar z_0}\right)=(w, b, 0, \infty)$

$$\Rightarrow \frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar z_0}}\Big/\frac{a-z_0}{a-\frac{1}{\bar z_0}}=\frac{w-0}{w-\infty}\Big/\frac{b-0}{b-\infty}$$

$$=\frac{w}{b}$$

$$\Rightarrow w=k\cdot\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}.$$

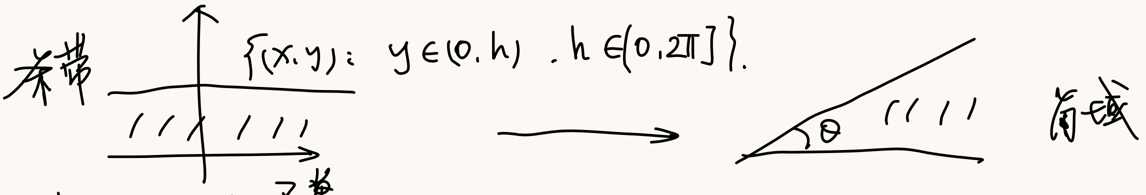
$|z|=1 \Rightarrow |w|=1$. $\Rightarrow 1=|k|\frac{|z-z_0|}{|1-\bar z_0 z|}=|k|\frac{|z-z_0|}{|\bar z-\bar z_0|}=|k|$.

$w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar z_0 z}$. $|z_0|<1$. □

总结. 共形映射

1. 分式线性映射 保圆周 $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ $\Delta=ad-bc\neq0$

2. 指数映射 $w=e^{z}=e^{x}\cdot e^{iy}$ $\begin{cases} r=e^{x} \\ \theta=y \end{cases}$



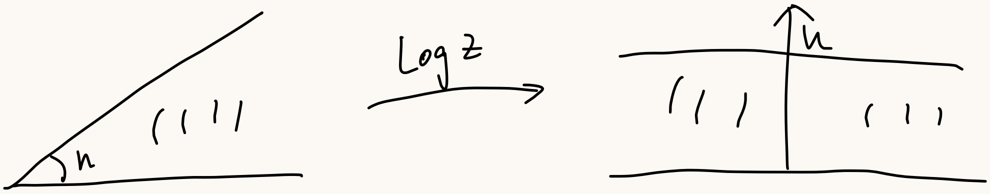
若 $h>2\pi$, w 不单.

3. 对数映射 $w=\mathrm{Log}\,z=\log|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$

$=\log|z|+i\arg z$ $\arg z\in[0,2\pi)$

$z=z(r,\theta)$ ~~那~~ in $\{(r,\theta): r>0,\ \theta\in(0,h)\ h\in(0,2\pi]\}$

$\to\{(x,y): x\in\mathbb{R},\ y\in(0,h)\}$



4. 幂函数. $w=z^{n}$ $n\geq 2$ $\theta\in(0,\alpha)$

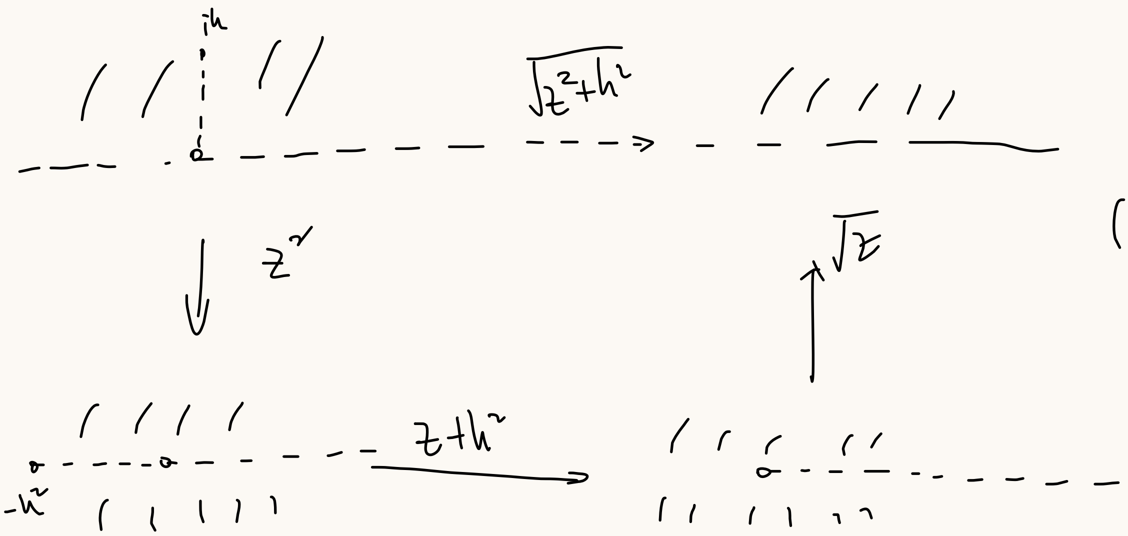
扇形角度扩大 初始扇形张角 $\alpha\in(0,2\pi]$

5. 根式函数 $w=z^{\frac{1}{n}}$ $n\geq 2$

扇形角度变小

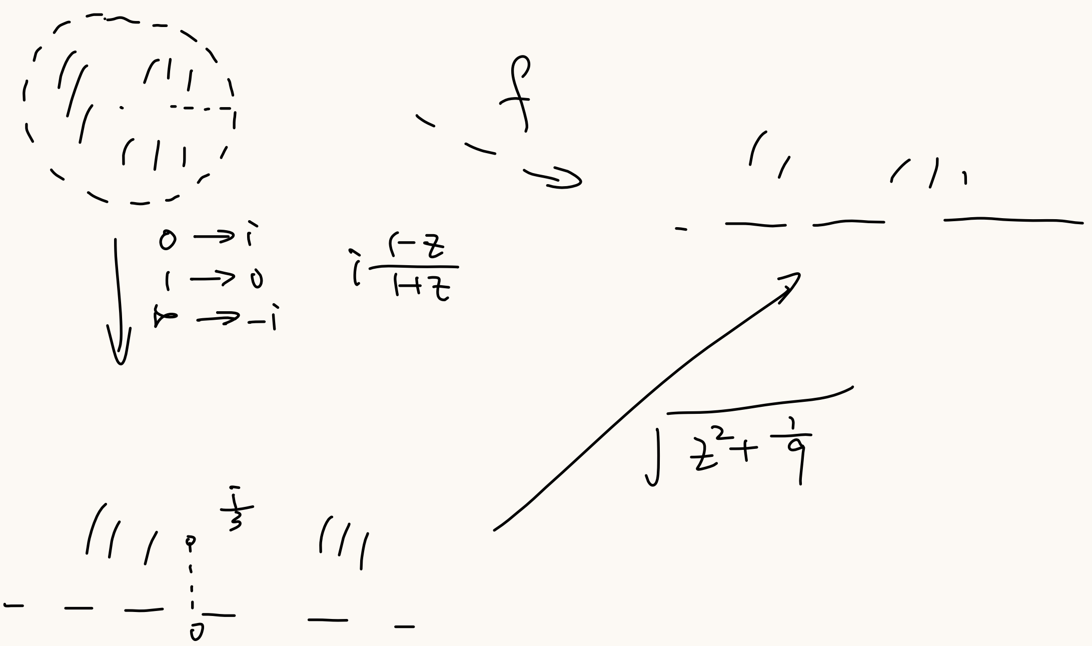
一些区域变形的例子.

1、 $D=\mathbb{H}\setminus[0,ih]$ $h>0$ 求 D 变为 $\mathbb{H}$ 的共形变换

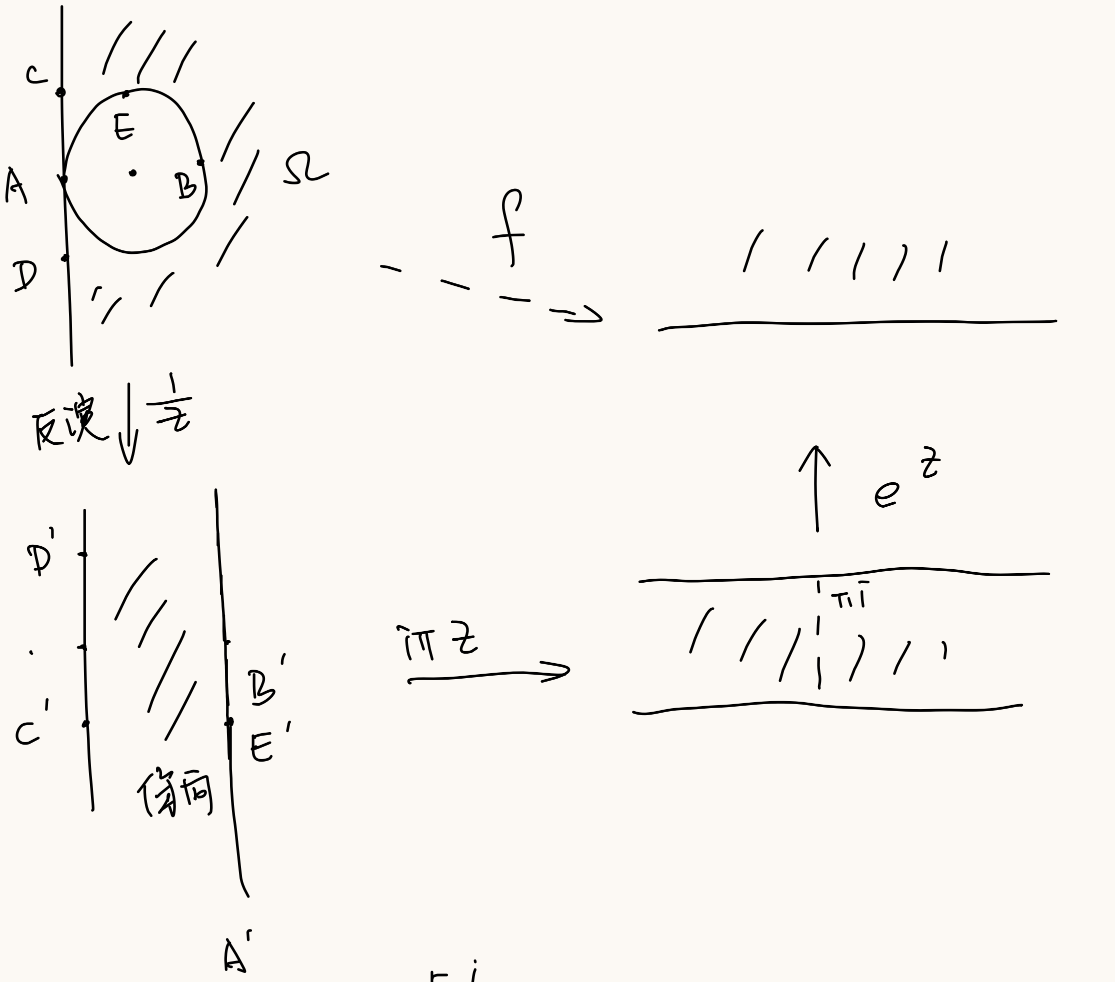


$(\sqrt{z^2+h^2})'=\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\neq 0$

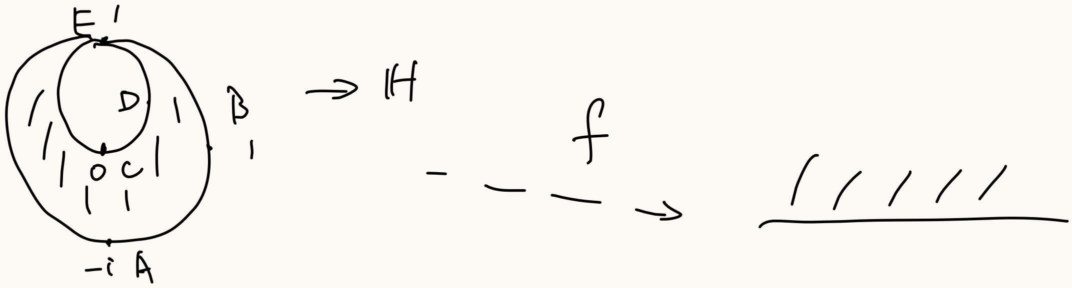
2. 求将 $|z|<1$ 去掉 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的区域映成 $\mathbb{H}$ 的共形变换

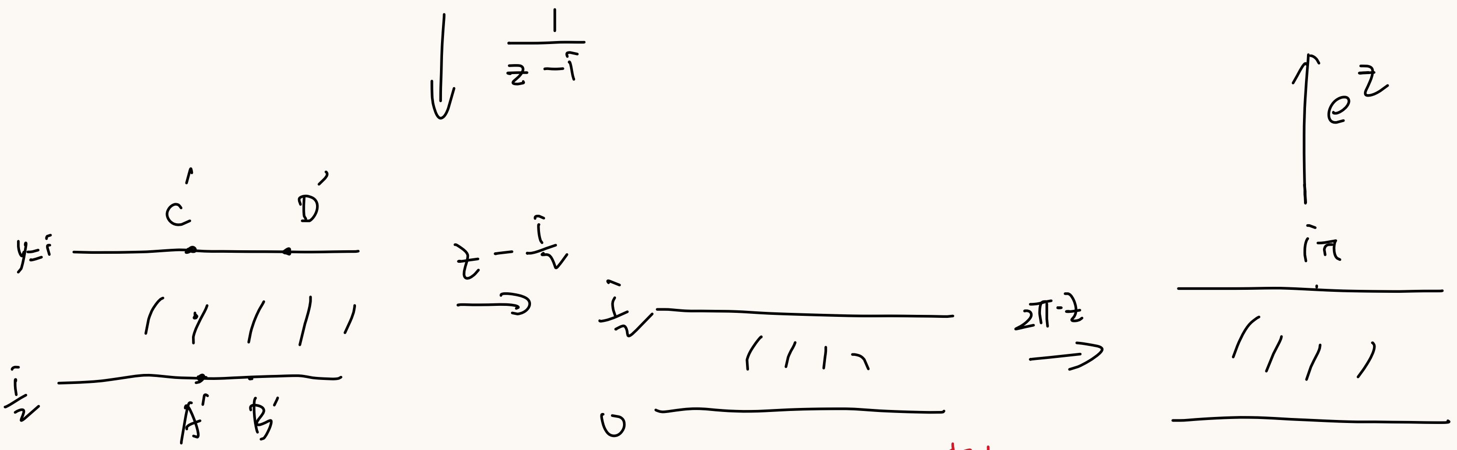


3. 设Ω是 $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域，求 $\Omega \to \mathbb{H}$



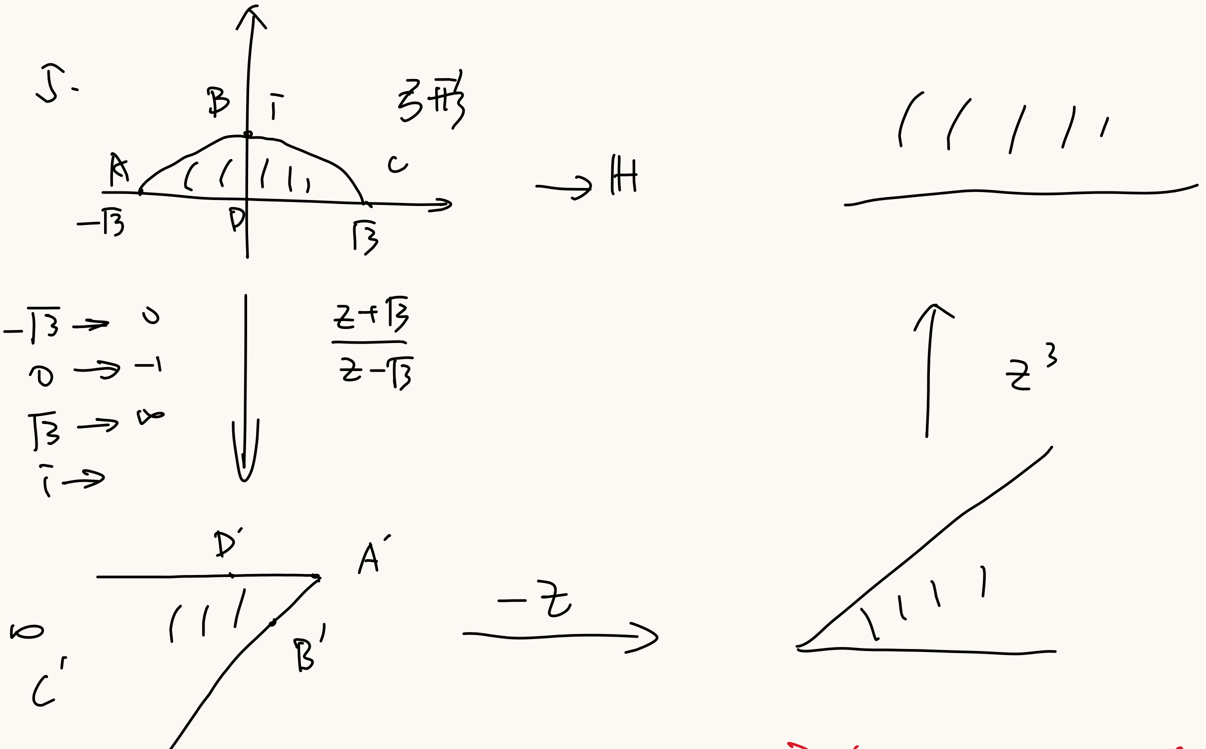
4. 月牙形区域





反演变换将相切的两圆变成平行直线，找出反演中心即可.

5.



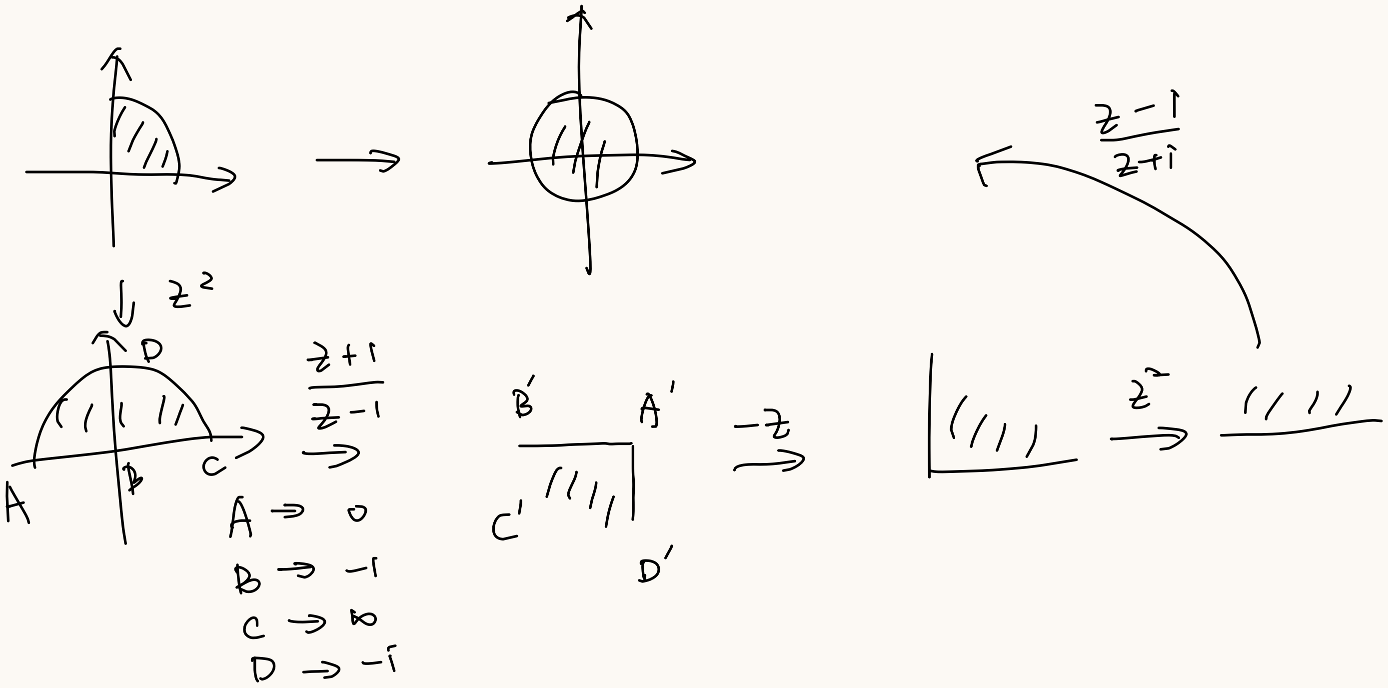
两圆相交

$a \to 0$

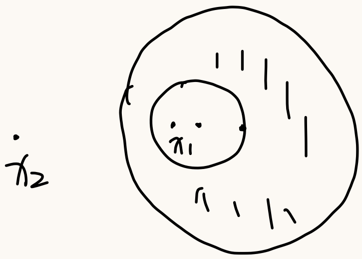
$b \to \infty$

$$\omega = k\frac{z-a}{z-b}$$

6



7. 将 $|z-1|=\frac{5}{2}$ 和 $|z|=1$ 围成区域映成同心圆环



如果有公共对称点，那么一定在连线上，因为 z^*，z 与圆心共线

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ (x_1-1)(x_2-1)=\frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{4} \\ x_2=-4 \end{cases}$$

$$w=\frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$$

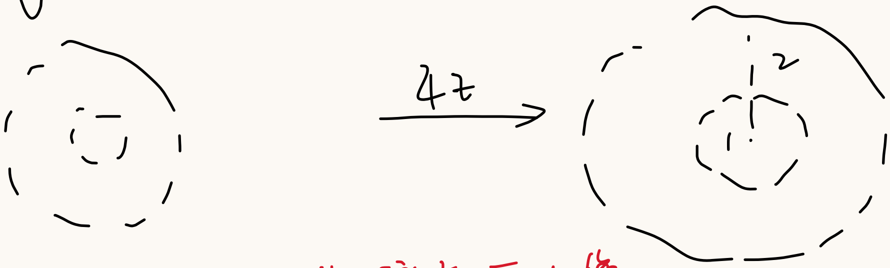
$x_1 \to 0$

$x_2 \to \infty$

$1 \to \frac{1}{4}$

$\frac{7}{2} \to \frac{1}{2}$

映成 $\{w: \frac{1}{4}<|w|<\frac{1}{2}\}$



相离的圆通过找公共对称点可以将其变为同心圆环

例 Rokousky 函数 $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

① 单叶域：$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(1-\frac{1}{z_1z_2})=0$ 不含 $z_1z_2=1$ 即可

例 $\mathbb{D}$，$\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$，$\mathbb{H}$，$\mathbb{C}\backslash\mathbb{H}$

② 映射性质 $w=u+iv$ $z=re^{i\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\theta \\ v=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi)$$

③ 圆周的像. $|z|=r$ $r\neq1$. $\Rightarrow \frac{u^2}{(\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}))^2}+\frac{v^2}{(\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r}))^2}=1$

$a=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$

$b=\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})$

$r:0\to1$ / $\infty\to1$ $a\to1$ $b\to0$

椭圆退化为

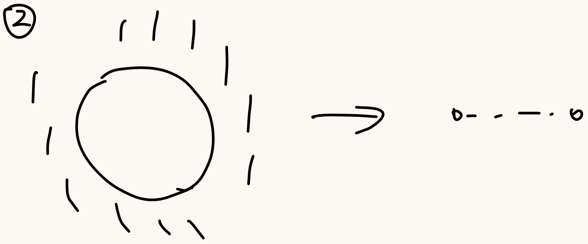
$0 < r < 1$ 时 且 $0 < \theta < \pi$ 时. $v < 0$. 即上半圆周映为下半椭圆
下 上

$r > 1$ 上 → 上
下 → 下.

综上 ①

i.e $\{0 < |z| < 1\} \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$
$\{|z| < 1\} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

②

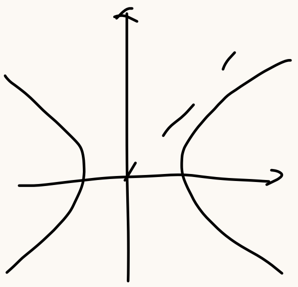


i.e. $\{|z| > 1\} \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

③

④

射线 $\arg z = \theta$ 的像 $\Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1$



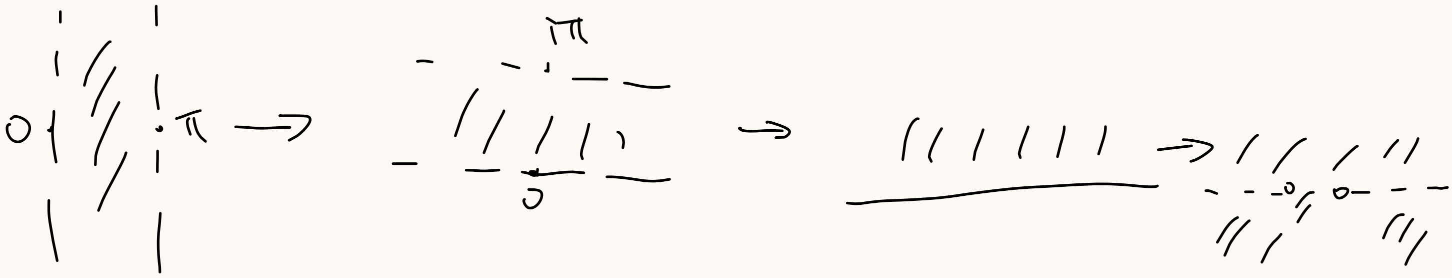
$\theta = 0$ $u \geq 1$
$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 右半支
$\theta = \frac{\pi}{2}$ 虚轴 $\Rightarrow \mathbb{H} \xrightarrow{w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$
$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 左半支
$\theta = \pi$ $u \leq -1$ ⊥

余弦映照 $w = \cos z$

① 单叶域 $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$

$z \xrightarrow{\xi = iz} \xi \xrightarrow{\eta = e^{\xi}} \eta \xrightarrow{w = \frac{1}{2}(\eta + \frac{1}{\eta})} w$

如下


0
π
π
0

积分. 闭曲线, 反向曲线, 光滑(C^1)曲线, 分段光滑(有限段), 可求长曲线 (sup)

$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

定义(复积分) $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta y(t)\,dt$

有性质 ① $\operatorname{Re}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \operatorname{Re} f(t)\,dt$

$\operatorname{Im}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \operatorname{Im} f(t)\,dt$

② $c\cdot\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta c\cdot f(t)\,dt$, $\forall c\in\mathbb{C}$

③ (长大不等式) $\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| \le \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt$.

③的证明 $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| e^{i\theta}$ $\theta = \arg\cdots$

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right| &= e^{-i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt\right) \\ &= \int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}f(t)\right)dt \\ &\le \int_\alpha^\beta |f(t)|\,dt\end{aligned}$$

定义. $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ 光滑 f 在γ上连续.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

分段光滑 $\Rightarrow$ $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

一般的可求长曲线, 极限.

「若 $f=u+iv$. 计算后能得到 $\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)$ ⊥

例 $\int_\gamma dz \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta \gamma'(t)\,dt = \gamma(\beta)-\gamma(\alpha)$

$\int_\gamma z\,dz = \int_\alpha^\beta \gamma(t)\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\gamma^2(\beta)-\gamma^2(\alpha)\right)$

$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \xrightarrow[t\in[0,2\pi]]{\gamma(t)=a+R\cdot e^{it}} \int_0^{2\pi}\frac{1}{R\cdot e^{it}}Ri\cdot e^{it}\,dt = 2\pi i$

积分性质 ① $\int_{\gamma^-} f\,dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} -f(\gamma(-t))\,\gamma'(-t)\,dt$

$= \int_{\beta}^{\alpha} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$= -\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)dz.$

② 线性性

③ $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right|$

$\leq \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt$

$\leq \sup_\gamma |f| \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$

$\overset{可求长}{=} \sup|f|\ \mathrm{length}(\gamma).$

引理：若Ω为有界区域，$P=P(x,y)$，$Q=Q(x,y)$在区域Ω中连续，且有一阶连续偏导数，则：

$$\int_{\Omega'}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy = \int_{\Omega'} P\,dx + Q\,dy \quad (\Omega' \subseteq \Omega).$$

故 $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)$

$= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$

$\overset{G}{=} -\int_{\Omega'}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$

$\overset{C\text{-}R}{=} 0$

这里对f的光滑性要求太高了，甚至要求f'连续.

定理（Cauchy）设f在区域D中全纯，且$\gamma \subseteq D$是包含在D中的分段光滑的简闭曲线，则$\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

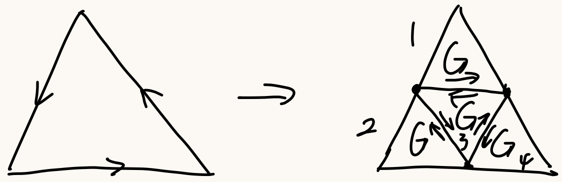
pf: 三步 ① $T \subseteq D$ 三角形 $\int_T f\,dz = 0$

② $P \subseteq D$ 多边形 $\int_P f\,dz = 0$

③ 曲线$\gamma \subseteq D$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 折线$P \subseteq D$ s.t.

(1). P与γ起点终点相同，P的顶点在γ上

(2). $\left|\int_\gamma f\,dz - \int_P f\,dz\right| < \varepsilon$



$$\int_T f\,dz = \left(\int_{T_1} + \int_{T_2} + \int_{T_3} + \int_{T_4}\right) f\,dz$$

$$M = \left|\int_T f\,dz\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{T_i} f\,dz\right| \leq \cdots$$

$L = \text{Length}(\gamma)$ $\quad \gamma_n = \frac{L}{2^n}$ $\quad \text{diam}\,\Delta_n \to 0$ $\quad \Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \cdots$

有一个小三角满足 $\left|\int_{T_1} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4}$

递降下去 $\left|\int_{T_n} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n}$

套出唯一的 $z_0 \in D$ $\quad \forall \varepsilon > 0$、$\exists \delta > 0$. 当 $|z - z_0| < \delta$. 有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

$\exists\, n$ 充分大 s.t. $\Delta_n \subseteq B(z_0, \delta)$ $\quad |z - z_0| \leq |\gamma_n| = \frac{L}{2^n}$

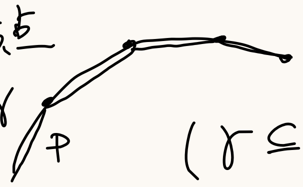
$$\Rightarrow \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \varepsilon|z - z_0| \leq \frac{\varepsilon L}{2^n}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\gamma_n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right) dz \right.\\ &\quad \left. + \int_{\gamma_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right) dz \right| \leftarrow \text{这一项为0} \\ &\leq \int_{\gamma_n} \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| dz \\ &\leq \frac{\varepsilon L}{2^n} \cdot \text{length}(\gamma_n) = \frac{\varepsilon L^2}{4^n}\end{aligned}$$

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon L^2 \to 0$$

第2步是类似的. $\left|\int_\gamma f\,dz\right| = M = \left|\sum_{\text{partition}} \int f\,dz\right| \leq N\left|\int_T f\,dz\right| = 0$

第3步 取分点



$z_0, \dots, z_n$ $|z_i - z_{i-1}| < \delta$

($\gamma \subseteq K \subseteq \bar{K} \subseteq G \Rightarrow f$ 一致, γ 分段光滑 $\Rightarrow$ 可求长)

$$\left|\int_\gamma f\,dz - \int_P f\,dz\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]} f\,dz\right|$$

$$= \left|\left[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f\,dz - f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right] - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]} f\,dz - f(z_k)(z_{k+1}-z_k)\right]\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\gamma_k}\big(f - f(z_k)\big)dz\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_{k+1}}^{z_{k+1}}\big(f - f(z_k)\big)dz\right|$$

$$\leq 2\varepsilon L \qquad \big(\text{一致性 } |f - f(z_k)| < \varepsilon\big)$$

这样造出了要的折线P

□

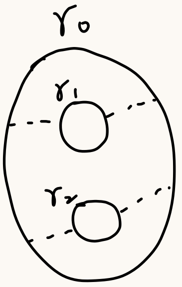
推广. D为简单闭曲线γ内部. f在D上全纯, 在$\bar{D}$上连续, 则 $\int_\gamma f\,dz = 0$

思路 折线 $\gamma_\varepsilon \to \gamma$

这里只要γ可求长就行, 利用紧性 ⇒ 一致

依Hausdorff度量收敛 ($\gamma_n \xrightarrow{h} \gamma$)

多连通版本 Cauchy Thm. $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 围成区域D. 若f在D上全纯, $\bar{D}$上连续. 则 $\int_{\partial D} f\,dz = 0$



改为多个单连通区域的并即可.

□

例 $a \notin \gamma$
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & a\text{在}\gamma\text{内部} \\ 0 & a\text{在}\gamma\text{外部, 全纯} \end{cases}$$

原函数. 给定区域Ω上的函数$f(z)$. 若$F(z)$为Ω上的全纯函数, 且$F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$. 则$F(z)$称为f的原函数

定理. 若在区域Ω上 连续函数 $f(z)$有原函数$F(z)$. 且 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. 分段光滑

则 $\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Pf: $\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt$

$$= \int_a^b dF(z(t)) = F(z(b)) - F(z(a))$$

推论. 若γ为可求长闭曲线. f连续 且在Ω上有原函数. 则 $\int_\gamma f = 0$

反之. 若$\exists\,\gamma\subseteq\Omega$ s.t. $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$ $\Rightarrow$ $f(z)$在Ω上无原函数.

例 $f(z)=\frac{1}{z}$. $D^* = \{0<|z|<1\}$ $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$

$$\int_{|z|=\frac12} f(z)\,dz = \int \frac{1}{\frac12 e^{it}}\cdot\frac12 e^{it}\cdot i\,dt = 2\pi i \neq 0.$$

推论. 若f在Ω上全纯. $f'=0$ 则f为常数

Pf: f是f'的原函数 $\Rightarrow$ $f(w)-f(w_0) = \int_\gamma f'(z)\,dz = 0$ □.

定理. D单连通. $f(z)$在D中全纯, 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(w)\,dw$ 为f的原函数.

Pf: Cauchy定理: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ (γ可求长, 闭)

$\Rightarrow F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)\,d\xi$ 与路径无关 $\Rightarrow$ 单值.

下证 $F'(a) = f(a)$

$$\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| = \frac{1}{|z-a|}\left|\int_a^z f(\xi)\,d\xi - f(a)(z-a)\right|$$

$$\overset{\text{线积分}}{\underset{\text{连续}}{=}} \frac{1}{|z-a|}\left|\left|\int_a^z \big(f(\xi)-f(a)\big)\,d\xi\right| \le \varepsilon \to 0$$

□

多连通版本 $K_i = \int_{\gamma_i} f\,dz = 0$ $\Longleftrightarrow$ f (全纯 on D 连续 on $\bar{D}$) 有原函数.

其实只要证 $\int_\gamma f\,dz = 0$ $\forall\gamma\subseteq D$ 即可

例. 设 $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. $\frac{1}{z}$ 在D中全纯, 求 $F(z)=\int_1^z \frac{1}{w}dw$

这是多值函数 $\log z + 2k\pi i = \operatorname{Log} z$

而对 $\int_{|z|=1} \frac{1}{w^2}dw = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}} i e^{i\theta} d\theta$

$= i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\int_0^{2\pi} d e^{-i\theta} = 0$

$\Rightarrow F(z) = \int_1^z \frac{1}{w^2}dw$ 单值. □

Cauchy 公式　γ是可求长的简单闭曲线, $f\in H(D)\cap C(D)$, 那么 $\forall z\in D$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

Pf: 挖点. 由CC定理.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

$\to f(z)$ □

全纯函数的值由边界上的点确定.

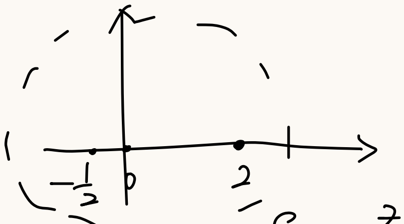
计算练习　$I=\int_L \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)}$

① $|z|=1$

② $|z-2|=1$

③ $|z-1|=\frac{1}{2}$

④ $|z|=3$



① $I=\int_L \frac{z\,dz}{(2z+1)(z-2)} = \int_L \frac{\frac{z}{2z-4}}{z+\frac{1}{2}}dz$

$= 2\pi i \frac{z}{2z-4}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = 2\pi i \frac{-\frac{1}{2}}{-5} = \frac{\pi i}{5}$

② $I=\int_L \frac{\frac{z}{2z+1}dz}{z-2} = 2\pi i\cdot\frac{z}{2z+1}\Big|_{z=2} = \frac{4\pi i}{5}$

③ $I=\int_L \frac{\frac{z(z-1)}{(2z+1)(z-2)}}{z-1}dz = 2\pi i \frac{z(z-1)}{(2z+1)(z-2)}\Big|_{z=1} = 0$

④ $I=\int_L * = \int_{|z|=1} * + \int_{|z-2|=\frac{1}{2}} * = \pi i$ □

导数

定理. 设D为可求长简单闭曲线所围区域, $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 则f在D中有各阶导数且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

pf: 由 Cauchy 公式 □

$\Rightarrow$ $f(z)$在 D中有无穷阶导数，对于多连通区域，只要 $\gamma \to \partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$

Cauchy公式让全纯函数与调和函数有了更深刻的联系

(之前已知 $f \in H(D) \Rightarrow f = u + iv$, u与v为共轭调和函数)

Cauchy 不等式 $f \in H(B(a, R))$, $|f| \le M \Rightarrow \left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n! M}{R^n}$

梯度估计

pf: $$\left|f^{(n)}(a)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi\right|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{M}{r^{n+1}} d\xi$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \frac{M \cdot 2\pi r}{r^{n+1}} = \frac{n! M}{r^n}$$

令 $r \to R$ 即可 □

Liouville 定理: 若 f在$\mathbb{C}$上全纯且有界, 则 $f(z)$为常数

pf: $$|f'(a)| \le \frac{1}{R} \sup_{|z-a|=R} |f| \le \frac{M}{R}$$

$$R \to \infty \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow f(z) \equiv const$$ □

例 (代数基本定理) $\mathbb{C}$上的复系数非常值多项式至少有一个根

pf: $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad a_n \ne 0.$

若 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$上无根 $\Rightarrow \frac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$上全纯 且有界

由 Liouville 定理. $\frac{1}{p(z)} = C \Rightarrow P(z)$是常值多项式 □

「|z| 充分大 (零点外)

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| = \left| a_n + \frac{a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{z^n}\right| \geq |a_n| - \frac{C}{|z|} \geq \frac{|a_n|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|a_n||z^n|} \geq \left|\frac{1}{P(z)}\right| \Rightarrow P(z) \text{ 有界}$$ 」

直接推论是多项式 $P(z)=a_n z^n+\cdots+a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 上恰有 n 个根.

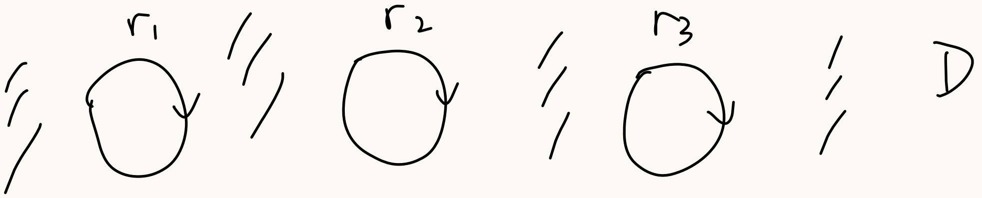
定理 (Morera) 设 $f(z)$ 是区域 D 上的连续函数, 若对 D 中任何可求长的简单闭曲线, 有 $\int_\gamma f\,dz=0$, 则 f 全纯.

Pf (Cauchy定理的逆) 令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, 由 $\int_\gamma f\,dz=0$

$\Rightarrow F'(z)=f(z) \Rightarrow F$ 全纯 $\Rightarrow F$ 任意阶可导 $\Rightarrow f$ 全纯 □

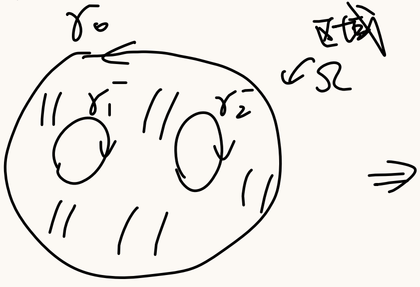
Rmk: 说明 f 全纯 $\left\langle \begin{array}{l}\text{定义}\\ \text{Morera}\end{array}\right.$

定义. 简单闭曲线族 $\gamma=\gamma_1^- \cup\cdots\cup \gamma_n^-$ 若 γ_i 为简单闭曲线取负定向 任意一条在其它各条外部, 则称 γ 所围无界区域 D



定理. 简单闭曲线围成的无界区域 D 上. f 在 $D\setminus\{\infty\}$ 上全纯 且满足 $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 f=a\in\mathbb{C}$ 且 f 在 $\bar{D}$ 上连续 $\Rightarrow \int_\gamma f\,dz=0$

Pf. 充分大的大圆盖住 γ $\gamma_0=\partial\{|z|=R\}$



$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f\,dz=0 \quad \text{i.e.} \int_{\gamma_0} f\,dz=\int_{\gamma_1} f\,dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f\,dz$$

$$\Rightarrow \left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|-\left(\int_{\gamma_1} f\,dz+\cdots+\int_{\gamma_n} f\,dz\right)\right|$$

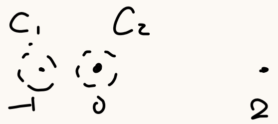
$$= \left|-\int_{\gamma_0} f\,dz\right| = \left|\int_{|z|=R}\frac{z^2 f}{z^2}\,dz\right| \leq \max_{|z|=R}|z^2 f|\left|\int_{|z|=R}\frac{dz}{|z|^2}\right|$$

$$\leq M\frac{2\pi R}{R^2}\to 0$$

□

例. $I = \int_C \frac{dz}{z^3(z+1)(z-2)}$ $|z| = r$ $r \neq 1, 2$

$r \in (0,1)$. $I = \int_C \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3} dz$



$$= \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right)'' \Bigg|_{z=0}$$

$$= \pi i \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}\pi i$$

$r \in (1,2)$ $I = \int_C * = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_1} \frac{\frac{dz}{z^3(z-2)}}{z+1} + \int_{C_2}$

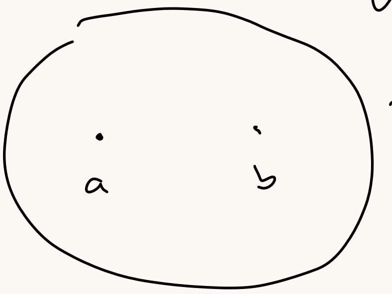
$$= \frac{2\pi i}{3} - \frac{3\pi i}{4} = -\frac{\pi i}{12}$$

$r > 2$ $I = \int_{C_1} + \int_2 + \int_3 = -\frac{\pi i}{12} + \frac{2\pi i}{24} = 0$

法二 $z^2 f(z) \to 0$ 无界积分为0

Liouville定理另证 (Cauchy公式)

$\forall a \neq b$ R充分大



$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)}{\xi - b} d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)(a-b)}{(\xi-a)(\xi-b)} d\xi$$

$$|f(a) - f(b)| \leq \left|\frac{M(a-b)}{2\pi}\right| \int_{|z|=R} \frac{dz}{|\xi-a||\xi-b|}$$

$$\leq \frac{M(a-b)}{2\pi} \frac{2\pi R}{(|R|-a)(|R|-b)} \to 0$$

□

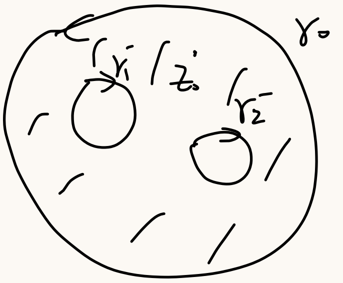
定理 (无界区域的Cauchy公式) 设 $\gamma = \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$ 围成无界区域D, 且$f(z)$在D中全纯, $\bar{D}$上连续, 则 $\forall z \in D$, 有

$$f(z) = f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

注意γ的方向

pf.



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi$$

估计 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi$

$\gamma_0 = \{|z| = R\}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\infty)}{\xi - z_0}\,d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\xi) - f(\infty)}{\xi - z_0}\,d\xi$$

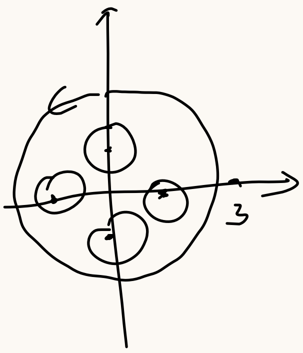
$$= f(\infty) + I$$

$$|I| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_0} \frac{f(\xi) - f(\infty)}{\xi - z}\,d\xi\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_0}|f(\xi) - f(\infty)|\,\frac{2\pi R}{|R| - |z_0|}$$

$$= \frac{R}{R - |z_0|}\underbrace{\max_{\gamma_0}|f(\xi) - f(\infty)|}_{\to 0 \text{ as } R \to \infty} \to 0$$

$\Rightarrow$ 原式计算完毕 □

例 $I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^4-1)(z-3)^2}$



用Cauchy公式 当然可以

也可以 $\frac{1}{z^4-1}$ 在$|z|>2$上全纯

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-3)^2}\,dz$$

$$= f'(3) = \left.-\frac{4z^3}{(z^4-1)^2}\right|_{z=3} = \frac{-81}{1600}$$

□

例. 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0| \le r$ 上全纯, 且 $|\mathrm{Re}\, f| \le M$. 则 $|f'(z_0)| \le \frac{2M}{r}$

pf. $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\,d\xi =$ $\qquad \xi = z_0 + re^{i\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^2 e^{2i\theta}}\, r i e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{-i\theta}\,d\theta.$$

注意到 $\frac{1}{2\pi r^2}\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{i}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta$$

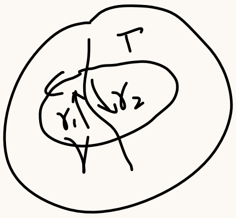
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \overline{f}(z_0+re^{i\theta})e^{-i\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{Re}\left[f(z_0+re^{i\theta})\right]e^{-i\theta}\,d\theta\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi r} M\, 2\pi = \frac{2M}{r}$$

□

例：若 f 在区域 G 中连续，在 G\γ 上全纯，γ 为 G 中分段光滑曲线，则 f 在 G 中全纯



Pf. $\forall \Gamma \subseteq G$.

$$\int_\Gamma f\,dz = \int_{\Gamma_1\cup\gamma_1} f\,dz + \int_{\Gamma_2\cup\gamma_2} f\,dz \overset{\text{Cauchy 积分}}{\overset{\downarrow}{=}} 0$$

由 Morena 定理 f 全纯

实变方法，用连续性将 Cauchy 积分推至 γ（Cauchy 积分只需求内部全纯）

$\forall z\in G\backslash\gamma$ $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1\cup\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2\cup\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$\Rightarrow f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$/_z \quad \frac{1}{\zeta-z} \rightrightarrows \frac{1}{\zeta-z_0} \qquad \zeta\in\Gamma \quad z_0\notin\Gamma.$

由 LDT. $\quad f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta \Rightarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 全纯

□

积分　Cauchy 积分定理 $\begin{cases} H(D) \cap C(\bar{D}) \\ \partial D \text{ 简单闭, 可求长} \\ \int_{\partial D} f \, dz = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

Cauchy 积分公式 (全纯积分表示)　$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

$z \in D$ (上面的条件)

Cor 1. $|f^{(n)}| \leq \frac{n!M}{R^n}$　if $|f(z)| \leq M$, f is holomorphic in $B(a,r)$

(similar as gradient estimation)

2. $f \in C(D)$　$\forall \gamma \subseteq D$　$\int_\gamma f \, dz = 0 \Rightarrow f$ is holomorphic

级数　复级数和实级数应该有很多相似之处，只列举，突出不同点。

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$ 收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$、$\exists N>0$、$\forall n \geq N$　$p \geq 1$

$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$

2. 绝对收敛：$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ 收敛

3. 函数列　在 E 上收敛 (pointwise)

一致收敛 on E：$\forall \varepsilon>0$、$\exists N>0$ $\forall n \geq N$ $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \varepsilon$，$\forall z \in E$

内闭一致收敛（紧收敛）：Ω 的任一紧子集上一致收敛

判别法（一致）
- 一致收敛的 Cauchy 准则
- M－判别法　$|f_n(z)| \leq M_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$

一致收敛性质　一致收敛＋每项连续 $\Rightarrow$ 极限连续

定理. f_n 在可求长曲线 γ 上连续，$\sum f_n$ 在 γ 上一致连续到 f.

那么 $\int_\gamma f\, dz = \sum \int_\gamma f_n\, dz$

Pf. $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，$\forall n \geq N$. $\left|\sum_{1}^{n} f_k - f\right| < \varepsilon$

$$\left| \int_\gamma f\, dz - \sum_{1}^{n} \int f_k\, dz \right| \leq \left| \int_\gamma \left(f - \sum_{1}^{n} f_k\right) dz \right| \leq \varepsilon L$$

$$\Rightarrow \left| \int_\gamma f\, dz - \sum_{1}^{\infty} \int_\gamma f_n\, dz \right| \leq \varepsilon L \to 0$$

□

接下来的结果有一些不同，毕竟全纯这一条件远强于可导

定理 (Weierstrass) 若 1. $\{f_n\}$ 在区域 D 中全纯
2. $\sum f_n$ 在 D 中内闭收敛到 f

则 1. f 在 D 中全纯
2. $\sum_{1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 f.

Pf: 首先 f 在 D 上连续，$\forall z \in D$，$\exists B$ s.t. $z \in B \subseteq D$. 因为 $\mathbb{C}$ 是 LCH 空间

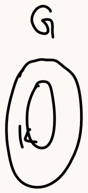
$\Rightarrow \exists \tilde{B}$ 紧 s.t. $z \in \tilde{B} \subseteq B \subseteq D$　在 $\tilde{B}$ 上用内闭一致收敛知 f 在 z 处连续

$\Rightarrow f$ 在 D 上连续

在 $\bar{G}$ 上使用 Cauchy 积分和逐项积分 ⇒ f 在 $\bar{G}$ 上全纯 ⇒ f 在 D 上全纯

「接下来给出一个导数估计，紧集上的导数能被开集中的函数控制

$$\sup\{|f^{(k)}(z)|,\ z\in K\}\ \underset{k,K,G}{\lesssim}\ \sup\{|f(z)|,\ z\in G\}\qquad K\subseteq G\subseteq D$$



$d:=\operatorname{dist}(\partial G,K)>0$ 对 $B(a,d)\subseteq G$，$a\in K$ 用 Cauchy 不等式

$$|f^{(k)}(a)|\le\frac{k!}{d^k}\sup\{|f|,\ z\in B(a,d)\}\le\frac{k!}{d^k}\sup\{|f|,\ z\in G\}$$ ⌟

那么在紧子集 K 上，考虑 $K\subseteq G\subset\subset D$，$G$ 的构造可以是

$$G=\bigcup_{a\in F}B(a,\tfrac{d}{2})\subseteq D$$

$$\Rightarrow\sup\{|S_n^{(k)}-f^{(k)}|,\ a\in K\}\ \underset{k,K,G}{\lesssim}\ \sup\{|S_n-f|\ \ a\in\bar{G}\}$$

由于 $\sum f_n$ 在 $\bar{G}$ 上一致收敛，这完成了控制。 □

定理. 设 $F:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{C}$ 满足 $F(z,s)$ 是 z 的全纯函数，F 在 $\Omega\times[0,1]$ 上连续

则 $f(z)=\int_0^1F(z,s)\,ds$ 全纯.

pf. 设 $f_n(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(z,\frac{k}{n})$ 全纯

$$|f_n(z)-f(z)|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(F(z,\tfrac{k}{n})-F(z,s)\right)ds\right|$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|F(z,\tfrac{k}{n})-F(z,s)|\,ds$$

紧分割一次，$z\in\tilde{\Omega}\subset\subset\Omega$ F 在 $\bar{\Omega}\times[0,1]$ 上一致，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

$|s_1-s_2|<\delta$ 时有 $|F(z,s_1)-F(z,s_2)|<\varepsilon$

$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ ⇒ $f_n(z)$ 内闭一致收敛到 f □

例. 设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 上连续有界, 则函数 $g(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$ 在 $\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z>0\}=\Omega$ 上有定义且全纯

Pf. 令 $F(z,t)=f(t)e^{-zt}$ 在 $\Omega\times[0,n]$ 上满足上一定理条件

$\Rightarrow g_n(z)=\int_0^n f(t)e^{-zt}dt$ 在 Ω 上全纯

$\forall K \overset{紧}{\subseteq} \Omega$ 令 $\delta=\min\limits_{K} \mathrm{Re}\, z>0$.

$M=\sup\limits_{\Omega}|f(t)|<\infty$

$$|g_n(z)-g(z)|=\left|\int_n^\infty f(t)e^{-zt}dt\right|\leq\int_n^\infty Me^{-\delta t}dt$$

$$=\int_n^\infty M\,d\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}=\frac{Me^{-n\delta}}{\delta}$$

$\Rightarrow g_n \overset{K}{\rightrightarrows} g \Rightarrow g$ 全纯 □

现在考虑复幂级数 $\sum\limits_{n=0}^\infty a_nz^n$, 以下是推广的 C-H 定理.

定理. 令 $R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, 则当 $|z|<R$ 时. $\sum a_nz^n$ 绝对, 内闭一致收敛

当 $|z|>R$ 时. $\sum\limits_{n=0}^\infty a_nz^n$ 发散.

Pf. ① $R=0$ 若 $z_0\neq 0$ 处收敛. 由 $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$

$\exists\{n_k\}$ s.t. $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}>\frac{1}{|z_0|} \Rightarrow |a_{n_k}||z_0|^{n_k}>1$

$\Rightarrow$ 发散.

② $R=\infty$ 处处收敛. $\forall z_0\neq 0$.

$\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=0 \Rightarrow \forall n>N \quad \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2|z_0|}$

$\Rightarrow |a_n||z_0|^n<\frac{1}{2^n} \Rightarrow$ 收敛

③ $0<R<\infty$ 当 $0<|z_0|<R$ 插入 $0<|z_0|<\rho<R$

$$\sum|a_n||z|^n=\sum|a_n|\left|\frac{z_0}{\rho}\right|^n\underbrace{\rho^n}<\infty$$

$\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\frac{1}{\rho} \qquad |a_n|\rho^n<1$

当 $z_0>R$ $|z_0|>r>R$ $|a_n|\cdot|z_0|^n>\left(\frac{z_0}{r}\right)^n>1$ □

上面的定理证明与之前实的情况基乎一致

下面的定理表明收敛的复幂级数有类似的良好性质

定理、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z|<R$，则

(1). $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上全纯

(2). f 在 $|z|<R$ 上可导，且 $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

(3). $f'(z)$ 在 $|z|<R$ 上收敛且全纯

Pf: (1) 部分和全纯，在 $|z|<R$ 内闭一致收敛 $\Rightarrow$ $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上全纯

(2) 令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. $|z_0|<R$

估计如下

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)=\frac{\sum_1^n a_k((z_0+h)^k-z_0^k)+\sum_{n+1}^{\infty} a_k((z_0+h)^k-z_0^k)}{h}-g(z_0)$$

$$=\underbrace{\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h}-S_N'(z_0)}_{\to 0 \text{ as } h\to 0}+\underbrace{\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}}_{\substack{|z_0+h|<r<R\\ |z_0|<r<R}}+\underbrace{S_N'-g(z_0)}_{\to 0 \text{ as } N\to\infty}$$

$$\leq |h|\sum_{N+1}^{\infty} n r^{n-1}\to 0$$

□

显然的推论是 $\sum a_n z^n$ 在收敛域上无穷次可导 这和实的情况一致.

定义：在区域D上，称函数 $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 处解析，若

f 在 z_0 处可展开 $f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\forall z\in B(z_0,\varepsilon)$

若 f 在 D 中任何点处解析，则称 f 在 D 上解析

显然. f 解析 $\Rightarrow$ f 全纯 on D.

接下来为了推广 Abel 第二定理，引入非切向极限这一概念

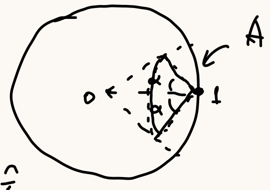
定义，设 g 定义在单位圆上. $e^{i\theta_0}\in S^1$. $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 指如下区域

其中 $\alpha<\frac{\pi}{2}$. 若 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时，g 有极限 l. 则记 $\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ z\in S_\alpha(e^{i\theta_0})}} g(z)=l$.

定理(Abel) 若幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R=1$，且在点 $z=1$ 处收敛到 S，

则 (1) 级数在区域 $\overline{S_\alpha(1)\cap B(1,\cos\alpha)}$ 上一致收敛

(2) $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in S_\alpha(1)}} f(z)=S$.



Pf: 之前用了Abel判别法，现在没有工具但是可以模仿

令 $\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$ $\Rightarrow$ $a_n=\sigma_{n-1,2}-\sigma_{n-1,1}$，现在要估计余项在A上行为

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$，$p>0$ $|\sigma_{n,p}|<\varepsilon$

$$a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}=\sigma_{n,1}z^{n+1}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}$$
$$=\sigma_{n,1}(1-z)z^{n+1}+\sigma_{n,2}(1-z)z^{n+2}+\cdots+\sigma_{n,p-1}(1-z)z^{n+p-1}+\sigma_{n,p}z^{n+p}$$
$$=(1-z)(\sigma_{n,1}z^{n+1}+\sigma_{n,2}z^{n+2}+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-1})+\sigma_{n,p}z^{n+p}$$
$$=(1-z)z^{n+1}(\sigma_{n,1}+\sigma_{n,2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{p-2})+\sigma_{n,p}z^{n+p}$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|\le\varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right)$$

$\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 在A上有界：$\frac{|1-z|}{1-|z|}\le\frac{2}{2\cos\theta-\cos\alpha}\le\frac{2}{\cos\alpha}$

由Cauchy判别法 A上一致收敛，那么由连续性知非切向极限 □

不难得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在 $\{|z|\le1\}\setminus\{1\}$ 上收敛

计算其和函数 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$

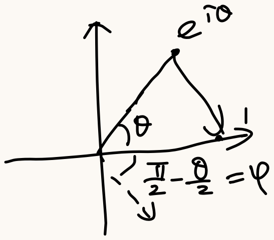
$$f(z)-f(0)=\int_0^z f'(\varphi)\,d\varphi=\int_0^z\frac{1}{1-\varphi}\,d\varphi=-\mathrm{Log}(1-\varphi)\Big|_0^z$$

$$\Rightarrow f(z)=-\log|1-z|-i\arg(1-z)$$

$\mathrm{Re}(f(z))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$ $z=e^{i\theta}$ $f(z)=-\log|1-e^{i\theta}|-i\arg(1-e^{i\theta})$

$\mathrm{Im}(f(z))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ $=-\log|2\sin\frac{\theta}{2}|-i(-\varphi)$

$=-\log(2\sin\frac{\theta}{2})+i\varphi$



$$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log(2\sin\frac{\theta}{2})\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}\end{cases}\quad\theta\in(0,2\pi)$$

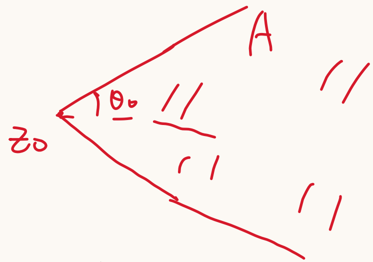
这个式子也能用Fourier级数得到

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 的收敛性

定理、设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处收敛，则

(1) 其在 Re $z>x_0$ 处收敛

(2) 级数在A的闭包上一致收敛



Pf. $n^z = e^{z\log n} = e^{x\ln n+iy\ln n} = n^x e^{iy\ln n}$ 为单值函数

$$\sum_{n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^z} = \sum_{n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^{z_0}}\cdot\frac{1}{k^{z-z_0}} \qquad \text{Re } z > \text{Re } z_0$$

如果是实的情况，当然是用Dirichlet收敛，但是现在是复的，走一遍Abel变换.

令 $\sigma_n=0$ $\sigma_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}$ $\cdots$ $\sigma_{n+p}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}$

$$\text{上式} = \sum_{n+1}^{n+p}\frac{\sigma_k-\sigma_{k-1}}{k^{z-z_0}} = \sum_{n+1}^{n+p}\frac{\sigma_k}{k^{z-z_0}} - \sum_{n+1}^{n+p}\frac{\sigma_{k-1}}{k^{z-z_0}}$$

$$=\left(\frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}}-\frac{\sigma_n}{(n+1)^{z-z_0}}\right)+\sum_{n+1}^{n+p-1}\sigma_k\left(\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z-z_0}}\right)$$

$|\sigma_{n+p}|<\varepsilon$，现在估计 $\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z_0-z_0}}$，和要求有限

$$x^{z_0} = e^{z_0\log x} = e^{a\log x+ib\log x} = x^a\cdot e^{ib\log x} \text{ 单叶}$$

令 $\beta=-(z-z_0)$ Re $\beta<0$

$$\left|k^\beta-(k+1)^\beta\right| = \left|\int_k^{k+1}\beta t^{\beta-1}dt\right| \le |\beta|\int_k^{k+1}|t|^{\beta-1}dt$$

$$|t^{u+iv}| = t^u \longrightarrow \quad = |\beta|\int_k^{k+1}|t|^{Re(\beta-1)}dt$$

$$=\frac{|\beta|}{Re\beta}\left[(k+1)^{Re\beta}-k^{Re\beta}\right]$$

i.e. $$\left|\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z-z_0}}\right| \le \frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left[k^{x_0-x}-(k+1)^{x_0-x}\right]$$

那么 $$|*| \le 2\varepsilon\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}+\frac{\varepsilon}{(n+p)^{x-x_0}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

在 $\bar{A}$ 上. $\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\le\frac{1}{\cos\theta_0}$ 由上面的估计

$$|*| \le \varepsilon\left(\frac{2}{\cos\theta_0}+1\right) \rightrightarrows 0$$ 故这是一致的 □

定理. 任一形如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 的函数项级数都有一收敛直线 $\operatorname{Re} z = C$，满足

(1) 级数在直线右半平面收敛，左半平面发散

(2) 若在直线上一点收敛，则在上述角状域中一致收敛

(3) 级数在右半平面内闭一致收敛.

Pf. 关键是找到(1)中的 C. 用闭区间套操作即可. □

全纯函数的幂级数展开

定理. 设 $f(z)$ 在区域 D 中全纯，$\overline{B(z_0,R)} \subset D$，则 f 可在 z_0 处展开如下

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,\quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \quad \forall z\in B(z_0,R)$$

且展式唯一.

Pf. (全纯的威力巨大，用 Cauchy 积分公式表征全纯)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1+\frac{z_0-z}{\zeta-z_0}\right)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\int_B \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,\frac{(z-z_0)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \square$$

实变工具威力强大.

推论. f 在 z_0 处全纯 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 邻域可以展开为幂级数.

定理. 若 f 在圆盘内全纯，则 f 的幂级数展开全纯.

Pf. 设 $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0)+\cdots$

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\zeta-z_0)^n\,d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_B (\zeta-z_0)^{n-k-1}\,d\zeta$$

计算 $\int_B (\zeta - z_0)^{n-k-1} d\zeta$

$$\left.\begin{array}{lll} n > k & \Rightarrow \text{全纯} & \longrightarrow 0 \\ n = k & & 2\pi i \\ n < k & \Rightarrow \text{N-L 公式} & \rightarrow 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{上式为 } f^{(k)}(z_0) = a_k .$$

□

例. 对数函数 Log(1+z) 的单值分支在 z=0 处的展开

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$$

$$(\log(1+z))_k = 2k\pi i + (\log(1+z))_0$$

$$(\log(1+z))_0 = z - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \qquad |z|<1$$

定义. 若 f 在 z_0 处全纯, 且 $f(z_0)=0$, 则称 z_0 是 f 的零点

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

若 $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \geq 1$, $\Rightarrow f \equiv 0$ on B

若 $f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \cdots = (z-z_0)^m\left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \cdots\right) = (z-z_0)^m g(z)$$

此时称 z_0 是 f 的 m 阶零点. $g(z)$ 在 B 上全纯且 $g(z_0) \neq 0$

有如下表述:

命题. z_0 是全纯函数 $f(z)$ 的 m 阶零点 $\Longleftrightarrow f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 邻域中全纯 且 $g(z_0) \neq 0$

全纯函数总能展开, 若把展开视为无穷多项式, 那有无穷多零点是否就是零多项式.

定理. 若 $f(z)$ 在区域中全纯, 则 f 的零点孤立 或 $f \equiv 0$.

Pf. f 在 z_0 处全纯. B 上 $f \not\equiv 0$ 但有 $z_k \to 0$ $z_k \in B$ 且 $f(z_k)=0$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_m (z-z_0)^m (1+g(z)) \qquad g(z_0) = 0$$

$\Rightarrow \exists \tilde{B} \subseteq B$ s.t. $|g| < \varepsilon$ on $\tilde{B}$

但 $f(z_k)=0 \Rightarrow 1+g(z_k)=0 \Rightarrow |g(z_k)| = 1$ 而 $z_k \in \tilde{B}$ as $k \to \infty$

$\Rightarrow f \equiv 0$ on B $\Rightarrow f \equiv 0$ on $\bar{B}$

由连通性论证, $f \equiv 0$ on D. □

推论(唯一性定理) 若 $f_1, f_2 \in H(D)$ $\{z_n\} \subseteq D$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in D$. $f_1(z_n) = f_2(z_n)$

那么 $f_1 \equiv f_2$ on D.

$\boxed{a \in D}$ 不可去. 例子 $\sin\frac{1}{1-z}$, $|z|<1$; $z_k = 1-\frac{1}{k\pi} \to 1$ 但 $\sin\frac{1}{1-z} \not\equiv 0$.

也就是说, 全纯函数是被一列点控制住的. 利用这个性质可以证明

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

全纯函数的Laurent展开

定义 Laurent级数

$$\underset{(a)}{\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n} = \underset{(b)}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n} + \underset{(c)}{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}$$

称(a)收敛 若(b),(c)收敛

发散 有一个发散.

由定义, 收敛域为(b),(c)收敛域之交, 易知级数在圆环收敛

定理, 若 Laurent级数 $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛域为圆环 $D=\{z \mid r<|z-z_0|<\rho\}$

则级数在D的内闭一致收敛. 和函数在D中全纯.

定理. f在$D=\{r<|z-z_0|<R\}$上全纯. $0 \le r < R \le +\infty$

则 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ $r<\rho<R$

且展式唯一

pf. 右端由Cauchy定理知与ρ的选取无关

取 $r<\rho_1<|z-z_0|<\rho_2<R$. $\gamma_1: |z-z_0|=\rho_1$ $\gamma_2: |z-z_0|=\rho_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \qquad \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)-(z-z_0)} = \frac{-1}{z-z_0}\frac{1}{1-\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}d\zeta\,(z-z_0)^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

对于唯一性. 设 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n'(z-z_0)^n$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\sum_{-\infty}^{\infty} C_k'\frac{(\zeta-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} C_k'\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}(\zeta-z_0)^{k-n-1} = C_n'$$

□

例 $\frac{1}{1-z}$ $\quad 0<|z|<1 \quad |z|>1$

一开始只展开圆盘上的函数.
现在展开圆环上的函数

$0<|z|<1 \qquad f(z) = 1+z+z^2+\cdots$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z}-1\right)} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

例 $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在 $1<|z|<2$. $2<|z|<\infty$

$1<|z|<2$: $\quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)$

$$\frac{2}{1+z^2} = \frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{2}{z^2}\left(1-z^2+z^4-\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \quad * = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$2<|z|<\infty$: $\quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$

定义. 若 f 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上全纯, 在 z_0 处无定义, 则称 z_0 为 f 的孤立奇点.

例、 $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点 (确实没有定义, 实际情况也是可去奇点)

$z=0$ 不是 $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点. ($z_k = \frac{1}{k\pi}$ as $k\to\infty$)

此时 f 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上有展式，$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

称 $\sum_{0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 为全纯部分，$\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ 为主要部分。

定理. 若 z_0 是 f 的孤立奇点，则以下等价

① $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限

② $f(z)$ 在 z_0 的一个去心邻域有界

③ $f(z)$ 的 Laurent 展式中主要部分系数均为0。

满足上述条件之一称为可去奇点，补充定义后，f 在 z_0 全纯

Pf. ① ⇒ ② 显然

② ⇒ ③ $$|c_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi\right|$$

$$\le\frac{M}{2\pi}2\pi\rho\cdot\rho^{n-1}=M\rho^n\to 0$$

$$\Rightarrow c_{-n}=0$$

③ ⇒ ① 显然。 □

②的界可改为 $|f(z)|\le\frac{M}{|z-z_0|^\delta}$ $\delta\in[0,1)$ $0<|z-z_0|<\delta$

因为 $|c_{-n}|\le M\rho^{n-\delta}\to 0$

定理. 设 z_0 是 f 的孤立奇点. TFAE.

① $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

② 存在 $m\in\mathbb{N}$，$g(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 上全纯，恒不为0，使 $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$

③ $f(z)$ 的展式中只有有限多负幂次项不为0. 即

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+a_0+\cdots \qquad a_{-m}\neq 0$$

④ 存在 $m\in\mathbb{N}$，$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ 存在，且不为0.

⑤ 存在 $m\in\mathbb{N}$，$g=\frac{1}{f}$ 以 z_0 为 m 阶零点.

满足以上之一称为 m 阶极点.

Pf. ① ⇒ ② $$h=\begin{cases}\frac{1}{f} & 0<|z-z_0|<\delta\\ 0 & z=z_0\end{cases}\Rightarrow h=(z-z_0)^m\tilde{h}$$

$g=\frac{1}{\hat{h}} \Rightarrow g/(z-z_0)^m = 1/h = f$ on $0<|z-z_0|<\delta$

$z=z_0$时 g有定义 ($\hat{h}\neq 0$)

② ⇒ ③ 把g展开

③ ⇒ ④ $a_{-m}\neq 0$

④ ⇒ ⑤ $(z-z_0)^m f$ 有可去奇点.

全纯

$$(z-z_0)^m f = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{on } B$$ 可以控制为$\neq 0$.

$$\frac{1}{f} = \frac{(z-z_0)^m}{\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n}$$ m阶零点.

⑤ ⇒ ① 定义. □

定理. 设 z_0 为 f 的孤立奇点., TFAE.

① f 的展式中有无穷多负幂次项非0

② $\forall A\in\mathbb{C}$ 或 $A=\infty$. 在z_0的任何空心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 中 找到一列互异的 $z_n\to z_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$

③ 不存在有限或无限的极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

满足上述条件之一的称为f的本性奇点.

Pf. ② ⇒ ③显然

③ ⇒ ① ①不成立则为可去奇点或极点. 有极限.

① ⇒ ② 对于 $A=\infty$. 由于f在奇点附近无界, 则$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists z_n$ s.t. $|z_n-z|<\frac{1}{n}$

$|f(z_n)|>n$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$

对于 $A\in\mathbb{C}$. 令 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$, 若$\varphi(z)$在$z_0$附近有界

⇒ 适当选 $\varphi(z_0)$的值使φ为全纯函数. 若$\varphi(z_0)\neq 0$

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}+A$ 全纯 ↯

$\Rightarrow \varphi(z_0)=0 \Rightarrow$ z_0为f的极点. ↯. □

无穷远奇点 (指∞为孤立奇点的情况) f在$\{z:\ 0\le R<|z|<\infty\}$中全纯 则$\infty$为$f$的孤立奇点

此时记 $g(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$ 则g在$\{0<|\zeta|<\frac{1}{R}\}$中全纯, 即0为$g$的孤立奇点.

例. ∞不是 $\frac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点

∞是 $P_d(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d$ 的d阶极点.

定义、若f在$\mathbb{C}$上全纯,则称f为整函数,即f可表示为$f=\sum_0^\infty a_n z^n$,收敛半径为$R=+\infty$.

定理. f(z)为整函数.

(1) ∞ 可去奇点 $\Longleftrightarrow$ f 常数

(2) ∞ 极点 $\Longleftrightarrow$ f(z)为非零多项式

(3) ∞ 本性奇点 $\Longleftrightarrow$ $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ 中有无穷多个$a_n\neq 0$

Pf. (1) $\Leftarrow$ 显然

$\Rightarrow$ $f(\frac{1}{w})=\sum_0^\infty a_n(\frac{1}{w})^n$ 0 可去 $\Rightarrow$ $a_n=0$, $n\geq 1$

(2) $f(\frac{1}{w})$ 以 0 为极点 $\Longleftrightarrow f=\sum_{\text{finite}} a_n(\frac{1}{w})^n$

(3) 显然. □

推论. 有界整函数是常数

定义. 若 f 在 $\Omega\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ 上除极点外处处全纯, 则 f 在 Ω 上亚纯

其实没有提到什么亚纯函数的例子, 但是接下来的定理说明了部分

定理. 若f在$\overline{\mathbb{C}}$上亚纯, 则f为有理函数 $\left(\frac{P_m}{Q_n}\right)$

Pf. ① 只有有限个奇点. 不然, 不孤立.

② 设极点为 $z_1, \cdots z_k, \infty$

对应展开为
取出主要部分 $\psi_j(z)=\frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}+\cdots+\frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}$ $m_j\geq 1$

$\psi_\infty(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_m z^n$

$F=f-\sum_1^n\psi_j-\psi_\infty$ 全纯 on $\overline{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow$ F 为常数 (其实是0) $\Rightarrow f=\sum\psi_j+\psi_\infty$ 有理. □

定理. f 在$\overline{\mathbb{C}}$亚纯, 单射 $\Rightarrow$ f是分式线性变换

Pf. 设 $f=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$

若 $n>m \Rightarrow f(\infty)=\infty \overset{单}{\Rightarrow}$ $Q_m(z)$在 $\mathbb{C}$上无零点 $\Rightarrow$ Q_m为常数

$\Rightarrow$ f为多项式 $\Rightarrow$ f 至多一个零点. $\Rightarrow f=a(z-z_0)^n \Rightarrow$ $n=1$

$n<m$ $f(\infty)=0$ P_n 常数 $f=\frac{1}{Q_m}$ $\forall A.$ $Q_m=\frac{1}{A}$ 一根 $\Rightarrow \cdots$

$n=m$ $f(z)=0$ 一根 $f(z)=\frac{(z-z_0)^n}{Q_m}$ $f(z)=\infty$ 一根

$\Rightarrow f=\frac{(z-z_0)^n}{(z-z_1)^n}=c$ 一根 $\Rightarrow n=1$ □

例. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯 且 $f^{-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 全纯 $\Rightarrow f(z)=az+b$ $a\neq 0$.

利用上一定理. ∞ 可去 $\Rightarrow f\equiv c$ 没有 f^{-1}

∞ 本性 $\Rightarrow \forall A.$ $z_n\to\infty.$ $f(z_n)\to A$

$$\begin{tikzcd} z_n = f^{-1}(f(z_n)) \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}(A)\in\mathbb{C} \\ \infty. & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \infty$ 极点 $\Rightarrow f$ 亚纯 $\Rightarrow f=\frac{az+b}{cz+b} \Rightarrow c=0$ □

复级数 有实级数有的性质、并且由于 全纯远强于 可导/一般的光滑性 具有更多的性质

「Weierstrass Thm. $\{f_n\}$ is a seq. of holomorphic func on D

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ in cpt subset of D

then $f\in H(D)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ in cpt subset of D.」

这个定理是一个很特别的结果.

展开 <
- 圆盘 Taylor → 全纯函数被极限在D中的一列点控制
- 圆环 Laurent = Taylor + 主要部分 揭示孤立奇点附近的函数行为

↑ 处理孤立奇点. 性质好一些

$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ $z=0$ 就是非孤立奇点 sina $\frac{1}{k\pi}\to 0$

孤立奇点 {
- 可去奇点 → 无主要部分
- 极点 → 有限主要部分
- 本性奇点 → 无限主要部分

搭配 ∞ 这一天然的奇点 理解 整函数