Fourier Analysis 笔记

2024 年 8 月 9 日

目录

1 Fourier 级数的基本性质

1.1 Fourier 级数的形式

如果能将函数写成三角级数的形式, 其应该为如下的形式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

其中系数由如下公式确定

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}$$

更常见的为如下形式的 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

对应的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

计算知两形式等价.

注. 这里的计算是默认了级数的良好性质的粗略计算.

1.2 圆上的函数

称定义在 $\mathbb{R}$ 的周期为 2π 的函数和在长度为 2π 的区间上端点值相等的函数为圆上的函数. 此时函数通常以 θ 为自变量, 其第 n 个系数为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

由周期性, 可以知道这样形式的系数是良定义的, 即积分区间的选取是无影响的.

将级数的部分和记为如下形式

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{2\pi inx/L}$$

对于部分和, 问题是其是否逐点收敛, 是否一致收敛到原来的函数.

1.3 Fourier 系数的唯一性

定理 1.1. 设 f 是圆上的可积函数, 满足 $\hat{f}(n) = 0$, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$. 则 $f(\theta_0) = 0$ 对连续点 θ_0 成立.

由于这里没有对函数的 Fourier 收敛定理, 处理方式为反证法, 利用一族在原点处突起的函数反证.

证明. 不失一般性, 设 0 为连续点且 $f(0)>0$, 则存在 $0<\delta<\pi$, 当 $|\theta|<\delta$, $f(\theta)>\frac{f(0)}{2}$. 构造辅助函数 $p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta$, $\varepsilon>0$ 且充分小, 满足当 $\delta<|\theta|<\pi$, 有 $|p(\theta)|<1-\frac{\varepsilon}{2}$, 再取 $0<\eta<\delta$, 当 $|\theta|<\eta$, 有 $p(\theta)\geqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}$.

令 $p_k(\theta)=[p(\theta)]^k$. 由于 f 可积, 设 $|f(\theta)|\leqslant B$.

由于 $\hat{f}(n)=0$, 可知 $\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)p_k(\theta)d\theta=0$ 对任意 k 成立. 但是, 有如下计算结果

$$\left|\int_{\delta\leqslant|\theta|}f(\theta)p_k(\theta)d\theta\right|\leqslant 2\pi B(1-\frac{\varepsilon}{2})^k$$

$$\int_{\eta<|\theta|<\delta}f(\theta)p_k(\theta)\geqslant 0$$

$$\int_{|\theta|\leqslant\eta}f(\theta)p_k(\theta)\geqslant 2\eta\frac{f(0)}{2}(1+\frac{\varepsilon}{2})^k$$

当 $k\to\infty$ 导出了矛盾.

注意, 这里只对实值函数 f 得到了这个结论. 若对于 $f(\theta)=u(\theta)+iv(\theta)$, 记 $\bar{f}(\theta)=\overline{f(\theta)}$, 则

$$u(\theta)=\frac{f(\theta)+\bar{f}(\theta)}{2},\ v(\theta)=\frac{f(\theta)-\bar{f}(\theta)}{2i},$$

又因为

$$\hat{\bar{f}}(n)=\overline{\hat{f}(-n)},$$

可知结论仍然成立. □

推论 1.2. 若 f 在圆上连续, 且 $\hat{f}(n)=0$ 对 $\forall n\in\mathbb{Z}$ 成立, 则 $f=0$.

推论 1.3. 令 f 是圆上的连续函数, 且满足

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\right|<\infty,$$

则 $S_N(f)(\theta)$ 一致收敛到 f.

证明. 令 $g(\theta)=\lim_{N\to\infty}S_N(f)(\theta)$, 由 Weierstrass 定理知, $g(\theta)$ 在圆上一致收敛. 计算 $g(\theta)$ 的 Fourier 系数知 $g=f$. □

考虑 Fourier 级数收敛到原函数的条件, 可知收敛与光滑性有关.

推论 1.4. 设 f 是 C^2 函数, 则 $\hat{f}(n)=O(\frac{1}{|n^2|})$, 当 $n\to\infty$, 有 f 的 Fourier 级数绝对且一致地收敛到 f.

证明. 分部积分法得到等式

$$\widehat{f'}(n)=in\hat{f}(n),\quad \forall n\in\mathbb{Z}.$$

剩下的部分显然. □

定义 1.1. 称 f 满足 Hölder 条件, 若对于 $\alpha>\frac{1}{2}$, 满足

$$\sup_{\theta}|f(\theta+t)-f(\theta)|\leqslant A\,|t|^{\alpha}$$

对任意 t 成立.

C^k 和 Hölder 条件都可以用来刻画函数的光滑性.

1.4 卷积

首先通过 Dirichlet kernel 引入卷积的概念.

定义 1.2. 第 N 个 Dirichlet kernel 为

$$D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}.$$

有三角形式为

$$D_N(x)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

注意到 Fourier 级数的展开形式为

$$S_N(f)(x)=\sum_{n=-N}^{N}(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iny}dy)e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)(\sum_{n--N}^{N}e^{in(x-y)})dy.$$

定义 1.3. 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dy.$$

其中两函数是以 2π 为周期的可积函数.

定理 1.5. 对于可积的圆上函数 f,g 和 h, 有

(1) $f*(g+h)=f*g+f*h$;

(2) $(cf)*g=c(f*g)=f*(cg),\quad\forall c\in\mathbb{C}$;

(3) $f*g=g*f$;

(4) $(f*g)*h=f*(g*h)$;

(5) $f*g$连续;

(6) $\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

其中的证明对于函数均为连续函数时是容易的. 而对于可积函数, 则依赖于以下的逼近引理.

引理 1.6. 设 f 为圆上的可积函数, 且 $|f(\theta)|\leqslant B$. 则有圆上的连续函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足以下性质

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f_k(x)|\leqslant B,\quad\forall k\in\mathbb{N}_+,$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_k(x)|\,dx\to0,\ \text{当}\ k\to\infty.$$

引理的具体构造是阶梯函数的线性连接. 利用引理直接计算可以得到以上性质.

1.5 好核

定义 1.4. 称满足如下三条性质的为好核

(1) 对 $\forall n\geqslant1$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1.$$

(2) 存在 $M>0$, 使得对 $\forall n \geqslant 1$ 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\, dx \leqslant M.$$

(3) 对每个 $\delta > 0$, 有

$$\int_{\delta \leqslant |x| \pi} |K_n(x)|\, dx \to 0, \text{ 当 } n \to \infty.$$

好核就是加权分配是将质量集中在原点附近的权函数. 一族好核也被称为单位近似, 因为如下的定理.

定理 1.7. 令 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族好核, f 是圆上的可积函数, 则

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

在 f 的连续点处成立. 特别地, 若 f 在圆上连续, 则 $f * K_n$ 一致收敛到 f.

利用连续性和好核的性质直接计算即可得到, 一致收敛的结果在计算中利用连续函数在紧集上一致连续这一结果可以得到.

在上一小节中有 $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$ 这一结果. 但是遗憾的是 Dirichlet kernel 并不是一个好核, 因为其不满足第二条性质，这里用到了 Fresnel 积分.

1.6 广义求和

Fourier 级数不总能收敛到原来的函数, 哪怕连续函数都不一定成立, 但是改变求和的意义就可以有所帮助.

定义 1.5 (Cesàro 意义求和). 记部分和为 s_n, 则 Cesàro 求和为

$$\sigma_N = \frac{s_0 + \cdots + s_{N-1}}{N}.$$

利用 Cesàro 求和, Dirichlet kernel 也变成了好核.

引理 1.8. 记 $F_N = \frac{D_0(x)+\cdots D_{N-1}(x)}{N}$ 为 Fejér kernel, 则 Fejér kernel 是好核. 具体有

$$F_N = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

定理 1.9. 若 f 是圆上的可积函数, 则其 Fourier 级数在 Cesàro 意义下在 f 的连续点 θ_0 处收敛到 f, 即

$$\lim_{N\to\infty} (f * F_N)(\theta_0) = f(\theta_0).$$

特别地, 若 f 是圆上的连续函数, 则 f 的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一致收敛到 f, 即

$$\lim_{N\to\infty} (f * F_N)(\theta) \rightrightarrows f(\theta).$$

推论 1.10. 若 f 是圆上的可积函数, 且 $\hat{f}(n) = 0$ 对所有 n 成立, 则 $f = 0$ 在 f 的连续点处成立.

这里是因为 $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$, 则由 $F_N(f)(x) = 0$ 对任意 N 成立可知命题成立.

推论 1.11. 圆上的连续函数都可以被三角多项式一致逼近.

这是因为 Cesàro 求和是三角多项式.

定义 1.6 (Abel 意义求和). 称复级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ 是 Abel 意义可和于 s 的, 若对于每个 $0 \leqslant r < 1$, 有

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$$

收敛, 且有

$$\lim_{r\to 1} A(r) = s.$$

利用两次 Abel 公式计算可知, 若级数是 Cesàro 意义可和的, 其一定是 Abel 意义可和的, 且在不同的意义下收敛于同一个值. 但是正如 Cesàro 可和不一定常义可和, 级数 Abel 意义可和未必 Cesàro 意义可和.

对函数的 Fourier 级数的 Abel 意义求和对应如下公式

$$A_r(f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{in\theta}.$$

上述的级数在 r 的定义区间上是绝对收敛且一致收敛的, 其中一致收敛的证明用到了 Fourier 系数的一致有界性.

定义 1.7 (Poisson kernel). 这个核的定义是对于 r 的.

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

可以验证这个核是好核.

从而 f 的 Abel 意义求和写为如下公式

$$A_r(f)(\theta) = (f * P_r)(\theta).$$

利用好核定理可以得到与之前的 Cesàro 可和定理类似的结果.

现在用上述结果解决热稳定问题.

定理 1.12. 令 f 为单位圆上的可积函数. 由 Poisson kernel 定义了定义在单位圆盘上的函数如下

$$u(r,\theta) = (f * P_r)(\theta).$$

其具有如下性质:
(1) u 在单位圆盘上是 C^2 函数且满足 $\Delta u = 0$.
(2) 若 θ 是 f 的连续点, 则

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f(\theta).$$

若 f 在圆盘上处处连续, 则上述的极限是一致的.
(3) 若 f 连续, 则满足上述两条性质的热稳定问题的解是唯一的, 也就是 $u(r,\theta)$.

证明. 利用导函数列的一致收敛定理直接计算可以得到 (1), 其中要注意 $u(r,\theta)$ 的极坐标下公式如下

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

性质 (2) 是 Poisson kernel 的直接应用.
对于性质 (3), 证明需要一些技巧. 首先固定每一个 r, 考虑函数 $v(r,\theta)$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)e^{in\theta}.$$

类似于 Fourier 系数的计算, 将 $e^{-in\theta}$ 乘在等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

两边, 再同时积分. 左边的式子是一致连续的, 从而将积分和求导交换顺序即可. 式子的右边使用两次分部积分即可. 从而得到了等式

$$a_n''(r)+\frac{1}{r}a_n'(r)-\frac{n^2}{r^2}a_n(r)=0.$$

当 $n\neq 0$ 时, 解 ODE 可得 $a_n(r)$ 具有形式 $A_nr^n+B_nr^{-n}$. 由于系数是有界的, 故 $B_n=0$. 由于

$$a_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r,\theta)d\theta,$$

注意到 $\lim\limits_{r\to 1} v(r,\theta)\rightrightarrows f(\theta)$, 再令 $r\to 1$, 则常数 A_n 为

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

当 $n=0$ 时类似处理知 A_0 是常数. 从而由 Fourier 系数的唯一性知 $u=v$. □

1.7 不连续点的情况

对于不连续的中的跳跃情况, 也就是 $f(\theta^+)$, $f(\theta^-)$ 存在且不相等时, 有

$$\lim_{r\to 1} A_r(f)(\theta)=\frac{f(\theta^+)+f(\theta^-)}{2}.$$

这个公式的证明要利用 Poisson kernel 在左右对称区间的积分值均为 $\frac{1}{2}$. 用类似的方法也可以证明对 Fejér kernel 的卷积有类似的结果, Fejér kernel 的数值计算可以利用对 Dirichlet kernel 的 Cesàro 和计算.

2 Fourier 级数的收敛性

以下从两个角度考虑 Fourier 级数的收敛问题. 一个是从整体上考虑, 也就是平方平均收敛; 另一个是 Riemann 局部化定理, 级数在一点处的收敛情况仅取决于函数在该点的邻域上的行为, 然而级数本身却是由函数在整个圆上的取值决定的.

2.1 内积和内积空间

实内积空间和复内积空间空间的具体计算略去.

值得注意的是如下概念.

定义 2.1. 内积严格正定, 且范数 (度量) 完备的空间称为 Hilbert 空间, 两条性质若有不满足的, 则称为准 Hilbert 空间.

一个准 Hilbert 空间的例子是圆上的 Riemann 可积函数类, 也就是空间 $\mathcal{R}$.

这是因为范数为零的函数相差了一个零测集, 也就是不严格正定. 另一方面, 如考虑如下函数列

$$f_n(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta = 0; \\ \log(\frac{1}{\theta}) & \theta \in (\frac{1}{n}, 2\pi]. \end{cases}$$

其极限函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta = 0; \\ \log(\frac{1}{\theta}) & \theta \in (0, 2\pi]. \end{cases}$$

由这个例子可见这个函数类不是完备的.

还有一个关于 L^2 空间中 Cauchy Schwarz 不等式的非常规证明, 由均值不等式, 有

$$\left| f(\theta)\overline{g(\theta)} \right| \leqslant \frac{1}{2}(\lambda \left| f(\theta) \right|^2 + \lambda^{-1} \left| g(\theta) \right|^2).$$

两边同时积分, 由内积的定义

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta$$

得

$$|(f, g)| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\theta)| \, |\overline{g(\theta)}| d\theta \leqslant \frac{1}{2}(\lambda \|f\|^2 + \lambda^{-1} \|g\|^2).$$

此时令 $\lambda = \frac{||g||}{||f||}$ 即可.

2.2 平方平均收敛

重述 $\mathcal{R}$ 上的内积为

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\theta.$$

范数为

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ||f(\theta)||^2 d\theta$$

若记 $e_n(\theta)=e^{in\theta}$, 则族 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是规范正交的, 因为 $(e_n,e_m)=\delta_{nm}$. 从而有 $\hat{f}(n)=(f,e_n)$. 直接计算有如下结果

$$(f-\sum_{|n|\leqslant N}\hat{f}(n)e_n,\sum_{|n|\leqslant N}b_ne_n),\quad \forall b_n\in\mathbb{C}.$$

由勾股定理和 b_n 的任意性, 有

$$||f||^2=||f-\sum_{|n|\leqslant N}\hat{f}(n)e_n||^2+||\sum_{|n|\leqslant N}\hat{f}(n)e_n||^2.$$

由于

$$||\sum_{|n|\leqslant N}\hat{f}(n)e_n||^2=\sum_{|n|\leqslant N}|\hat{f}(n)|^2,$$

有如下计算结果

$$||f||^2=||f-S_N(f)||^2+\sum_{|n|\leqslant N}|\hat{f}(n)|^2.$$

归结为下述的引理.

引理 2.1 (最佳逼近). 若 f 为圆上的可积函数, 则有

$$||f-S_N(f)||^2\leqslant||f-\sum_{|n|\leqslant N}c_ne_n||^2.$$

其中等号成立当且仅当 $c_n=\hat{f}(n)$ 在求和范围内恒成立.

证明只要在之前的不等式中取 $b_n=\hat{f}(n)-c_n$ 即可.

这个命题是很直观的, 当考虑的函数是这个无穷维线性空间的元素时.

接下来证明平方平均收敛的结果, 也就是

定理 2.2. $||S_N(f)-f||\to 0$, 当 $N\to\infty$ 时.

证明. 若 f 为连续函数. 此时可以由 Cesàro 求和的推论知, 有三角多项式 $P(\theta)$ 可以一致逼近 f. 再利用最佳逼近可以得到想要的结论. 若 f 仅为 Riemann 可积函数, 则有连续函数 g 满足下述的性质

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]}|g(\theta)|\leqslant\sup_{\theta\in[0,2\pi]}|f(\theta)|=B$$

和

$$\int_0^{2\pi}|f(\theta)-g(\theta)|d\theta\leqslant\varepsilon^2.$$

从而有如下估计

$$\begin{aligned}||f-g||^2&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-g(\theta)|^2\,d\theta &(2.1)\\&\leqslant\frac{2B}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)-g(\theta)|\,d\theta &(2.2)\\&\leqslant C\varepsilon^2 &(2.3)\end{aligned}$$

利用三角不等式得到了所要的结果. □

在证明中可见一个等式.

推论 2.3 (Parseval 恒等式). $||f||^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$.

与上述恒等式相关的是下述推论.

推论 2.4 (Bessel 不等式). 对于一族规范正交函数 $\{e_n\}$, 记 $a_n = (f, e_n)$. 则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant ||f||^2.$$

等号成立当且仅当 $||\sum\limits_{|n|\leqslant N} a_n e_n - f||^2 \to 0,\ N \to \infty$ 成立.

在 Parseval 恒等式中可以看到 Fourier 系数在远端的衰减性, 从而有如下的 Riemann-Lebesgue 引理.

引理 2.5 (Riemann-Lebesgue). 设 f 为圆上的可积函数, 则 $\hat{f}(n) \to 0$, 当 $n \to \infty$. 写为如下形式

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta \to 0,\ n \to \infty,$$

由 Euler 公式亦有三角形式

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \to 0,\ n \to \infty$$

和

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \to 0,\ n \to \infty.$$

还有广义的 Parseval 恒等式.

引理 2.6. 设 f 和 g 为圆上的可积函数, Fourier 级数如下

$$f \sim \sum a_n e^{in\theta},\ g \sim \sum b_n e^{in\theta}.$$

则

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

证明. 需要的是 Hermite 内积空间上的极化恒等式.

$$(f, g) = \frac{1}{4}(||f+g||^2 - ||f-g||^2 + i||f+ig||^2 - i||f-ig||^2).$$

利用这个直接计算就可得到. □

注 . 本文考虑的函数基本都是 Riemann 可积函数类 $\mathcal{R}$, 之前的讨论中如 Parseval 恒等式可以考虑的对象其实能扩大到 L^2 函数空间上.

2.3 逐点收敛

之前提到 Fourier 级数的收敛依赖于函数的光滑性, 以下来具体化这一结论.

定理 2.7. 令 f 是圆上的可积函数, 且在 θ_0 处可微. 则有 $S_N(f)(\theta_0) \to f(\theta_0)$, 当 $N \to \infty$.

证明. 关键是如下的辅助函数.

$$F(t)=\begin{cases}\frac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{t} & t\neq 0,\\ -f'(\theta_0) & t=0.\end{cases}$$

注意到 f 的可积性和 θ_0 处的可微性, 可以知道上述的辅助函数是在圆上有界的, 自然也是可积的. 那么有

$$S_N(f)(\theta_0)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)tD_N(t)dt.$$

注意到 Dirichlet kernel 的三角形式, 由 Riemann-Lebesgue 引理知函数在该点处连续. □

事实上, 在这个证明中只要辅助函数的可积性就行了. 而这也只要函数 f 在该点处附近满足 $\alpha=1$ 的 Hölder 条件即可 (也称为 Lipschitz 条件).

同时, 上述的定理也反映出, Fourier 级数的收敛只取决于函数在这一点处附近的行为, 虽然级数是由函数在圆上的整体行为确定的.

推论 2.8. 设 f 和 g 是圆上的两个可积函数, 设 I 为开区间, $\theta_0\in I$, 且满足

$$f(\theta)=g(\theta),\quad \forall\theta\in I.$$

则 $S_N(f)(\theta_0)-S_N(g)(\theta_0)\to 0$, 当 $N\to\infty$.

证明是因为零函数在开区间上总是可微的.

2.4 Fourier 级数单点发散的连续函数

这样的反例当然是通过级数来构造.

有些 Fourier 级数的收敛是因为其交错性, 或者说, 级数在 $-\infty\sim -1$ 和级数在 $1\sim\infty$ 上的行为将级数的值拉平了.

考虑奇性延拓函数, 其在区间 $(0,\pi)$ 上为 $i(\pi-\theta)$. 其 Fourier 级数为

$$f(\theta)\sim\sum_{n\neq 0}\frac{e^{in\theta}}{n}.$$

这个 Fourier 级数由之前的结果可知是性质较好的.

但是考虑如下级数

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}.$$

如果这个级数是某个函数 $\tilde{f}$ 的 Fourier 级数, 则

$$|A_r(\tilde{f})(0)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}$$

在 $r\to 1$ 时发散. 但是有

$$|A_r(\tilde{f})(0)|=|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(t)P(-t)dt|\leqslant\sup_{\theta}|\tilde{f}(\theta)|.$$

这导出了矛盾.

也就是说, 通过破坏对称性, 可以构造出与 Fourier 级数相关的发散级数.

现在记

$$f(\theta)=\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}\frac{e^{in\theta}}{n}$$

和

$$\tilde{f}(\theta)=\sum_{-1\geqslant n\geqslant -N}\frac{e^{in\theta}}{n}.$$

考虑上述两函数的性质, 当 $N\geqslant 1$ 且 $\theta\in[-\pi,\pi]$ 时有

(1) $|\tilde{f}(0)|\geqslant c\ln N$.

(2) $f_N(\theta)$ 是关于 N 和 θ 一致有界的.

其中性质 (1) 是显然的, 性质 (2) 依赖于以下引理, 该有引理与 Tauber 定理的方法是类似的.

引理 2.9. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的 Abel 求和 $A_r=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nr^n$ 是在 $r\to 1$ 时有界的. 若 $c_n=O(\frac{1}{n})$, 则部分和 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}c_n$ 是有界的.

证明. 取 $r=1-\frac{1}{N}$, $n|c_n|\leqslant M$. 直接计算有如下结果

$$\begin{aligned}|S_N-A_r|&=\sum_{n=1}^{N}(c_n-c_nr^n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}c_nr^n\\&\leqslant M\sum_{n=1}^{N}(1-r)+\frac{M}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}r^n\\&\leqslant 2M.\end{aligned}$$

从而有 $|S_N|\leqslant 3M$. □

对级数

$$\sum_{n\neq 0}\frac{e^{in\theta}}{n}$$

使用引理, 则将之前提及的良好性质具体化了, 也就是说 $S_N(f)$ 是关于 N 和 θ 是一致有界的.

现在考虑破坏对称性. 记

$$P_N(\theta)=e^{i(2N)\theta}f_N(\theta),\ \tilde{P}_N(\theta)e^{i(2N)\theta}\tilde{f}(\theta).$$

此时得到了两个三角多项式. 若将其视为其余项为 0 的三角级数, 由于其指标均大于 0, 考虑部分和算子 S_M 为其前 M 项和. 立刻可见如下引理

引理 2.10.

$$S_M=\begin{cases}P_N & M\geqslant 3N,\\ \tilde{P_N} & M=2N,\\ 0 & M<N.\end{cases}$$

现在考虑正项级数 $\sum\alpha_k$ 和整数列 $\{N_k\}$ 满足如下性质

(1) $N_{k+1}>N_K$,

(2) $\alpha_k \ln N_k \to \infty,\ k \to \infty$.
此时令函数 f 为

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}(\theta).$$

由于 $|P_N(\theta)| = |f_N(\theta)|$, 由函数 $f_N(\theta)$ 的一致有界性, 则由于 Weierstrass 定理知函数 f 一致收敛, 从而函数连续. 最后利用级数的截断技术有

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \geqslant c\alpha_m \ln N_m + O(1) \to \infty,\ m \to \infty.$$

至此完成了构造.

2.5 Fourier 系数的应用

之前提到, Fourier 级数的收敛依赖于函数的光滑性, 而函数的光滑性与 Fourier 系数的衰减速度是分不开的. 因此对不同的函数, 对其 Fourier 系数的阶有估计.

定理 2.11. 若圆上的函数 f 在 C^k 函数类, 则 $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{|n|})$.

证明中的关键是 $\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n)$ 和 Riemann-Lebesgue 引理. 当然之前的分部积分估计也可以.

定理 2.12. 若圆上的函数 f 满足 α 阶 Hölder 条件, 则其 Fourier 系数满足 $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{|n|^\alpha})$. 且当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 函数的 Fourier 级数绝对且一致收敛.

这个定理的证明相对麻烦. 对于定理的前半部分, 需要对函数的 Fourier 系数进行改造, 凑出积分式中的函数做差形式, 比如如下形式

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{n})] e^{-inx} dx.$$

且这个结果已经达到了最优, 因为有如下函数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

其 Fourier 系数为 $\hat{f}(N) = \frac{1}{N^\alpha}$, 当 N 为 2 的幂次.

对于定理的后半部分, 其实只要研究其满足 Lipschitz 条件的情形, 推广是简单的. 其中用到了辅助函数 $g_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$, 计算 g_h 的范数可以得到 Fourier 系数的模平方求和. 对其做分段估计, 再结合 Cauchy-Schwarz 不等式就能得到结果. 其中出现的估计式如下

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin nh|^2 |\hat{f}(n)|^2 \leqslant K^2 h^2,$$

$$\sum_{2^{p-1} < |n| < 2^p} |\hat{f}|^2 \leqslant \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

定理 2.13. 若 f 为圆上的单调函数, 则 $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$.

证明之要注意到, 紧集上的单调函数是可积的, 可以用阶梯函数做逼近, 而单调且有限间断的阶梯函数的 Fourier 系数是 $O(\frac{1}{n})$ 的.

正如级数的收敛速度可以任意慢, 连续函数的 Fourier 系数的衰减速度也能任意慢. 对于任何收敛的正项数列 $\{\varepsilon_n\}$, 考虑子列 $\{\varepsilon_{n_k}\}$, 满足 $\varepsilon_{k_n} \leqslant 2^{-n}$. 则 $\sum \varepsilon_{n_k} < \infty$, 从而函数

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{k_n} e^{ik_n\theta}$$

连续, 但是其 Fourier 系数足够慢.

还有一个有趣的不等式.

定理 2.14. 设函数 f 是以 T 为周期的连续且分片 C^k 函数, 并有 $\int_0^T f(t)dt = 0$, 则

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

这个不等式的证明用到了 Parseval 恒等式, 取等条件在放缩中有直接体现.

3 Fourier 变换

3.1 函数空间

在 Fourier 变换中, 待处理的是如下的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)dx.$$

这个积分的存在性是不好直接说明的. 因此引进缓减函数类 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

定义 3.1. 称函数 f 为缓减函数, 若连续函数 f 满足, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 x, 有

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}.$$

其中 $\varepsilon = 1$ 的情况会比较有代表性, 甚至也可以直接作为缓减函数的定义, 容易知道缓减函数的无穷积分是存在的.

定理 3.1. 缓减函数有如下的性质.

(1) 线性性

$$\int_{-\infty}^{\infty}(af(x)+bg(x))dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$

(2) 平移不变性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

(3) 扩张时的缩放

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,\ \forall\delta > 0.$$

(4) 连续性

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-h)-f(x)|dx \to 0,\ h\to 0.$$

其中性质 (2)(4) 的证明是做差后做截断估计.

3.2 Fourier 变换

若函数 $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$, 则定义其 Fourier 变换如下

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

显然这是可积的. 且 $\hat{f}(\xi)$ 是有界且连续的, 甚至是远端趋于 0 的. 但是最初想处理的还有如下积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

而不知道此时的 $\hat{f}(\xi)$ 是否为缓减函数, 因此需要更好的条件.

定义 3.2. 称函数 f 是速降的, 若满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f(x)| < \infty,\quad \forall k\geqslant 0.$$

称函数 f 为 Schwartz 函数, 若光滑函数及其各阶导数均为速降函数, 也即

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| < \infty, \quad \forall k, l \geqslant 0.$$

记全体 Schwartz 函数组成的集合为 Schwartz 空间, 记号为 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

注 . $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 且有

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

也就是微分和多项式乘法封闭.

一个例子是 e^{-ax^2}, 其中 $a > 0$, 一个相似的非 Schwartz 空间函数是 $e^{-|x|}$, 因为其不可微.

3.3 $\mathcal{S}$ 上的 Fourier 变换

一个小问题是, 限制在 Schwartz 空间上后, $\hat{f}(\xi)$ 是否如之前希望的有缓减函数的性质. 记

$$f(x) \to \hat{f}(\xi)$$

表示 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换.

定理 3.2. 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则对 $h \in \mathbb{R}$ 和 $\delta > 0$ 有

(1) $f(x+h) \to \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$.

(2) $f(x)e^{-2\pi i x h} \to \hat{f}(\xi + h)$.

(3) $f(\delta x) \to \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$.

(4) $f'(x) \to 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$.

(5) $-2\pi i x f(x) \to \dfrac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$.

证明. 性质 (1)(2)(3)(4) 是简单的.
性质 (5) 涉及无穷区间上的积分求导交换次序. 先证明可微性.

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-2\pi i x} f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} \left[\frac{e^{-2\pi i x\xi} - 1}{h} + 2\pi i x\right] dx.$$

由于函数 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 是速降函数, 当 $|x| \geqslant N$ 时, 有 $\int_{|x|\geqslant N} |f(x)|dx \leqslant \varepsilon$ 和 $\int_{|x|\geqslant N} |xf(x)|dx \leqslant \varepsilon$. 而当 $|x| \leqslant N$ 时, 有 h_0 使得当 $|h| < h_0$ 时, 有

$$\left|\frac{e^{-2\pi i x h - 1}}{h} + 2\pi i x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{N}.$$

因此当 $|h| < h_0$ 时, 有

$$\left|\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} - 2\pi i x \hat{f}(x)\right| \leqslant \left(\int_{-N}^{N} + \int_{|x|\geqslant N}\right) * \leqslant C\varepsilon.$$

$\square$

接下来的结果揭示了引入 Schwartz 空间的意义.

定理 3.3. 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

证明. 这里要考虑的是下式

$$\xi^k \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \hat{f}\xi$$

对任意的 k, l 是有界的.

利用之前的性质, 有

$$\frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi ix)^l f(x)] \to \xi^k \left(\frac{d}{d\xi}\right)^l \hat{f}(\xi).$$

立刻知道 $\hat{f}(\xi)$ 是速降函数. □

注 . 从上面的证明可以注意到, 速降函数的定义更像是一种逐点定义, 在没有赋范的情况下, 也不是很好讨论这个空间的完备性.

在证明反演公式之前, 还要对高斯函数 e^{-ax^2} 进一步研究. 利用概率积分的技巧, 可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

再处理其 Fourier 变换.

定理 3.4. 若 $f(x) = e^{-\pi x^2}$, 则 $f(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

证明. 记 $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$, 则

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi ix) f(x) e^{-2\pi ix\xi} dx = i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi ix\xi} dx = i(2\pi i\xi)\hat{f}(\xi) = -2\pi\xi F(\xi).$$

由 $F(0) = 1$, 解 ODE 得 $F(\xi) = e^{-\pi x^2}$. □

利用之前的性质做换元有

推论 3.5. 对 $\delta > 0$ 和 $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$, 则有 $\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi x^2/\delta}$.

对于 $K_\delta(x)$, 有性质

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1.$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx = 1 \leqslant M.$

(3) 对任意 $\eta > 0$, 有 $\displaystyle\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx \to 0$, 当 $\delta \to 0$.

上述的性质是不难得到的, 从而有

定理 3.6. $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一族好核, 随着 $\delta \to 0$.

定义 Schwartz 空间上的卷积如下

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

对于固定的 x 函数 $f(t)g(x-t)$ 是速降函数, 类似之前的好核定理, 有

定理 3.7. 若函数 $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$(f * K_\delta)(x) \to f(x)$$

关于 x 是一致的, 当 $\delta \to 0$.

这是经典的做差分段估计, 不再赘述.

3.4 Fourier 反演

定理 3.8 (乘法公式). 若 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)g(y)dy.$$

证明. 这个定理涉及无穷区间上的交换次序, 但是只要将函数考虑成缓减函数

$$F(x,y)\leqslant \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

这个积分的交换次序是正确的, 从而速降函数的积分交换也正确. 其中可以令 $F(x,y)=f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}$. □

定理 3.9 (Fourier 反演公式). 若 $f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi.$$

证明. 首先考虑 $x=0$ 的情况. 设 $G_\delta(x)=e^{-\pi\delta x^2}$, 则 $\widehat{G_\delta}=K_\delta(\xi)$. 利用乘法公式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)dx.$$

左右同时令 $\delta\to 0$, 并利用一致性交换次序, 则有

$$f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi.$$

一般的, 考虑 $f(x+y)=g(y)$, 再做换元即可. □

至此, 可以得出 Fourier 变换是 Schwartz 空间上的双射的结论, 但这个结论并不是展开计算得到的, 展开计算得到名为 Fourier 积分定理的公式, 算是上述结论的推论.

3.5 Plancherel 公式

已经将 Fourier 级数推广为了 Fourier 变换, 接下的结果就是将 Parseval 恒等式推广为积分形式.

首先要铺垫以下关于 Schwartz 空间的函数性质.

定理 3.10. 若函数 $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

(1) $f*g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

.(2) $f*g=g*f$.

(3) $\widehat{(f*g)}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

证明. 其中相对麻烦的是性质 (1). 首先, 对任意 $l\geqslant 0$, 有如下不等式

$$\sup_x |x|^l|g(x-y)|\leqslant A_l(1+|y|)^l.$$

这个不等式的证明就是二项式定理的应用, 展开即可验证. 从而有

$$\sup_x |x^l(f*g)(x)| \leqslant A_l \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|(1+|y|)^l < \infty.$$

因此函数 $x^l(f*g)(x)$ 是有界的, 对任意 $l \geqslant 0$. 从而是可以让积分和求导交换次序的, 因此不难见到 $(f*g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

对于另外两条性质, 一个是换元法, 一个是交换积分次序, 都不算困难. □

定义 3.3. Schwartz 空间上配备 Hermitian 内积及其诱导范数如下

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

$$||f|| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

定理 3.11 (Plancherel 公式). 若函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则 $||\hat{f}|| = ||f||$.

证明. 若函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则定义 $f^\flat = \overline{f(-x)}$, $h = f * f^\flat$. 有

$$\hat{h}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2,\ h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = ||f||^2.$$

利用反演公式, 有

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)d\xi = ||\hat{f}||^2.$$

从而有 $||f|| = ||\hat{f}||$. □

事实上, 之前引入 Schwartz 空间是希望函数的 Fourier 变换仍然保留着与原来相近的性质. 对于缓减函数类 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, 若是在必要时限制函数的 Fourier 变换仍是缓减的, 那么也能将之前的结果推广出来.

通过与之前相似的计算, 有如下结果.

定理 3.12. 若函数 $f,g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, 则有如下性质

(1) $f*g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(2) $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy$.

(4) 在函数 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 还是缓减的情况下, 有$\displaystyle f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$, 和$||f|| = ||\hat{f}||$.

定理 3.13 (Weierstrass 逼近定理). 令 f 为紧集 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 P, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

也就是说 f 可以被多项式一致逼近.

证明. 首先对原来的函数做延拓, 使得有连续函数 g 定义在 $\mathbb{R}$ 上, 并满足有区间 $[a,b] \subseteq [-M,M] \subseteq \mathbb{R}$ 使得 g 在 $[-M,M]$ 外为零, 且 $g(x)=f(x)$, 当 $x\in[a,b]$, 以及 $|g| \leqslant B$. 此时利用好核 K_δ 就有足够小的 $\delta_0>0$, 使得

$$|g(x)-(g*K_{\delta_0})(x)|<\varepsilon/2, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

将指数函数用其 Taylor 多项式做逼近, 有多项式

$$R(x)=\delta_0^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-\pi x^2/\delta_0)}{n!}$$

使得对 $x\in[-2M,2M]$, 有

$$|K_{\delta_0}-R(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4MB},\ \forall x\in[-2M,2M].$$

此时对 $x\in[-M,M]$, 有

$$\begin{aligned}
|(g*K_{\delta_0})(x)-(g*R)(x)| &= \left|\int_{-M}^{M} g(t)[K_{\delta_0}(x-t)-R(x-t)]dt\right| \\
&\leqslant \int_{-M}^{M}|g(t)||K_{\delta_0}(x-t)-R(x-t)|dt \\
&\leqslant 2MB \sup_{z\in[-2M,2M]}|K_{\delta_0}(z)-R(z)| \\
&< \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

最后用三角不等式得到估计式

$$|f(x)-(g*R)(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b].$$

其中还要注意 $(g*R)(x)$ 二项式展开后显然是多项式. □

3.6 PDE 中的应用

已知 Fourier 能建立其微分和乘法的关系, 以下将这一事实应用到解 PDE 中.

首先考虑实直线上的时间依赖的热方程. 将 t 时刻 x 处的温度记为 $u(x,t)$. 初值定义为 $u(x,0)=f(x)$. 此时要解的是如下热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

对上式的变量 x 做 Fourier 变换, 得到如下式子

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t)=-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi,t).$$

固定变量 ξ, 解 ODE 得下式

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

代入 $t=0$, 得 $A(\xi)=\hat{f}(\xi)$, 从而有

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

做 Fourier 反演, 得下式

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y\xi} dy \right) e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{2\pi i x\xi} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2\xi^2 t} e^{-2\pi i (y-x)\xi} d\xi \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K_{4\pi t}(y-x) dy = (f * \mathcal{H}_t)(x).
\end{aligned}$$

注 . 上面的计算是在默认函数有较好性质时的计算, 最后用到了好函数积分时的交换次序, 同时利用了核 K_δ 的积分, 并定义了线热核 $\mathcal{H}_t(x) = K_{4\pi t}(x)$.

由于核 K_δ, 是好核, 不难得出以下结果.

定理 3.14. 给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 令

$$u(x,t) = (f * \mathcal{H}_t)(x),\ t > 0,$$

则有以下结果.

(1) u 是 C^2 的, 当 $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ 时, 且 u 时直线热方程的解.

(2) $u(x,t) \to f(x)$ 对于 x 是一致的, 当 $t \to 0$ 时.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y) - f(x)|^2 dx \to 0$, 当 $y \to 0$.

证明. 前两条的验证是容易的.

对于 (3), 对固定的 y, 由 Plancherel 公式, 有

$$||u - f||^2 = ||\hat{u} - \hat{f}||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2\xi^2 t} - 1|^2 d\xi.$$

此时做熟悉的分段估计知结论成立. □

之前提到 Schwartz 空间上的函数的有界不是一致的, 这里有个不同的结果.

定理 3.15. $u(*,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 对 t 是一致的, 也即对每个 $T > 0$, 有

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ 0<t<T}} |x|^k \left| \frac{\partial^l}{\partial x^l} u(x,t) \right| < \infty,\ \text{对每个}\ k, l > 0.$$

证明. 先证明对多项式的乘法成立.

$$\begin{aligned}
|u(x,t)| &= |\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \mathcal{H}_t(y) dy| \\
&\leqslant \left(\int_{|y|\leqslant|x|/2} + \int_{|y|\geqslant|x|/2} \right) |f(x-y)\mathcal{H}_t(y) dy| \\
&\leqslant \frac{C_N}{(1+|x|)^N} + \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-cx^2/t}.
\end{aligned}$$

这里的 N 的选取是任意的, 从而对乘法成立, 而对于求导, 利用封闭性做替换即可, 因此略去. □

事实上, 以上只讨论了 u 是热方程的解, 以及这个解的一些性质, 但是尚不知道这个解是否唯一, 这个解在一定的条件下其实是唯一的, 比如如下条件.

定理 3.16. 设 $u(x,t)$ 满足如下条件

(1) u 在 $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ 上连续.

(2) u 满足线热方程.

(3) u 满足边界条件 $u(x,0)=0$.

(4) $u(*,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 对 t 是一致的.

此时, $u=0$.

证明. 采用能量法解决该问题. 定义如下能量函数

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2dx.$$

显然有 $E(t)\geqslant 0$ 成立. 考虑能量对时间的导数. 由条件, 交换次序得

$$\frac{d}{dt}E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u\bar{u}+\partial_t\bar{u}u)dx.$$

利用热方程和分部积分得

$$\frac{d}{dt}E(t)=\int_{\mathbb{R}}(\partial_x^2u\bar{u}+u\partial_x^2\bar{u})dx=-\int_{\mathbb{R}}|\partial_x u|^2dx\leqslant 0.$$

由于 $E(0)=0$, 可知 $E(t)=0$, 由连续性即得 $u(x,t)=0$. □

对于唯一性, 有更弱的条件, 也有条件不足从而不唯一的例子.

接下来讨论上半圆盘的稳态热方程, 也就是 $\mathbb{R}^2_+$ 上的如下方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

其中边界条件为 $u(x,0)=f(x)$. 仿照线热方程中的处理, 固定变量 y 做 Fourier 变换, 利用 Fourier 变换的性质得到如下 ODE

$$-4\pi\xi^2\hat{u}(\xi,y)+\frac{\partial\hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y)=0.$$

解该方程得

$$\hat{u}(\xi,y)=A(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}+B(\xi)e^{2\pi|\xi|y}.$$

考虑其中较好得解, 把后一项丢掉, 从而只考虑以下解

$$\hat{u}(\xi,y)=\hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}.$$

做 Fourier 反演得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi ix\xi}d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi it\xi}dt\right)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi ix\xi}d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi|\xi|y}e^{-2\pi i(t-x)\xi}d\xi\right)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\left(\frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+(t-x)^2}\right)dt=(f*\mathcal{P}_y)(x).\end{aligned}$$

注 . 上述的计算仍然是在默认函数性质良好时进行的, 其中定义了一个核, 称为上半平面的 Poisson 核. 其具体为

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2},\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

对于其核积分有如下恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i x\xi} d\xi = \mathcal{P}_y(x),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = e^{-2\pi|\xi|y}.$$

由上面的计算知半平面的热稳方程离不开对 Poisson 核的研究.

定理 3.17. Poisson 核是好核, 当 $y \to 0$.

证明. 对上述的第二个恒等式取 $\xi = 0$ 即知 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x)dx = 1,\ \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{P}_y(x)|dx = 1$.

对于给定的 $\delta > 0$, 则有

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2} = \frac{1}{\pi} arctan(\frac{x}{y})\Big|_{\delta}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctan(\frac{\delta}{y}).$$

由于 δ 是给定的, 从而积分 $\int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2} \to 0$, 当 $y \to 0$. 最后由 Poisson 核是偶的得证. □

现在总结以上的讨论.

定理 3.18. 给定 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 令 $u(x,y) = (f * \mathcal{P}_y)(x)$. 则

(1) $u(x,y)$ 是 C^2 的, 在 $\mathbb{R}^2_+$ 上, 并且 $\Delta u = 0$.

(2) $u(x,y) \to f(x)$ 是一致的, 当 $y \to 0$ 时.

(3) $||u - f|| \to 0$, 当 $y \to 0$.

(4) 若 $u(x,0) = f(x)$, 则 u 是 $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ 上的连续函数, 并且有

$$u(x,y) \to 0,\ 当\ |x| + y \to \infty.$$

证明. 定理的前三条证明与线热方程是完全类似的.

(4) 的证明相对不同. 一个想法是分别估计出两个上界, 分别被无穷远的 x 或 y 化零. $(f * \mathcal{P}_y)(x)$ 的主要部分是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{y}{y^2+t^2}dt.$$

函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 由 $\mathcal{P}_y(x) \leqslant c/y$, 从而有 $(f * \mathcal{P}_y)(x) \leqslant C/y$.

要估计一个关于 x 的界, 这时就要对根据 x 对 y 进行分段. 具体为, 当 $|t| < |x|/2$ 时, 由 $f(x-t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有

$$f(x-t) \leqslant \frac{c}{1+(x-t)^2} \leqslant \frac{c}{1+x^2/4} = O(\frac{1}{1+x^2}).$$

当 $|t| \geqslant |x|/2$ 时, 有

$$\mathcal{P}_y(t) \leqslant \frac{y}{y^2+x^2/4} = O(\frac{y}{y^2+x^2}).$$

利用两部分的有界性即可得到上界

$$|(f * \mathcal{P}_y)(x)| \leqslant C\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{y}{y^2+x^2}\right).$$

□

为了半平面的稳热方程的唯一性问题, 首先要考虑调和函数的平均值定理.

定理 3.19 (平均值定理). 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集, u 是 C^2 函数且在 Ω 上有 $\Delta u = 0$. 若有 Ω 中以点 (x, y) 为中心, 以 R 为半径的闭圆盘, 则有

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)d\theta$$

对任意 $0 \leqslant r \leqslant R$ 成立.

证明. 定义 $U(r,\theta) = u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)$. 利用极坐标换元得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0.$$

也即

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

若定义 $F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r,\theta)d\theta$, 则对上式的 θ 积分得,

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(r,\theta)d\theta.$$

由于右端的周期性, 有 $r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0$, 利用连续性可以看到 F 是常数, 从而定理得证. □

至此, 叙述唯一性定理如下.

定理 3.20. 设 u 是 $\overline{R_+^2}$ 上的连续函数, 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上满足 $\Delta u = 0$, 且 $u(x,0) = 0$, 且 $u(x,y)$ 在无穷远处为零, 则 $u = 0$.

证明. 使用反证法. 设上半平面的内点 (x_0, y_0) 使得 $u(x_0, y_0) > 0$. 此时可以找到充分大的闭半圆盘 $D_R^+ = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant R,\ y \geqslant 0\}$, 使得对 $\forall (x,y) \notin D_R^+$, $u(x,y) \leqslant \frac{1}{2}u(x_0,y_0)$. 上半圆盘 D_R^+ 是紧的, 从而有 $(x_1, y_1) \in D_R^+$, 满足其为该紧集上的最大值点, 其中 $u(x_1, y_1) = M$.

由于平均值原理和连续性知, 此时函数在边界处非零, 矛盾. □

3.7 Poisson 求和公式

以上讨论的 Fourier 变换是希望得到 Fourier 级数的连续版本, 并将其应用到实直线的函数上. 接下来将揭示圆上函数和直线上的函数的联系.

首先给定一个 Schwartz 空间上的函数 f, 定义如下函数

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

利用缓减函数的放缩即可知其在 $\mathbb{R}$ 的任意紧子集上绝对且一致收敛, 因此 $F_1(x)$ 连续. 不难看出 1 是其周期, 因此 F_1 被称为 f 的周期化.

将 f 周期化还有一种方式, 对照 Fourier 反演公式, 将积分改为求和得

$$F_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi i n x}.$$

F_2 也是连续的, 且周期为 1. 有趣的是两种方式得到的函数是一样的.

定理 3.21 (Poisson 求和公式). 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

特别的, 当 $x=0$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

证明. 对于连续函数, 可以通过计算其 Fourier 系数来证明其函数相同. 逐项积分计算如下

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{2\pi i m x} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \hat{f}(m).
\end{aligned}$$

□

注 . 在证明中只要求其能逐项积分, 这对缓减函数也是成立的, 证明完全一样.

3.8 Theta 和 zeta 函数

定义 *theta* 函数 $\vartheta(s)$ 在 $s>0$ 时为

$$\vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}.$$

这个定义保证了其收敛性.

注 . 这个函数一般是定义在格 (lattice) 上的, 这里的讨论有了较多的限制. 这个函数在历史上与不少经典的数论问题有关, 后来与更现代的问题也有关.

定理 3.22. $s^{-1/2}\vartheta(1/s) = \vartheta(s)$, 当 $s>0$.

证明. 利用 Poisson 公式计算如下

$$\begin{aligned}
RHS = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} &= s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} e^{-2\pi i n x} dx \\
&= s^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/s} \\
&= s^{-1/2}\vartheta(1/s) = LHS.
\end{aligned}$$

□

定义 *zeta* 函数 $\zeta(s)$ 在 $s>1$ 时为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

定义广义的 $Theta$ 函数 $\Theta(z|\tau)$ 在 $\text{Im}(\tau) > 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$ 时为

$$\Theta(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2\pi i n z}.$$

从而有 $\vartheta(s) = \Theta(0|is)$.

3.9 热核和 Poisson 核

现在考虑圆上的热方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

其满足边界条件 $u(x, 0) = f(x)$, 其中 f 以 1 为周期.

利用特殊的假设 (变量无关), 给出上述方程的一个解如下

$$u(x, t) = (f * H_t)(x).$$

其中卷积是定义在长度为 1 的区间上的, $H_t(x)$ 称为圆上的热核, 具体写为

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t}.$$

利用之前的广义 $Theta$ 函数, 上述的圆热核可以写为 $H_t(x) = \Theta(x|4\pi i t)$.

回忆之前的线热核

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t},\ \hat{\mathcal{H}}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t}.$$

定理 3.23. 圆热核是线热核的周期化, 即

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x+n).$$

证明. 由 Poisson 求和公式直接得到. □

推论 3.24. 圆热核 $H_t(x)$ 是好核, 当 $t \to 0$.

证明. 首先有 $\int_{|x|\leqslant 1/2} H_t(x)dx = 1$, 又线热核满足 $\mathcal{H}_t(x) > 0$, 因此有 $\int_{|x|\leqslant 1/2} |\mathcal{H}_t(x)|dx = 1 < \infty$.

现在在 $|x| \leqslant 1/2$ 时记

$$H_t(x) = \mathcal{H}_t(x) + \mathcal{E}_t(x),$$

即为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{|n|\geqslant 1} e^{-(x+n)^2/4t} \\ &\leqslant \frac{C}{\sqrt{t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn^2/t} \\ &\leqslant \frac{C}{\sqrt{t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{c_1/t + c_2 n^2} \\ &\leqslant \frac{C'}{\sqrt{t}} e^{c_1/t}.\end{aligned}$$

从而 $\int_{|x|\leqslant 1/2} \mathcal{E}_t(x)dx \to 0$, 当 $t \to 0$. 又因为线热核是好核, 从而圆热核是好核. □

之前讨论过 Poisson 核和半平面的 Poisson 核

$$P_r(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\theta}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2},\ \mathcal{P}_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

由于

$$\hat{\mathcal{P}}_y(\xi)=e^{-2\pi|\xi|y},$$

当 $r=e^{-2\pi y}$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{P}_y(x+n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi|n|y}e^{2\pi inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(2\pi x)}=P_r(2\pi x).$$

3.10 Heisenberg 不确定性原理

以下考虑最简单的版本.

定理 3.25. 设 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 满足正规化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$. 则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right)\geqslant\frac{1}{16\pi^2}.$$

证明. 计算如下

$$\begin{aligned}1=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx&=-2\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)}+x\psi(x)\overline{\psi'(x)}\right)dx\\&\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}|x||\psi(x)||\psi'(x)|dx\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\psi'(x)|^2dx\right)^{1/2}\\&\leqslant 2||\psi'||\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\\&=2||\hat{\psi}'||\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\\&=2\left(4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\\&=4\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\psi(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\hat{\psi}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

其中的积分式具有概率意义, 因此也与量子力学相关, 具体意义笔者不知.

3.11 习题中的补充内容

以下简单列举一些习题中的结论.

(1) 当 f 是连续紧支函数, 且 f 和 $\hat{f}$ 均为缓减函数时, 可以通过 Riemann 和, 分三段进行积分估计, 从而得到 Fourier 反演公式.

(2) 特征函数 $f(x)=\chi_{[-1,1]}=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 和函数 $g(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 的 Fourier 变换如下

$$\hat{f}(\xi)=\frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi},\ \hat{g}(\xi)=\left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

(3) 若函数 f 为缓减函数, 其 Fourier 变换的衰减性能反映函数的光滑性, 若 $\hat{f}$ 是连续的. 具体的, 当 $\alpha \in (0,1)$ 时, 若有

$$\hat{f} = O(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}),\ \xi \to \infty,$$

则有 $M > 0$ 使得

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|^\alpha.$$

(4) 鼓包函数 (bump function) 可以用于光滑连接, 其函数表达式为

$$f(x) = e^{-1/(x-a)}e^{-1/(b-x)}.$$

(5) 积分估算的核心之一是分段处理, 本书在处理卷积的常用手段是, 对固定的 x, 考虑 $|y|$ 和 $|x|/2$ 的关系.

(6) 若记 Fourier 变换为算子 $\mathcal{F}$, 则有 $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{I}$, 有 $\mathcal{F}^4 = \mathcal{I}$. 因此缓减函数中的, 能满足 $\hat{f}$ 仍是缓减函数的那些函数, 处理起来会有很多好的性质, 至少继承了 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的很多结论.

(7) 直线上的 Fejér 核定义为

$$\mathcal{F}_R(t) = \begin{cases} R\left(\frac{\sin \pi t R}{\pi t R}\right)^2 & t \neq 0, \\ R & t = 0. \end{cases}$$

其为好核, 且 Cesàro 和中的 Fejér 核实际上有

$$F_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_N(x+n).$$

(8) 直线上的 Dirichlet 核定义为

$$\mathcal{D}_R(x) = \widehat{\chi_{[-R,R]}}(x) = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x},$$

那么就有

$$\int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi = (f * \chi_{[-R,R]})(x).$$

这里的定义顺序和书上相反. 类似的, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_N(x+n) = D_N^*(x) = D_{N-1}(x) + \frac{1}{2}(e^{-2\pi i N x} + e^{2\pi i N x}).$$

(9) 缓减函数 f 的 Fourier 变换若是紧支的, 则由 f 在 $\mathbb{Z}$ 上的取值就能确定 f, 仔细考虑 Poisson 公式的证明, 可以知道其条件可以适当放松, 因此可以推得

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)K(x-n),\ K(y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y}.$$

推广 Poisson 公式为如下形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + \frac{n}{\lambda}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda n)e^{2\pi i n\lambda x}.$$

能推得下式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{n}{\lambda}\right) K_\lambda\left(x - \frac{n}{\lambda}\right),\ K_\lambda(y) = \frac{\cos \pi y - \cos \pi\lambda y}{\pi^2(\lambda-1)y^2}.$$

(10) 一个经典结论, 连续函数 f 和其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 不能同时是紧支的, 除非均为零. 这个结论被视为与不确定性原理类似的, 毕竟紧支这一条件和集中分布是类似的. 这个结论用到了之前证明过的 Lipschitz 函数的 Fourier 级数收敛.

4 $\mathbb{R}^d$ 上的 Fourier 变换

4.1 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^d$ 的推广

首先明确一些记号如下.

记号 x 指代 d 元数组 $(x_1, \cdots, x_d)$. 定义范数 $|x|$ 如下

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

给定一个非负整数的 d 元数组 (或是称为多重指标) $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$, 则单项式 x^α 定义为

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

微分算子 $(\partial/\partial x)^\alpha$ 定义为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

其中 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

定义 4.1. 称定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的连续复值函数 f 为速降函数, 若其对每个指标 α 满足函数 $|x^\alpha f(x)$ 是有界的, 也即

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha||f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^d_{\geqslant 0}.$$

注 . 等价的定义是如下式子

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k |f(x)| < \infty, \quad \forall k = 0, 1, \cdots.$$

对上述定义的速降函数可以类似定义 (用 Cauchy 列) 其反常积分 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$, 这里不再赘述. 事实上, 若只要求函数反常可积, 只需要推广之前对缓减函数的定义如下

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^{d+\varepsilon} |f(x)| < \infty.$$

类似的, 取 $\varepsilon = 1$ 也是合适的.

接下来定义高维的 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 其包含的函数 f 为满足如下性质的光滑函数

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta.$$

从定义上看, Schwartz 函数就是各阶导数均为速降函数的光滑函数.

Schwartz 函数的 Fourier 变换定义如下

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

完全类似的, Fourier 变换具有如下的性质.

定理 4.1. 令函数 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 则

(1) $f(x+h)\to\hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\cdot\xi},\quad\forall h\in\mathbb{R}^d$.

(2) $f(x)e^{-2\pi ix\cdot h}\to\hat{f}(\xi+h),\quad\forall h\in\mathbb{R}^d$.

(3) $f(\delta x)\to\delta^{-d}\hat{f}(\delta^{-1}\xi),\quad\forall\delta>0$.

(4) $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}f(x)\to(2\pi i\xi)^{\alpha}\hat{f}(\xi)$.

(5) $(-2\pi ix)^{\alpha}f(x)\to\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\hat{f}(\xi)$.

(6) $f(Rx)\to\hat{f}(Rx)$, 其中 R 为旋转 (也就是正交矩阵).

这些性质的计算是直接的, 其中的关键是一些分量计算, 以及最后的换元. 利用性质 (4) 和性质 (5) 立刻看出下面的推论.

推论 4.2. Fourier 变换将 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 映射到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

称一个函数 f 是径向的, 若函数取值仅依赖于 $|x|$, 也就是说, 存在函数 $f_0(u)$ 定义在 $u\geqslant 0$ 上, 使得 $f(x)=f_0(|x|)$. 可以注意到, 函数是径向的当且仅当 $f(Rx)=f(x)$ 对任意旋转变换 R 成立.

现在对 $\mathcal{S}$ 上的函数说明 Fourier 反演公式和 Plancherel 公式.

定理 4.3. 设函数 $f\in\mathcal{S}$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi.$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx.$$

证明. (1) 推广高斯函数 $e^{-\pi x^2}$ 为 $e^{-\pi|x|^2}$. 直接计算如下

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx&=\int_{\mathbb{R}^{d-1}}e^{-\pi|x'|^2}e^{-2\pi ix'\cdot\xi'}dx'\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x_1^2}e^{-2\pi ix_1\xi_1}dx_1\right)\\&=e^{-\pi\xi_1^2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}e^{-\pi|x'|^2}e^{-2\pi ix'\cdot\xi'}dx'\\&=e^{-\pi(\xi_1^2+\cdots\xi_d^2)}=e^{-\pi|\xi|^2}.\end{aligned}$$

(2) 计算高斯函数的换元形式, 并构造好核. 设 $\delta>0$, 直接计算如下

$$\begin{aligned}\widehat{e^{-\pi\delta|x|^2}}(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi\delta|x|^2}e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx\\&=\delta^{-d/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|\delta^{1/2}x|^2}e^{-2\pi i(\delta^{1/2}x)\cdot(\delta^{-1/2}\xi)}d(\delta^{1/2}x)\right)\\&=\delta^{-d/2}e^{-\pi|\xi|^2/\delta}.\end{aligned}$$

定义 $K_\delta(x)=\delta^{-d/2}e^{-\pi|\xi|^2/\delta}$. 直接计算得到下述式子.

(1) $\int_{\mathbb{R}^d}\delta^{-d/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}dx=1$,

(2) $\int_{\mathbb{R}^d}|\delta^{-d/2}e^{-\pi|x|^2/\delta}|dx=1$,

(3) $\int_{|x|\geqslant\eta}|K_\delta(x)|dx=\int_{|x|\geqslant\eta/\delta}e^{-\pi|x|^2}dx\leqslant\max\limits_{i\in\{1,\cdots,d\}}\left(\int_{x_i\geqslant\eta/\delta}e^{-\pi x_i^2}dx_i\right)\to 0,\ \delta\to 0$.

从而 $K_\delta(x)$ 是一族好核, 因此有

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)F(x)dx \to F(0),\ \delta \to 0,$$

这是因为 $F(x)$ 是 Schwartz 函数.

(3) 接下来在 $f, g \in \mathcal{S}$ 时引入乘法公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

只要考虑函数 $f(x)g(y)e^{-2\pi ix\cdot y}$ 在 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的积分即可.

(4) 现在推导 Fourier 反演公式, 利用之前的好核直接计算如下

$$f(0) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)K_\delta(-x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta|\xi|^2}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)d\xi.$$

再令函数 $F(y) = f(x+y)$, 则

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi.$$

(5) 最后推导 Plancherel 公式. 记 $f^\flat = \overline{f(-x)}$. 定义 $\mathcal{S}$ 上的卷积为

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

计算得 $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ 和 $f*g = g*f$. 令 $h = f*f^\flat$, 注意到 $\hat{f^\flat} = \bar{\hat{f}}$, 就有 $\hat{h} = |\hat{f}|^2$, 从而有

$$||f||^2 = (f*f^\flat)(0) = h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(\xi)d\xi = ||\hat{f}||^2.$$

□

4.2 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ 上的波动方程

波动方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

定义 d 维的 Laplace 算子为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

简化方程为

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

对于如下初始条件

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

其中 $f, g \in \mathcal{S}$, 这称为波动方程的 Cauchy 问题.

用之前的方式, 逐项将求导变成乘法, 得到下面的式子

$$-4\pi|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}(\xi,t).$$

解 ODE 得

$$\hat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t).$$

代入初值得

$$\hat{u} = \hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}.$$

定理 4.4. 波动方程的 Cauchy 问题的一个解是

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d}\left[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right]e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi.$$

证明. 直接交换次序求导并验证边值即可. □

对于唯一性, 其实并不是很好说明, 但是可以先部分的考虑这个问题.

定理 4.5. 若定义能量函数如下

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2+\cdots+\left|\frac{\partial u}{\partial x_d}\right|^2\right)dx.$$

那么之前讨论的解是能量守恒的, 也就是 $E(t)=E(0)$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 成立.

证明. 直接暴力计算得

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx=\int_{\mathbb{R}^d}\left|-2\pi|\xi|\hat{f}(\xi)\sin(2\pi|\xi|t)+\hat{g}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)\right|^2d\xi.$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2=\int_{\mathbb{R}^d}\left|2\pi|\xi|\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+\hat{g}(\xi)\sin(2\pi|\xi|t)\right|^2d\xi.$$

利用勾股定理有

$$E(t)=\int_{\mathbb{R}^d}(4\pi^2|\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2+|\hat{g}(\xi)|^2)d\xi=E(0).$$

□

现在考虑解的具体形式, 这是因为在一维时有 d'Alembert 公式

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy\\&=\frac{\partial}{\partial t}(t\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}f(y)dy)+t\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy.\end{aligned}$$

这个解可以解释为两个部分, 且具有某种形式上的统一性.

4.3 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 的波动方程

球面的边界均值定义如下

$$M_t(f)(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}f(x-t\gamma)d\sigma(\gamma),$$

其中 S^2 为单位球面, 上面实际是以 x 点为球心, 以 t 为半径的球面均值. 利用几何直观可以想象,$M_t(f)(x)$ 的衰减速度很快.

引理 4.6. 若 $f\in\mathcal{S}$ 且 t 固定, 则 $M_t(f)(x)\in\mathcal{S}$. 进一步, $M_t(f)$ 对 t 是任意可微的, 且各阶导数也是 $\mathcal{S}$ 的.

证明. 令 $F(x)=M_t(f)(x)$, 先验证其为速降函数. 计算如下

$$|f(x-t\gamma)|\leqslant\begin{cases}\frac{A_N}{1+x^2/4} & |t\gamma|\leqslant|x|/2;\\ \frac{A_N}{1+(3/2)^N x^N} & |t\gamma|\geqslant|x|/2.\end{cases}$$

由于这里的 N 是任取的, 立刻有 $M_t(f)$ 是速降的. 现在还要说明可微性, 希望有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}F(x)=M_t(f^{(\alpha)})(x).$$

按照定义对分量计算

$$\frac{F(x_1+h,x_2,x_3)-F(x_1,x_2,x_3)}{h}=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\frac{f(x_1+e_1h-t\gamma)-f(x_1+e_1h-t\gamma)}{h}d\sigma(\gamma).$$

注意到一致性, 可以交换次序, 再利用封闭性, 得到想要的结论. □

为了接下来的一个计算, 还要以下结果.

引理 4.7. $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{S^2}e^{-2\pi i\xi\cdot\gamma}\,d\sigma(\gamma)=\frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$.

证明. 注意到左端是径向的, 极坐标换元并选取简单的方向

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}e^{-2\pi iR(\xi)\cdot\gamma}d\sigma(\gamma)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-2\pi i|\xi|\cos\theta}\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$$

□

至此, 可以计算 $\widehat{M_t(f)}(\xi)$. 在形式上, $M_t(f)$ 可视作 f 和面元 $d\sigma$ 的卷积. 计算如下

$$\begin{aligned}\widehat{M_t(f)}(\xi)&=\int_{\mathbb{R}^3}e^{-2\pi ix\cdot\xi}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}f(x-t\gamma)d\sigma(\gamma)\right)dx\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}e^{-2\pi i(t\xi)\cdot\gamma}d\sigma(\gamma)\left(\int_{\mathbb{R}^3}f(x-t\gamma)^{-2\pi i(x-t\gamma)\cdot\xi}dx\right)\\&=\hat{f}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}.\end{aligned}$$

现在可以处理 $d=3$ 的波动方程 Cauchy 问题.

定理 4.8. 方程的解由以下公式给出

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(tM_t(f)(x))+tM_t(g)(x).$$

证明. 已知解为

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\left[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+\hat{g}\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi\xi}\right]e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi.$$

那么

$$\begin{aligned}u_1(x,t)&=\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi\int_0^t\cos(2\pi|\xi|y)dy\right)\\&\frac{\partial}{\partial t}(tM_t(f))(x).\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}u_2(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi\\ &= t\int_{\mathbb{R}^3}\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi\\ &= tM_t(g)(x).\end{aligned}$$

从而 $u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(tM_t(f)(x))+tM_t(g)(x)$. □

注. 书上有一段关于 Huygens 原理的介绍, 几何直观上与物理中的确实是类似的.

4.4 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ 的波动方程

想法是通过降维的方法来处理. 但是若是通过令 $\tilde{f}(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2)$ 的方式, 也就是让一个变量为常数的降维方式, 得到的就不是 Schwartz 函数, 因此这样做是不行的. 考虑用紧集列逼近的方式, 令 $\tilde{f}(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2)\eta(x_3)$, 其中函数 $\eta(x_3)$ 在紧集上为常值 1, 而在紧集外光滑速降, 这样就可以在紧集上得到方程的解, 进而扩张到全平面上.

以下做之前声明的紧集上的计算

$$\begin{aligned}M_t(\tilde{f})(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\tilde{f}(x-t\gamma)d\sigma(\gamma)\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x_1-r\sin\theta\cos\varphi,x_2-t\sin\theta\sin\varphi,x_3-\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi.\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x_1-r\sin\theta\cos\varphi,x_2-t\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi.\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leqslant 1}f(x-ty)\frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}dy.\end{aligned}$$

上面的 y 是二维的, 也就是说最后是球内的二重积分. 因此定义 $\widetilde{M_t}(f)(x)$ 如下

$$\widetilde{M_t}(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{|y|\leqslant 1}f(x-ty)\frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}dy.$$

那么按照所期望的, 解的形式为

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(t\widetilde{M_t}(f)(x))+t\widetilde{M_t}(g)(x).$$

注. (1) 事实上, 可以反过来验证这个解是之前那个解的等价形式, 但是验证也要先将二维函数扩充为三维函数 (与思路中一致).

(2) 可以看到, 解与 M_t 和 $\widetilde{M_t}$ 的值是完全对应的. 那么就注意到, 一维和三维的解只与边界 (球面) 上的取值有关, 而二维时的解却与整个区域 (球) 上的取值有关. 参考现实中的光的传播和水波, 发现这些现象在整体上和解是吻合的.

4.5 径向对称和 Bessel 函数

径向函数的 Fourier 变换也是径向的, 那么记 $f(x)=f_0(|x|)$ 和 $\hat{f}(\xi)=F_0(|\xi|)$, 并考虑两者的关系.

当 $d=1$, 则

$$\begin{aligned} F_0(\rho) = \hat{f}(\rho) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x|\xi|} dx \\ &= 2\int_0^\infty f_0(r)\cos(2\pi r\rho) dr. \end{aligned}$$

当 $d=3$, 则

$$\begin{aligned} F_0(\rho) = \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_0(r) e^{-2\pi i r(\xi_1 \sin\theta\cos\varphi + \xi_2\sin\theta\sin\varphi + \xi_3\cos\theta)} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^\infty f_0(r) r^2 dr \int_{S^2} e^{-2\pi i\gamma\cdot(r\xi)} d\sigma(\gamma) \\ &= \int_0^\infty f_0(r) r^2 \left(4\pi \frac{\sin(2\pi r\rho)}{2\pi r\rho}\right) dr \\ &= 2\rho^{-1}\int_0^\infty f_0(r) r \sin(2\pi r\rho) dr. \end{aligned}$$

在处理偶数维数之前, 对 $n\in\mathbb{Z}$ 定义 Bessel 函数 $J_n(\rho)$, 其为函数 $e^{i\rho\sin\theta}$ 的第 n 个 Fourier 系数, 即

$$J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho\sin\theta} e^{-in\theta} d\theta.$$

由 Fourier 级数的收敛定理, 有

$$e^{i\rho\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) e^{in\theta}.$$

当 $d=2$, 则

$$\begin{aligned} F_0(\rho) = \hat{f}((0,-\rho)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_0(r) e^{2\pi r\rho\sin\theta} r d\theta dr \\ &= \int_0^\infty J_0(2\pi\rho r) f_0(r) r dr. \end{aligned}$$

注 . 对于偶数维, 以上的 Bessel 函数能给出对应的公式, 而对于奇数维, 则还要推广 Bessel 函数才行. 同时, 径向函数的 Fourier 变换的径向形式也反映了奇数维和偶数维的差异.

4.6 Radon 变换及其应用

这个变换有很具体的现实意义, 也因此称为 X 射线变换. 以下只讨论 $\mathbb{R}^3$ 上的 Radon 变换. 记平面为 $\mathcal{P}$, 则定义 Radon 变换如下

$$\mathcal{R}(f)(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} f.$$

为了方便, 将函数限制在 $\mathcal{S}$ 上, 并且由于平面可以通过单位向量 γ 定义为

$$\mathcal{P}_{t,\gamma} = \{x\in\mathbb{R}^3 : x\cdot\gamma = t\},$$

将 Radon 变换重写为

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1e_1 + u_2e_2) du_1 du_2.$$

其中向量 e_1, e_2, γ 是规范正交的.

定理 4.9. 若 $f \in \mathcal{S}$, 则 Radon 变换的定义是不依赖向量 e_1, e_2 的选取的, 进一步有

$$\int_{\infty}^{\infty}\left(\int_{\mathcal{P}_{t,\gamma}}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx.$$

证明. 证明的核心是旋转变换. □

变换后的函数是定义在 $\mathbb{R} \times S^2$ 上的, 类似考虑其上的 Schwartz 函数类.

定义 4.2. 称 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^2)$, 若光滑函数 f 对变量 t 对 γ 一致地满足 Schwartz 条件, 即

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ \gamma\in S^2} |t|^k \left|\frac{\partial^l F}{\partial t^l}\right| < \infty \quad \forall k, l \geqslant 0.$$

这个定义的几何直观比较明显, 某种程度上可以说成在比较远处, 任何方向都能被一个径向的 Schwartz 函数控制, 这里的一致性应该是因为球面是紧的.

定理 4.10. 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, 则 $\mathcal{R}(f)(t,\gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 对每个固定的 γ 成立. 进一步有

$$\widehat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) = \hat{f}(s\gamma).$$

注 . 左端的 Fourier 变换是一维的 Fourier 变换, 在 γ 是固定的情况下, 而右端的 Fourier 变换则是三维的.

证明. 已知

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u)du,$$

以及 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. 那么有

$$(1+|t|)^N(1+|u|)^N|f(t\gamma+u)| \leqslant A_N$$

对每个正整数 N 成立.

从而对 u 积分知 $\mathcal{R}(f)$ 是速降的, 而对 t 的导数同理是速降的, 因此 $\mathcal{R}(f)(t,\gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 并且有

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}(f)(s,\gamma) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)du\right)e^{-2\pi its}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)du\right)e^{-2\pi i(s\gamma)\cdot(t\gamma+u)}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-2\pi i(s\gamma)\cdot x}dx = \hat{f}(s\gamma).
\end{aligned}$$

□

推论 4.11. 若 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ 且 $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$, 则 $f = g$.

正如 Fourier 变换和 Fourier 反演一样, 希望 Radon 变换也是可逆的, 至少在 $\mathcal{S}$ 这一条件下. 事实上,Radon 变换保留了足够的信息量. 因此, 处理逆变换是可能的.

给定函数 F 定义在 $\mathbb{R} \times S^2$ 上, 定义 Radon 变换的对偶变换 $\mathcal{R}^*$ 为

$$\mathcal{R}^*(F)(x) = \int_{S^2} F(x\cdot\gamma,\gamma)d\sigma(\gamma).$$

这个定义有其几何意义, 但是被称为对偶更多是因为如下事实.

定义 $V_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ 和 $V_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^2)$, 以及对应的内积

$$(f,g)_1 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

和

$$(F,G)_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} F(t,\gamma)\overline{G(t,\gamma)}d\sigma(\gamma)dt.$$

在

$$\mathcal{R} : V_1 \to V_2, \quad \mathcal{R}^* : V_2 \to V_1,$$

的基础上, 可以计算得

$$(\mathcal{R}f, F)_2 = (f, \mathcal{R}^* F)_1.$$

具体是

$$\begin{aligned}
(f, \mathcal{R}^*F) = &\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\overline{\mathcal{R}^*F(x)}dx \\
&\int_{\mathbb{R}^3} f(x) \int_{S^2} \overline{F(x\cdot\gamma,\gamma)}d\sigma(\gamma)dx \\
&\int_{S^2} d\sigma(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)\overline{F(t,\gamma)}dudt \\
&\int_{S^2} d\sigma(\gamma) \int_{\mathbb{R}} \overline{F(t,\gamma)}dt \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma+u)du \\
&\int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} \mathcal{R}(f)(t,\gamma)\overline{F(t,\gamma)}d\sigma(\gamma)dt = (\mathcal{R}(f), F)_1.
\end{aligned}$$

最后, 在上述结果的基础上, 有如下结果.

定理 4.12. 若 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)) = -8\pi^2 f.$$

证明. 已知

$$\mathcal{R}(f)(t,\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma)e^{2\pi its}ds.$$

从而

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)) &= \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma)(-4\pi^2 s^2)e^{2\pi ix\cdot\gamma s}dsd\sigma(\gamma) \\
&= -4\pi^2 \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma)e^{2\pi ix\cdot\gamma s}dsd\sigma(\gamma) \\
&= -4\pi^2 \int_{S^2} \left(\int_0^\infty + \int_{-\infty}^0\right) \hat{f}(s\gamma)e^{2\pi ix\cdot\gamma s}dsd\sigma(\gamma) \\
&= -8\pi^2 \int_{s^2} \int_0^\infty \hat{f}(s\gamma)e^{2\pi ix\cdot\gamma s}s^2dss\sigma(\gamma) = -8\pi^2 f(x).
\end{aligned}$$

最后是用到了球坐标换元. □

4.7 平面波

之前的波动方程有一个对光滑性要求稍弱的解 (C^2 就够了), 形式为

$$u(x,t)=F((x\cdot\gamma)-t).$$

事实上, 这个函数不可能是 Schwartz 函数, 因为 x 在与 γ 垂直的方向使得解对变量 x 为常数, 因此这个解也被称为平面波.

4.8 波动方程的解的唯一性

在习题中有几次用到了解的唯一性, 但是这个问题之前遗留下来了, 以下详细地解决这个问题.

定理 4.13. 设 $u(x,t)$ 是 C^2 函数, 定义在上半闭平面 $\{(x,t):x\in\mathbb{R}^d,t\geqslant 0\}$, 且满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u.$$

若 $u(x,0)=\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ 对任意 $x\in B(x_0,t_0)$ 成立, 则 $u(x,t)=0$ 对任意 $(x,t)\in B_t(x_0,r_0)$ 成立. 其中 $B_t(x_0,r_0)=\{x:|x-x_0|\leqslant r_0-t,0\leqslant t\leqslant t_0\}$.

证明. 首先定义能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)}|\nabla u(x,t)|^2dx.$$

那么有 $E(t)\leqslant 0$ 和 $E(0)=0$ 成立. 计算该积分对能量的导数如下

$$\begin{aligned}
E'(t)&=\frac{d}{dt}\left(\int_0^{r_0-t}d\rho\int_{\partial B(x_0,1)}|\nabla u(\rho\gamma,t)|^2\rho^{d-1}d\sigma(\gamma)\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u(x,t)|^2dx-\int_{\partial B(x_0,1)}|\nabla u((r_0-t)\gamma,t)|^2(r_0-t)^{d-1}d\sigma(\gamma)\\
&=\frac{1}{2}\int_{B_t(x_0,r_0)}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u(x,t)|^2dx-\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}|\nabla u(\gamma,t)|^2d\sigma(\gamma)\\
&=\int_{B_t(x_0,r_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^d\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}\right)dx-\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}|\nabla u(\gamma,t)|^2d\sigma(\gamma).
\end{aligned}$$

注意到如下导数

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

那么就有

$$E'(t)=\int_{B_t(x_0,r_0)}\left(\sum_{i=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right)dx-\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}|\nabla u|^2d\sigma(\gamma).$$

由于

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\sum_{i=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

那么由 Stokes 定理, 有

$$E'(t)=\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}\left(\sum_{i=1}^d\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}v_i\right)d\sigma(\gamma)-\int_{\partial B_t(x_0,r_0)}|\nabla u|^2d\sigma(\gamma).$$

其中 v_i 是 $B_t(x_0, r_0)$ 的第 i 个单位外法向量. 再结合 Cauchy-Schwarz 不等式和均值不等式, 有

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} v_i \leqslant \frac{1}{2} |\nabla u|^2.$$

得知 $E'(t) = 0$, 从而 $E(t) = 0$, 就有 $u = 0$. $\square$