Chapter 1 Basic concepts of DE

eg 1 $x(t)$ 为被捕食者在 t 时刻的数量，$y(t)$ 为捕食者在 t 时刻的数量

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

lotka - velterra

induce

某 随机 DE

Def 1.1 (ODE) 形如 $F(x, y, y^{(1)}, \cdots y^{(n)}) = 0$ (1.1) 的等式为 ODE

n：方程的阶数

Def 1.2 若 F 关于 $x, y, \cdots y^{(n)}$ 是线性的，则称 (1.1) 是线性……

Def 1.3. 称 $y = \phi(x)$. $x \in J \subseteq \mathbb{R}$ (区间)，若 $F(x, \phi(x), \cdots \phi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in J$ 是 (1.1) 的解

Def 1.4. 若解中不含任何常数，则称之为微分方程的特解

若解 $y = \phi(x, c_1, \cdots c_n)$ 是 (1.1) 的解，其中 $c_1, \cdots c_n$ 是任意常数且相互独立

即 $\det \frac{\partial(\phi, \cdots \phi^{(n-1)})}{\partial(c_1, \cdots c_n)} \neq 0 \quad \forall x \in J$,

则称之为 (1.1) 的通解

几何意义 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ f 在区域上连续，若 $y = \phi(x)$ 是方程的解

$\Rightarrow \phi'(x) = f(x, \phi(x))$ 则 $\Gamma = \{(x, y) : y = \phi(x)\}$ 为平面上

的一条可微曲线，称之为解曲线 or 积分曲线.

Chapter 2 elementary methods of solution

purpose： 求解 一阶 线性方程 $y' + p(x)y = g(x)$

若 $g(x) \equiv 0$. $\Rightarrow y' + p(x)y = 0$ ← 可分离变量.

化为恰当方程

~~e.g $y^{(2)}(x) + 2y^{(1)} = x^3$ $F(x, y, y^{(2)}, y^{(3)}) =$~~

恰当 ⟶ 可分 ⟶ 一阶线性

考虑 $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ (2.1)

若 $\exists$ 连续可微函数 $\Phi(x,y)$ s.t. $d\Phi(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$.

则称 (2.1) 是恰当方程

if (2.1) 恰当 $\Rightarrow d\Phi=0 \Rightarrow \Phi(x,y)=C$ (2.2) 其中 C 为任意实数

此时称 (2.2) 为 (2.1) 的通积分

Thm 2.1 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 上连续，且具有连续一阶偏导 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial x}$，则 (2.1) 是恰当方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (2.3) 在 D 上成立.

当上式成立时，方程的通积分为 $\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=C$.

其中 γ 为连接 (x_0,y_0) 与 (x,y) 并在 D 内的有限条光滑曲线所组成的曲线，C 为任意常数.

recall: de rham 上同调.

proof. ($\Rightarrow$) if (2.1) 是恰当的，$\exists$ 连续可微函数 Φ s.t. $d\Phi=P\,dx+Q\,dy$

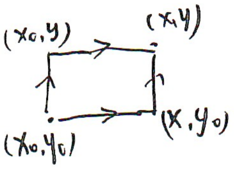
则 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q \xrightarrow{P,Q\text{可微}} \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}$ $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$

由 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

($\Leftarrow$) if (2.3) 成立，令 $\Phi(x,y)=\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$

因为 (2.3) 成立 积分与 γ 选取无关 $\Rightarrow d\Phi(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ □

若 $D=\mathbb{R}^2$，(2.1) 恰当，通积分可 $\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx$



or $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy$

可分离变量 $P(x,y)=P_1(x)P_2(y)$, $Q(x,y)=Q_1(x)Q_2(y)$

$\Rightarrow P_1(x)P_2(y)\,dx+Q_1(x)Q_2(y)\,dy=0$ (2.7)

$\cdot\frac{1}{P_2(y)Q_1(x)}$ ~~若不为0~~ $P_2(y)Q_1(x)\neq0$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy=0$$

通积分为 $\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy=C \leftarrow$ 任意

若 $P_2(b)=0$ ~~$P_2(y)Q_1(x)=0$~~ 则 $y\equiv b$ 是一个特解

若 $Q_1(a)=0$ 则 $x\equiv a$ 是一个特解

通解 & 特解 要区分

e.g. $y' = y^{\frac{1}{3}}$ 即 $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$

$y \equiv 0$ 是一个解，若 $y \neq 0$. $\longrightarrow \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} - dx = 0$

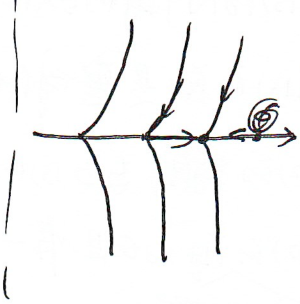
通积分为 $\int y^{-\frac{1}{3}} dy - \int dx = C$

$\Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} - x = C \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(x+C)$ C为…

通解为 …

特解为 …

graph



不唯一性

e.g. $x\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

若 $x \neq 0$, $\sqrt{1-y^2} \neq 0$. $\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ 通解为 $\arcsin y = \ln|x| + C$. C为任意常数

$x = C e^{\arcsin y}$ $\forall C \in \mathbb{R} - \{0\}$.

特解为 $y = \pm 1$

rmk. 并未讨论是否为所有解

sec 3. 一阶线性方程的解法

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) \quad (2.12)$$

$p(x)$, $q(x)$ 在 (a,b) 上连续

if $q(x) \equiv 0$. call (2.12) 为齐次的　　　齐次 ⇒ 非齐次

Consider $\frac{dy}{dx} + p(x) y = 0$

if $y \neq 0$. $\Rightarrow \frac{dy}{y} + p(x) dx = 0 \overset{\int}{\Longrightarrow} \ln|y| + \int p(x) dx = C$

$\cancel{\Rightarrow y = C e^{\int_{x_0}^{x} p(t) dt}} \Rightarrow y = C e^{-\int p(x) dx}$ ~~$(C\neq 0)$ 为任意常数~~ $\forall C \in \mathbb{R} - \{0\}$

if $y \equiv 0$. 是方程的解

综上，通解为 $y = C e^{-\int p(x) dx}$ $\forall C \in \mathbb{R}$ (亦即 $y = C e^{-\int_{x_0}^{x} p(x) dx}$ $\forall C \in \mathbb{R}$)

令 $y(x) = C(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds}$

代入(2.12) $\Rightarrow \underbrace{C'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} + C(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} \cdot p(x)}_{\frac{dy}{dx}}$ $(y' + py) = q(x)$

$$\Rightarrow C'(x) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} = q(x)$$

$$\Rightarrow C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{x_0}^{t} p(s) ds} dt$$

$$\Rightarrow y(x) = \left(C + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{\int_{x_0}^{t} p(s) ds} dt\right) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} = C e^{-\int_{x_0}^{x} p(s) ds} + \int_{x_0}^{x} q(t) e^{-\int_{t}^{x} p(s) ds} dt$$

Thm 2.3. (1) 方程(2.13)的解恒为零 or 恒不为零　　　　2.12 非齐次
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2.13 齐次.

(2) 方程(2.13)的两个解的线性组合仍是解

(3) 方程(2.13)的解是"整体存在"的

(4) 方程(2.12)的特解与(2.13)的通解的和构成(2.12)的通解

(5) 方程(2.12)的解存在且唯一.
　　　　　　初值问题.

proof.

(1) 设 $y(x)$ 是(2.13)的解，且 $y(x_0)=0$.　　$[x_0,x]\subseteq(a,b)$. → 有限

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}\right)=(y'+p(x)y)e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}=0$$

$$\Rightarrow\ y e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}=y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0}p(x)dx}=0\ \Rightarrow y\equiv 0$$

(2) 显然

(4) 显然

(5) 设 φ_1,φ_2 都是 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的解

令 $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$，则 $\frac{d\varphi}{dx}=-p(x)\varphi(x)$

$\Rightarrow$ φ 是(2.13)的解，初值为 $\varphi(x_0)=0$.

由(1) $\Rightarrow$ $\varphi\equiv 0$.

(3) 整体存在：解在 (a,b) 上都存在　　□

e.g. $\frac{dy}{dx}+y=x^2$

$$e^x\left(\frac{dy}{dx}+y\right)=e^x x^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^x)=x^2e^x$$

$$\Rightarrow ye^x=\int x^2e^x dx$$

$$=C\,(x^2-2x+2)e^x+C_1$$

$$y=(x^2-2x+2)+C_1e^{-x}$$

e.g 2.12. $f\in C^1[0,+\infty)$　$\exists C_0>0$　$a(x)\geq C_0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'+a(x)f(x)=0$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\cancel{f e^{\int a(x)dx}}$

令 $g(x)=f'+af$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g=0$　　f 是 $y'+ay=g$

$$\Rightarrow e^{\int_0^x a(t)dt}(y'+ay)=e^{\int_0^x a(t)dt}g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int_0^x a(t)dt}\right)=g(x)e^{\int_0^x a(t)dt}$$

$$\Rightarrow y(x)e^{\int_0^x a(t)dt}-y(0)=\int_0^x g(s)e^{\int_0^s a(t)dt}ds$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{f(0)+\int_0^x g(s)e^{\int_0^s a(t)dt}}{e^{\int_0^x a(t)dt}}$$

讨 分子 $+\infty$. 由 L'Hospital $\lim f(x) = \lim \frac{g(x) e^{\int_0^x a(t)dt}}{\int_0^x a(t)dt \, a(x)} = \lim \frac{g(x)}{a(x)} = 0$

讨 分子 $<+\infty$ 也是 0.

$\Rightarrow \lim f = 0.$ $\square$

一些特殊的方程求解

e.g. 2.9 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} =: f(x)$ f 是齐次函数 (齐次方程)

令 $y(x) = u(x)x$

则 $u(x) + xu'(x) = \frac{1+u(x)}{1-u(x)}$ $\left(u + \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u}{1-u} \right)$

$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$

$x \neq 0. \Rightarrow \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}.$

$\Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C$

$\Rightarrow e^{\arctan u} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = e^C$

$\Rightarrow C\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$

C为任意正的常数

e.g. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$ (Bernoulli)

若 $n \neq 1$

若 $y \neq 0$. $y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x) y^{-(n-1)} = q(x)$

~~$-\frac{1}{n-1}\frac{d\,y^{-(n-1)}}{dx} + p\,y$~~ $\Rightarrow -\frac{1}{n-1}\frac{d\,y^{-(n-1)}}{dx} + p(x)\,y^{-(n-1)} = q(x)$

e.g. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{mx+ny+l}$

令 $x = \tilde{x} + \alpha$
$y = \tilde{y} + \beta$

$\Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{a\tilde{x} + b\tilde{y} + (a\alpha + b\beta + c)}{m\tilde{x} + n\tilde{y} + (m\alpha + n\beta + l)}$

希望 $\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ m\alpha + n\beta + l = 0 \end{cases}$ $(*)$

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$, 则 $\exists\, \alpha, \beta$ s.t. $(*)$ 成立.

则 $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{a\tilde{x} + b\tilde{y}}{m\tilde{x} + n\tilde{y}}$ 齐次

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists \lambda \begin{cases} a = \lambda m \\ b = \lambda n \end{cases}$

~~$\Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\lambda(m\tilde{x} + n\tilde{y}) + \lambda(m\alpha + n\beta) + c}{m\tilde{x} + n\tilde{y} + (m\alpha + n\beta) + l}$~~

$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda(mx+ny) + c}{mx+ny+l}$

令 $u = mx+ny \Rightarrow m + n\frac{dy}{dx} = n\frac{\lambda u + c}{u + l} + m = \frac{du}{dx}$ 可分离变量

~~Ricati~~ 方程. $\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ (2.35)

Riccati

$a(x), b(x), c(x)$ 在区间上连续且 $a(x) \neq 0$.

特殊情形. $a(x) \equiv a$ $b(x) = 0$. $c(x) = C_0 x^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a_0 y^2 + \frac{C_0}{x^2}$$

$y \neq 0$. 因此两边同乘 $\frac{1}{y^2}$ $\Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = a_0 + \frac{C_0 \frac{1}{y^2}}{x^2}$

$\Rightarrow -\frac{d\frac{1}{y}}{dx} = \cdots$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = -a_0 - \frac{C_0 u^2}{x^2}$ 齐次

令 $\frac{1}{y} = u$

再令 ~~u = vx~~ $u = vx$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = -a_0 - C_0 v^2$ 可分离变量.

一般情形. 设 $y = \phi(x)$ 是 Riccati 方程的一个解. 则方程的所有解

可通过求解下列的 Bernoulli 方程得到

$$u' = a(x)u^2 + (2a(x)\phi(x) + b(x))u.$$

proof. 设 $y = \phi(x) + u$. 代入 (2.35). $\phi'(x) + u' = a(x)(\phi(x)+u)^2 + b(x)(\phi(x)+u) + c(x)$

$\uparrow$ 随便一解 $\uparrow$ 待定函数

$$= (a(x)\phi^2(x) + b(x)\phi(x) + c(x)) + a(x)(2\phi(x)u + b(x)u) + a(x)u^2$$

$$\cancel{= \phi(x) + a(x)(2\ldots}$$

$$= \phi'(x) + a(x)u^2 + (2a(x)\phi(x) + b(x))u.$$

$\Rightarrow u' = a(x)u^2 + (2a(x)\phi(x) + b(x))u$, $y = \phi(x) + u$ 给出了所有解. □

Chapter 3. The existence and uniqueness of solutions

sec 3.1. Gronwall inequality

lem. 3.1. 设 f, g 在 $[a,b]$ 上连续. $g(x) \geq 0$. c 常数

若 $f(x) \leq c + \int_a^x g(s)f(s)\,ds$. 则 $f(x) \leq c\, e^{\int_a^x g(s)ds}$

| 微分不等式. 要求 $f(x) \leq 0$ $\downarrow$ $\int_a^x f\,ds \leq 0$

proof. $\Phi(x) = \int_a^x g(s)f(s)\,ds$. $\Phi'(x) = g(x)f(x) \leq g(x)(c + \Phi(x))$

$\Rightarrow \Phi'(x) \leq (c + \Phi(x))g(x)$ $\Rightarrow \Phi'(x) - g(x)\Phi(x) \leq c\,g(x)$

乘 $e^{-\int_a^x g(s)dx}$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\Phi(x)e^{-\int_a^x g(s)ds}\right) \leq c\,g(x)\,e^{-\int_a^x g(s)dx} = c\frac{d}{dx}\left(-e^{-\int_a^x g(s)ds}\right)$

积 $\int_a^x$ $\Rightarrow \Phi(x)e^{-\int_a^x g(s)ds} - 0 \leq -c\,e^{-\int_a^x g(s)ds} + c$

$\Rightarrow \Phi(x) \leq c\left(e^{\int_a^x g(s)ds} - 1\right)$ $\Rightarrow f(x) \leq c\,e^{\int_a^x g(s)ds}$ □

sec 3.2. Picard Thm $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$

考虑微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$，$f(x,y)$ 在矩形上连续 $R_0: |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b$.

def. 3.3. 设 $f(x,y)$ 在区域 G 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，若 $\exists L > 0$.

$\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in G.\quad |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \le L(y_1, y_2)$

rmk. $f(x,y)$ 在闭区域 D 上关于 y 有连续偏导，则 f 在 D 上关于 y Lip.

因 $\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| = \left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy\right| \le M\,|y_2 - y_1|$

Thm (Picard) 设 f 在闭~~区域~~矩形 D 上连续且关于 y 满足 Lip. 则

初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) & (3.1) \\ y(x_0) = y_0 & (3.2) \end{cases}$ ~~解~~在区间 $[x_0-h,\ x_0+h]$ 上存在唯一解

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $M = \max_D |f(x,y)|$

proof. Step 1. 转化为积分方程. $\Longleftrightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$

| 做积分估计 相对容易.
| φ 连续意味着 φ 可微.

设 $y = \phi(x)$ 是微分方程的解 $\Rightarrow \phi'(x) = f(x,y).\ \phi(x_0) = y_0$.

$\xRightarrow{\int_{x_0}^{x}}$ $\phi(x) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, \phi(x))\,dx$ 即 $\phi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, \phi(x))\,dx$

设 $y = \phi(x)$ 是积分方程的解 φ 是可导的（由 $f(x,y)$ 连续）

$\Rightarrow \phi'(x) = f(x, \phi(x))$，且 $x = x_0$ 时 $\phi(x_0) = y_0$.

Step 2 构造 Picard 序列 $y_n(x) \rightrightarrows y(x)$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$
$$\Downarrow \text{hope}$$
$$\lim y_n = y + \int_{x_0}^{x} f(x, \lim y)\,dx$$
$$\Downarrow C$$
$$\lim y_n = y + \int_{x_0}^{x} \lim f(x, y_n)\,dx$$
$$\Downarrow \text{interchange}$$
$$\lim y_n = \lim\left(y + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx\right)$$

取 $\begin{cases} y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \underline{y_{n-1}})\,dx & n \ge 1. \\ y_0(x) = y_0. \end{cases}$ 要验证良定性.

- $(s, y_n(s)) \in R = \{(x,y): |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$
- $\{y_n(x)\}$ 在 $|x-x_0| < h$ 上一致收敛.

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\,ds \Rightarrow |y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_0)\,ds\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,y_0)|\,ds\right|$

$\le \max|f(x,y)|\,|x-x_0| = M|x-x_0| \le M\cdot\frac{b}{M} \le b.$

$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, \underline{y_1(s)})\,ds\right| \overset{\text{类似}}{\le} b \xRightarrow{\text{归纳}} |y_n(x) - y_0| \le b \quad \forall x \in [x_0-h, x_0+h].$

Step 3. 解的存在性 ($\lim y_n(x)$ 存在).

$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k(x) - y_{k-1}(x)\right) + y_0$ 只需证 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(y_k(x) - y_{k-1}(x)\right)$ 一致收敛 在 $[x_0-h, x_0+h]$ 上

只需 $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}|(x)$ 在 $[x_0-h, x_0+h]$ 上一致收敛.

$$|y_1 - y_0| \le M|x-x_0|$$

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(s,y_1) - f(s,y_0)\right)ds\right| \overset{lip}{\le} \left|\int_{x_0}^{x} L|y_1-y_0|\, ds\right|$$

$$\le LM\left|\int_{x_0}^{x} |s-x_0|\, ds\right| = LM\frac{|x-x_0|^2}{2}.$$

$\vdots$

$$|y_k - y_{k-1}| \le L^2 M \frac{|x-x_0|^3}{3!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - y_{k-1}| \le \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} < +\infty.$$

因此 $\{y_n(x)\}$ 一致收敛. 记 $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \Rightarrow y(x)$ 连续 在 $[x_0-h, x_0+h]$ 上.

由 $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds$ 取极限有 $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds$. / since uniformly

Step 4. 唯一性. 设 ϕ 和 ψ 是两个不同的解

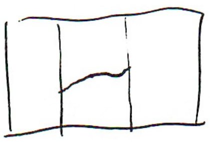
即 $\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s))ds$
$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds$

$$\Rightarrow |\phi(x) - \psi(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\left(f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))\right)ds\right|$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\phi(s)) - f(s,\psi(s))|\, ds\right|$$

$$\overset{lip}{\le} L\left|\int_{x_0}^{x} |\phi(s) - \psi(s)|\, ds\right|$$

由 Gronwall $\Rightarrow \phi(x) = \psi(x)$. □



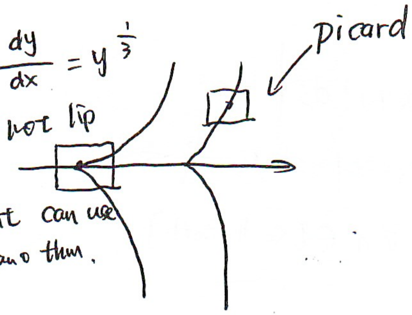
2h

$\downarrow$ 条件减弱

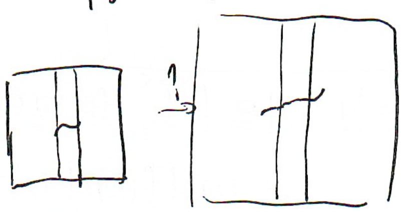
Thm 3.3 (Peano) 设函数 f 在 D 上连续. 则 Cauchy 问题 (3.1)(3.2) 在区间 $|x-x_0| \le h$ 上至少存在一个解. $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $M = \max_{x\in D} |f(x)|$

证略.

eg $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$



e.g. 3.2. $\begin{cases} y' = x^2+y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 是lip的



延伸问题.

Def 3.4 设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续. 若对 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G$

有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le F(|y_1-y_2|)$

其中 $F(r)>0$ 是 $(r>0)$ 的连续函数. 且 $\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{F(r)}dr=+\infty\quad\forall\varepsilon>0$.

则称 $f(x,y)$ 对于 y 满足 Osgood 条件.

rmk Lip $\subseteq$ Osgood.

Def 算子 $T: X\longrightarrow X$. $Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))ds$

那么只要说明 T 在 X 上有存在唯一不动点

其中 $X:=\{y: y\in C[x_0-h,x_0+h]$ 且 $|y-y_0|\le b\}$ h 待定

那么 Picard Thm 只要证 T 是 X 上的一个压缩映射

即① $y\in X\Rightarrow Ty\in X$

② $\forall y_1,y_2\in X$. $\|Ty_1-Ty_2\|\le C\|y_1-y_2\|\quad 0<C<1$

proof ① 连续显然. h 待定 取 $h=\frac{b}{M}$

$$\|Ty-y_0\|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))ds\right|\le M|x-x_0|\le b$$

② 由 $|Ty_2-Ty_1|=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))ds\right|$

$$\le L\int_{x_0}^{x}|y_2(s)-y_1(s)|ds$$

$$\le Lh\max_{x\in[\,]}|y_2(x)-y_1(x)|$$

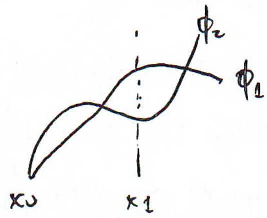
$$\Rightarrow \max|Ty_2-Ty_1|\le\frac{1}{2}\max|y_2-y_1|$$

取 $Lh\le\frac{1}{2}$

范数为 $\max|\cdot|$, 这里的条件为 $h\le\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{2L}\}$.

Thm (Osgood 唯一性定理) 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 内对 y 满足 Osgood 条件

则 Cauchy 问题 (3.1)(3.2) 有的解都是存在且唯一的



proof. 由 Peano 存在性定理 解已经存在, 设 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ 是两个不同的解

则存在 x_1. s.t $\phi_1(x_1)\ne\phi_2(x_1)$. 不妨 $x_1>x_0$. $\phi_1(x_1)>\phi_2(x_1)$

令 $\bar{x}=\max\{x\in[x_0,x_1],\ \phi_1(x)=\phi_2(x)\}$. 存在 (由连续性)

令 $\psi(x)=\phi_1(x)-\phi_2(x)>0$ 在 $x\in(\bar{x},x_1]$

$$\psi'(x)=\phi_1'(x)-\phi_2'(x)=f(x,\phi_1(x))-f(x,\phi_2(x))\overset{\text{Osgood}}{\le}F(\phi_1-\phi_2)=F(\psi(x))$$

$$\Rightarrow\frac{d\psi}{F(\psi)}\le dx\Rightarrow\int_{0}^{\psi(x_1)}\frac{d\psi}{F(\psi)}=\int_{\bar{x}}^{x_1}dx=x_1-\bar{x}<+\infty$$

但这与 Osgood 条件矛盾!

例3.7. 设 $f(y)$ 连续.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2+1+(f(y))^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ 的解存在且唯一.

Proof. $F(x,y) = x^2+1+(f(y))^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

省略了 $y=\varphi(x)$ 的定义区间

由 Peano Thm, 设 $y=\varphi(x)$ 是一个解

由 $\varphi' = F > 0$, 由反函数定理, $x=\psi(y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{1+x^2+(f(y))^2} \quad (*) \\ x(y_0) = x_0 \end{cases}$$ 关于 x 有连续偏导数, 在任何矩形 D 上 Lip.

由 Picard 存在唯一性定理, $(*)$ 的解是存在唯一的 □

$\Rightarrow$ 原来的初值问题的解是唯一的

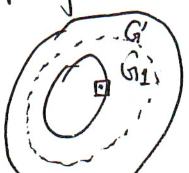
sec 3.4 解的延伸

Thm 3.4. 考虑 Cauchy 问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 其中 $f(x,y)$ 在 G 内连续, 该 Cauchy 问题的任意解曲线 Γ 均可延伸至 G 的边界. 即对于 G 内的任意有界闭区域 G_1 及 $(x_0,y_0) \in G_1$, 该 Cauchy 问题的解曲线 Γ 可以延伸到 $G \setminus G_1$.

即任何一个有界闭集都不能将解曲线盖住.

希望说明延伸方向一致的

proof. 反证. 设存在有界闭区域 G_1 s.t. 积分曲线 $\Gamma \subseteq G_1$. 选 $G' \subseteq G_1$



G' 为区域, 并且 $\overline{G'} \subseteq G$, 同时 $\overline{G_1} \subseteq G'$

选 δ_0 s.t. 以 G_1 中的点为中心、边长为 $2\delta_0$ 的矩形, 都在 G' 中.

令 $M = \max\limits_{\overline{G'}} |f|$. 由 Peano 存在性定理, 以 (x_0,y_0) 为初值的解

在 $[x_0, x_0+h_0]$ (在 D: $|x-x_0| \le \delta_0$, $|y-y_0| \le \delta_0$)

$h_0 = \min\{\delta_0, \dfrac{\delta_0}{M}\}$

令 $x_1 = x_0+h_0$. 那得到了 $[x_1, x_1+h]$ 上的解, 仍记为 $y=\varphi(x)$.

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[x_0, x_0+2h]$ 上存在. 重复即可导出矛盾! □

Rmk. $G=\mathbb{R}^2$ 时

可以 $x \to +\infty$ / $y \to +\infty$

Cor $f(x,y)$ 在 G 上连续且对 y 局部 Lipschitz, 则对任一点 (x_0,y_0) 存在唯一的 Γ 且 Γ 可延伸到边界

对 y 连续可微 $\Rightarrow$ locally Lip.

例3.9. $f(x,y)$ 连续, 对 y 局部 Lip —

对 $\forall P(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, 存在唯一的积分曲线 Γ 通过 P.

并且可以延伸到 $\mathbb{R}^2$ 的边界

令 $y=\varphi(x)$ 为方程的解, 要证存在区间有界. 只考虑右行解. 设其存在区间为 $[x_0, \beta)$. 不妨设 $\beta > 0$.

不妨设 $0 < x_1 < \beta$. $x_1 > x_0$ ~~且 $|x_1| > |x_0|$~~

在 $[x_1, \beta)$ 上考虑方程 $\Rightarrow \varphi'(x) = x^2 + \varphi^2(x) \ge x_1^2 + \varphi^2(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1}\left(\arctan\frac{\phi(x)}{x_1} - \arctan\frac{\phi(x_1)}{x_1}\right) \geq x - x_1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{x_1} \geq \beta - x_1 \Rightarrow \beta < +\infty$

$\phi(\beta)$ 可能有定义问题

~~否则 $\phi(\beta) = \phi(+\infty)$~~

可以取比 β 任意小的 β' 或 $\phi \to +\infty$

例 3.10.

proof. $(x^2+y^2+1)\sin\pi y$ 对 y C^1

$\Rightarrow$ 过 (x_0, y_0) 的解存在且唯一. on $\mathbb{R}^2$

显然 $y = n \in \mathbb{Z}$ 是解

若有考虑所有初值取点. $y = n \Rightarrow y \equiv n$ ✓

$y_0 \notin \mathbb{Z}$: $y_0(x) \in (n, n+1) \Rightarrow y_0(x)$ 在 $(n, n+1)$ 之间

$\Rightarrow y$ 单调. y 的解 x 到四方.

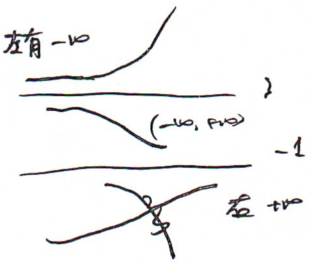
套路 Peano 存在

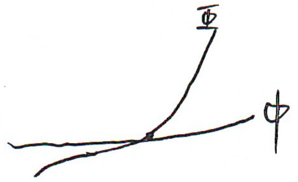
? 延伸 必有

特解 与区域

全域.

例 3.11 特解 $y = 3, -1$





sec 3.5 Comparation Thm

Thm 3.5. f, F 在 G 上 C^1

且 $f(x,y) < F(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$.

又设 $y = \phi(x)$, $y = \Phi(x)$ 在 (a,b) 上分别是 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

的解. 其中 $(x_0, y_0) \in G$. 则 $\begin{cases} \phi(x) < \Phi(x) & x > x_0 \\ \phi(x) > \Phi(x) & x < x_0 \end{cases}$

proof. 令 $\psi(x) = \Phi(x) - \phi(x)$. $\Rightarrow \psi(x)$ 在 (a,b) 上 C^1

$\Rightarrow \begin{cases} \psi'(x) = \Phi'(x) - \phi'(x) = F(x,\Phi(x)) - f(x,\phi(x)) \\ \psi'(x_0) > 0 \\ \psi(x_0) = 0. \end{cases}$

要证 $\psi(x) > 0$, for $\forall x \in (x_0, b)$. 若不然 since $\psi(x_0) = 0$. $\psi'(x_0) > 0$. $\exists \delta > 0$.

$\psi(x) > 0$ on $x \in (x_0, x_0+\delta]$. 设 $\exists \bar{x}$ s.t. $\psi(\bar{x}) = 0$

且 $\forall x \in (x_0, \bar{x})$. $\psi(x) > 0$.

$\Rightarrow \psi'(\bar{x}) \leq 0$ 但这与方程矛盾!

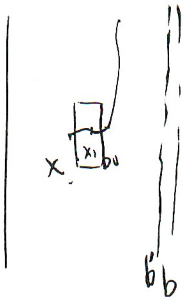
Thm 3.6 考虑 $y' = f(x,y)$ (3.11) 其中函数在带形区域 D: $a < x < b$, $y \in (-\infty, +\infty)$ 内连续. 且满足 $|f(x,y)| \leq A(x)|y| + B(x)$. 这里 $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$. 在 (a,b) 上连续.

$\Rightarrow$ 方程的每个解的存在区间都为 (a,b).

12、

Thm 3.6.

(Aim 可推广到到区间)



proof. 由 Peano Thm, 设过 $(x_0,y_0)\in D$ 的解存在. ~~设解的最大存在区间为 [a,b]~~

反证，$\exists b_0$ $x_0<b_0<b$

使得 $y=\varphi(x)$ 的右行最大区间为 $[x_0,b_0)$

$\forall x_1 > x_0$ ($x_1 \to b_0$). 令 $y_1=\varphi(x_1)$

以 (x_1,y_1) 为中心做矩形: $|x-x_1|\le a_1$, $|y-y_1|\le b_1$

任取 b', $b_0<b'<b$. 那么 $A(x)$, $B(x)$ 在 $[x_0,b']$ 上有界

在D上 $|f(x,y)|\le A(x)|y|+B(x)\le A_0(|y_1|+b_1)+B_0 \triangleq M$

$\Rightarrow \max\limits_{D} |f(x,y)|\le M$

解在 $[x_1,x_1+h]$ 上存在 $h=\min\{a_1,\frac{b_1}{M}\}$

$$\frac{b_1}{M_0}=\frac{b_1}{A_0(|y_1|+b_1)+B_0}\xrightarrow{b_1\to\infty}\frac{1}{A_0}$$

当 b_1 充分大. $\frac{b_1}{M}>\frac{1}{2A_0}$

取 $a_1=\frac{1}{4A_0}$

$\Rightarrow h=\frac{1}{4A_0}$

可使 $x_1<b_0$. $x_1+\frac{1}{4A_0}>b_0$ 导出矛盾 □

$$\left[\ \frac{d\vec{y}}{dx}=A(x)\vec{y}+B(x)\ \right]$$

Chapter 4. The dependence on the initial / para of the solution.

Thm 4.7 变分方程 考虑 4.7 中初值问题的解 $\phi(x, x_0, y_0, \lambda)$

$$\phi(x, x_0, y_0, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \phi(s, x_0, y_0, \lambda))\, ds$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_0} = -f(x_0, \phi(x_0, x_0, y_0, \lambda)) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} f(s, \phi(s, x_0, y_0, \lambda)) \frac{\partial \phi}{\partial x_0}\, ds$$

$$= -f(x_0, y_0, \lambda)$$

令 $z = \frac{\partial \phi}{\partial x_0} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(x, \phi(x, x_0, y_0, \lambda))}_{A(x, x_0, y_0, \lambda)} z \qquad z(x_0) = -f(x_0, y_0, \lambda)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_0}(x, x_0, y_0, \lambda) = 1 + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(s, \phi(s, x_0, y_0, \lambda)) \frac{\partial \phi}{\partial y_0}\, ds$$

令 $z = \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} A z \qquad z(x_0) = 1$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \int_{x_0}^{x} \cancel{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} ds} \left[\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}\right] ds$$

令 $z = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \quad \frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}_{B} + \frac{\partial f}{\partial y} z = Az + B(x, x_0, y_0, \lambda). \qquad z(x_0) = 0$

例 4.2. 方程在 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续且对 y, u 有连续偏导 $\xrightarrow{4.7}$ 可微

$y = y(x, u)$ 满足积分方程

$$y(x, u) = 1 + \int_0^x y(s, u) + u(s + (y(s, u))^2)\, ds$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \int_0^x \left[\frac{\partial y}{\partial u} + (s + (y(s, u))^2) + u\left(2 y(s, u) \frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] ds$$

令 $z = \frac{\partial y}{\partial u} \qquad z(0) = 0$

$$\frac{dz}{dx} = z(x) + x + (y(x, u))^2 + 2u\, y(x, u) z.$$

$$= (x + y^2) + (1 + 2uy) z$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^x (1+2uy) ds} z\right) = e^{-\int_0^x (1+2uy) ds} \, x + y^2$$

$$e^{-x} z = \int_0^x e^{-t}(t + e^{2t})\, dt$$

$\xRightarrow{u=0}$ $\cancel{\frac{d}{dx}}$

14.

4.3-1 $y = \eta + \int_0^x \sin xy(x,\eta)\, ds$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 + \int_0^x \cos sy(x,\eta)\, s \frac{\partial y}{\partial \eta}\, ds$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos xy \cdot xz. \qquad z(0) = 1$$

$$\frac{dz}{z} = x\cos xy\, dx$$

$$z = 1 \cdot e^{\int \cdots}$$

$$\phi^*(x) = \Phi(x)\, c(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\phi^*(x)}{dx} = A(x)\phi^*(x) + f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} c(x) + \Phi(x)\frac{d\,c(x)}{dx} = A(x)\Phi(x)\, c(x) + f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$A(x)\Phi(x)\, c(x) + \Phi(x)\frac{d\,c(x)}{dx} = A\Phi c + f$$

$$\Rightarrow \Phi(x)\frac{dc}{dx} = f$$

$$\Downarrow$$

$$c(x) = \underbrace{c}_{\text{取0即可}} + \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1} f\, ds$$

例 5.4

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -6 & 6 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \cancel{(\lambda+3)(\lambda^2-5\lambda+6) + 4(-\lambda+5-6) + 2(-6+6\lambda)}$$

$$= \cancel{\lambda(\lambda+3)(\lambda-5) - 4(\lambda+1) + 12(\lambda-1)}$$

$$= \cancel{\lambda(\lambda+3)(\lambda+5) + 8\lambda - 16}$$

$\lambda+$

$$= (\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-3) + 8(\lambda-2)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

例 3.5

$$\begin{pmatrix} \lambda-5 & 1 \\ -1 & \lambda-5 \end{pmatrix} = (\lambda-5)^2+1 \Rightarrow \lambda = 5+i \quad 5-i$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} X = 0 \qquad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} X = 0 \qquad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(5+i)x} + \tilde{c} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(5-i)x}$$

基解

$$\begin{pmatrix} i e^{5x}(\cos x + i\sin x) & -i e^{5x}(\cos x - i\sin x) \\ 1 e^{5x}(\cos x + i\sin x) & e^{5x}(\cos x - i\sin x) \end{pmatrix}$$

$$= e^{5x} \begin{pmatrix} i\cos x - \sin x & -i\cos x - \sin x \\ \cos x + i\sin x & \cos x - i\sin x \end{pmatrix} \sim e^{5x} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d}{dx} y = \lambda_i e^{\lambda_i x}\left(\xi_0 + \frac{x}{1!}\xi_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\xi_{n_i-1}\right)$$

$$+ e^{\lambda_i x}\left(\cancel{\xi_0} + \xi_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\xi_{n_i-1}\right)$$

方程 $A e^{\lambda_i x}\left(\xi_0 + \frac{x}{1!}\xi_1 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\xi_{n_i-1}\right)$

$$\Rightarrow (A-\lambda_i E)\left(\xi_0 + \frac{x}{1!}\xi_1 + \cdots \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\xi_{n_i-1}\right) = \left(\xi_1 \cdots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\xi_{n_i-1}\right).$$

$$\begin{cases} \xi_1 = (A-\lambda_i E)\xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n_i-1} = (A-\lambda_i E)\xi_{n_i-2} = (A-\lambda_i E)^{n_i-1}\xi_0 \\ \underline{(A-\lambda_i E)^{n_i}\xi_0 = 0} \end{cases}$$

直接

$\Phi = \left(e^{\lambda_1 x} P_1^{(1)}(x), \cdots\cdots \quad e^{\lambda_{n_1}} P_{n_1}^{(1)} \cdots\right)$

例 5.9.

~~有两基本解~~ 已知 中 设 ~~另一~~ 为 $\psi(x)$.

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -py' - qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \phi(x) & \psi(x) \\ \phi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

$$\Rightarrow \phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x) = \underbrace{W(x_0)}_{\text{设为}1} e^{\int_{x_0}^{x} -p(s)\,ds}$$

$$\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} -p(s)\,ds}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x)}{\phi^2(x)} = \frac{1}{\phi(x)^2} e^{\int_{x_0}^{x} -p(s)ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right) = \cdots$$

$$\frac{\psi(x)}{\phi(x)} - \frac{\psi(x_0)}{\phi(x_0)} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi(s)^2} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt} ds + c$$

$$\Rightarrow \psi(x) = c_1\phi(x) + c_2\phi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\phi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds$$

用常数变易计算 ~~特解~~

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -p(x) & -q(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

设通解为 $\begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \phi' & \psi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{matrix} c_1\phi + c_2\psi \\ c_1\phi' + c_2\psi' \end{matrix}$

$c_1'\phi + \cancel{c_1\phi'} + c_2'\psi + c_2\psi' = c_1\cancel{\phi'} + \cancel{c_2\psi'}$

第一行：$c_1'\phi + c_2'\psi = 0$

$\Rightarrow c_1'\phi +$

第二行

$$c_1'\varphi' + c_1\varphi'' + c_2'\psi' + c_2\psi'' = -p(c_1\varphi + c_2\psi) - q(c_1\varphi' + c_2\psi') + f(x)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$c_1'\varphi' + c_2'\psi' + c_1(-p\varphi' - q\varphi') \cancel{+f} + c_2(-p\psi' - q\psi') =$$

$$\Rightarrow \quad c_1'\varphi' + c_2'\psi' = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'\varphi + c_2'\psi = 0 \\ c_1'\varphi' + c_2'\psi' = f(x) \end{cases} \longrightarrow \quad c_1' = \frac{-\psi f}{W}, \quad c_2' = \frac{\varphi f}{W}$$

$$y^* = \varphi\int c_1 + \psi\int c_2$$

常系数方程的特解

例 5.11

$$y^* = c_1(x)\cos\alpha x + c_2(x)\sin\alpha x$$

$$c_1'(x)\cos\alpha x + c_2'(x)\sin\alpha x = 0$$

$$\cancel{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} =}$$ 求方程组，应令 $c_1'(x)\cos\alpha x + c_2'(x)\sin\alpha x = 0$

~~经验~~ ~~猜想~~ 经验法

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' = f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$$

令特解为 $y = \underset{\cancel{m次}}{Q_m(x)}e^{\alpha x}$ m 根 特征方程的解

例 $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} \to \varphi^* \\ y'' + 3y' - 4y = xe^{-x} \to \psi^* \end{cases} \Rightarrow \varphi^* + \psi^* \text{ 为原方程特解}$$

~~对于~~ 对于 φ^* $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ $(\lambda+4)(\lambda-1) = 0$

例 5.14 ~~齐次~~ 特征方程 $(\lambda-1)^2 = \vec{0}$ $\lambda = 1+i,\ 1-i$

设特解为 $\cancel{\cos x e^x}$ $x(A\cos x + B\sin x)e^x$

A $\cancel{A\cos x +}$

例 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^2+y^2-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^2+y^2-1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = (x^2+y^2)(x^2+y^2-1)$$

$$r^2=x^2+y^2 \quad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2) = r^2(r^2-1)$$

$$\Downarrow \quad \frac{dr}{dt} = r(r^2-1)$$

~~$x = r\cos\theta$~~

~~$\frac{dr}{dt}\frac{-\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{d\theta}{dt}\cdot r = -r\sin\theta + r\cos\theta$~~ (r^2-1)

~~$\frac{d\theta}{dt} r = -r\sin\theta +$~~

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

$r=0$ 平衡点

$r=1$ 闭轨

---

for $\forall t$, $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x_0 \mapsto \phi(t, x_0)$

若该集合 $\{\phi_t \mid t\in\mathbb{R}\}$. 则

① $\phi_0 = Id$

② $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$

③ $\phi_t(x)$ 关于 t 和 x 都连续

具有上述性质的单参数 ...

the proof of 9.5 A

$\exists r>0$, s.t $\overline{B(0,r)} \subseteq \Omega$ 要证 0 解稳定 $\boxed{对\ \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0. \text{ s.t. } |x_0|<\delta. \ |\phi(t,x_0)| \le \varepsilon \ \forall t \ge 0}$

令 $y = \min_{\varepsilon \le |x_0| \le r} V(x)$ 则 $y>0$. 要证 $|\phi(t,x_0)| \le \varepsilon$ 只需 $V(\phi(t,x_0)) < y$

由于 $V(0)=0$, $\exists \delta>0$, $\forall |x|<\delta$, $V(x)<y$

0

取 $|x_0|<\delta$ 由解的存在唯一性(假设) $\forall$ x_0 对应的解存在且唯一.

设 $t_1>0$ 是相应的极大存在时刻 (还不能说在 $[0,+\infty)$ 上存在)

~~Claim~~ $\frac{d}{dt}V(\phi(t,x_0)) = V^*(\phi(t,x_0)) \le 0$.

故 $V(\phi(t,x_0)) \le V(\phi(0,x_0)) = V(x_0) < y$

由 y 的定义, $|\phi(t,x_0)| \le \varepsilon \quad \forall t \in [0,t_1)$.

由延拓定理 $t_1 = +\infty$.

再证渐近稳定性. 在上述论证中取 $\varepsilon = r$, 则 $\exists \delta>0$, $\forall |x_0|<\delta$. $|\phi(t,x_0)|<r$

由 $\frac{d}{dt}(V(\phi(t,x_0)) < 0 \Rightarrow V(\phi(t,x_0))$ 关于 t 单减

$\Rightarrow \quad V(\phi(t,x_0))$ 在 $t \to +\infty$ 时存在. 要证极限是 0.

否则 $\exists y>0$, $\lim_{t\to+\infty} V(\phi(t,x_0)) = y \quad (V(\phi(t,x_0)) \downarrow y)$

由于 $V(0)=0$, V 连续. $\exists \alpha>0$, 当 $|x_0|<\alpha$, $|V(x)|<y$

令 $S = \{x \mid \alpha \le x \le r\}$ 令 $V^*(x)$ 在 S 上的最大值为 $-\mu$. $(\mu>0)$

由于 $V(\phi(t,x_0)) \downarrow y \Rightarrow V(\phi(t,x_0)) \ge y \quad \forall t>0 \Rightarrow \phi(t,x_0) \in S. \ \forall t \ge 0$

$\Rightarrow |\phi(t,x_0)| \ge \alpha$ 由稳定性 $\phi(t,x_0) \in [\alpha, r] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}V(\phi(t,x_0)) = V^*(\phi(t,x_0)) < -\mu$

int from 0 to t $\Rightarrow V(\phi(t,x_0)) < V(x_0) - \mu t$ $\quad t$ 充分大

$\Rightarrow V(\phi(t,x_0)) < 0$ ↯ #

the proof of 9.5 B.

$\overline{B(0,r)}$ 上. V 有界(因为连续)

$|V(x)| \le M$. $\forall x \in B(0,r)$

由假设, $\exists \delta>0$. $\exists |a|<\delta$. $V(a)>0$.

令 $\phi(t,a)$ 表示以 a 为初值的解

$\frac{d}{dt}V(\phi(t,a)) = V^*(\phi(t,a)) \ge 0$.

$\Rightarrow V(\phi(t,a)) \ge V(a)$

反证就是 $|\phi(t,a)| < r$ $\forall t \ge 0$. (t 可到正无穷)

V 连续 $\exists \alpha$. $|x|<\alpha$. $|V(x)| < V(a)$

~~$V(\phi(t,a))$~~

$\Rightarrow \phi(t,a) > \alpha$. $\forall t \ge 0$.

V^* 在 S 上最小为 $\mu>0$

$S = \{x \mid \alpha \le |x| \le r\}$.

$\phi(t,a) \in S$ $\forall t \ge 0$

$\Rightarrow \phi(t,a) - a \ge \mu t$. 矛盾 #

例 $y'' + g(y) = 0$. $g(y)$ 在 $|y| < k$ 上连续. $g(0)=0$. 讨论零解稳定性

且 $g(y)\cdot y > 0$. 当 $y \ne 0$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -g(y) \end{pmatrix} = f(y,y')$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(y) = y' \\ \frac{d}{dt}(y') = -g(y) \end{cases}$$

令 $V(y,y') = \frac{1}{2}(y')^2 + \int_0^y g(s)\,ds \ge 0$.

$V(y,y')$ 在 $\Omega = \{|y| < k.\ |y'| < +\infty\}$ 上正定

$$V^* = \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial y'}(-g(y)) = g(y)\,y' + y'(-g(y)) = 0$$

不是渐近稳定的. $V(\phi(t,x_0), \phi'(t,x_0)) = V(\phi(0), \phi'(0)) \ne 0$.

例 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\varepsilon x + 2y)(z+1) \\ \frac{dy}{dt} = (-x+\varepsilon y)(z+1) \\ \frac{dz}{dt} = -z^3. \end{cases}$ 问平衡点的稳定性

$\begin{matrix} \varepsilon x + 2y = 0 \\ -x + \varepsilon y = 0 \end{matrix} \Rightarrow (x,y,z) = \vec{0}.$

线性化 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon xz + 2yz \\ -xz + \varepsilon yz \\ -z^3 \end{pmatrix}.$

$\begin{vmatrix} \lambda-\varepsilon & -2 & \\ 1 & \lambda-\varepsilon & \\ & & \lambda \end{vmatrix}$ $\lambda((\lambda-\varepsilon)^2+2).$ $\lambda=0$, $\lambda = \varepsilon+\sqrt{2}i$, $\lambda = \varepsilon - \sqrt{2}i$

$\varepsilon > 0$. 原点不稳定.

$\varepsilon = 0$ 线性稳定.

当 $\varepsilon < 0$, 设 $V^*(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2$

$V^*(x,y,z) \le 0$

$a=1$ $b=2$. $c=1$. $\Omega = \{z > -1\}$.

取 $a=1$

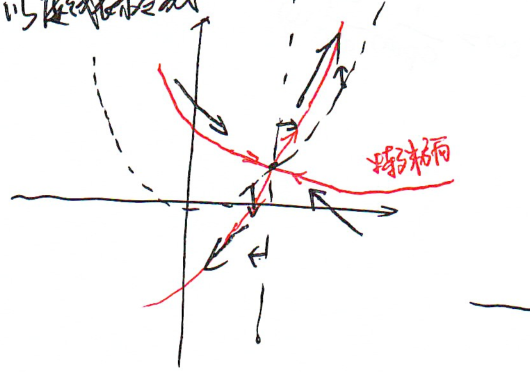
0附近的渐近

零倾斜线法 nullcline

例 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = x-2. \end{cases}$

平衡点: $(2,4)$

以虚线表示零线



令 $\tilde{y} = y-4$, $\tilde{x} = x-2$

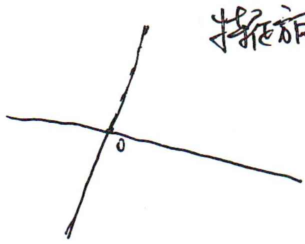
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y} - 4\tilde{x} - \tilde{x}^2 \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases} \xrightarrow{\text{线性化}} \begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = -4\tilde{x} + \tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{x} \end{cases}$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

$D=-1$ 鞍点 $T=-4$

特征方向: $k = \frac{1}{-4+k}$ $k^2-4k-1=0$

$k = 2+\sqrt{5}$ $2-\sqrt{5}$



例

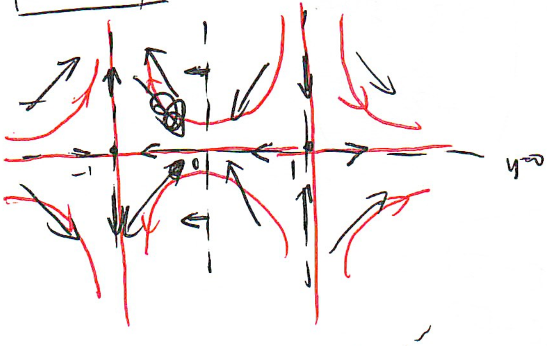
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -xy + a(x^2-1) = -x\left(y - a\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

x - nullcline $x = \pm 1$

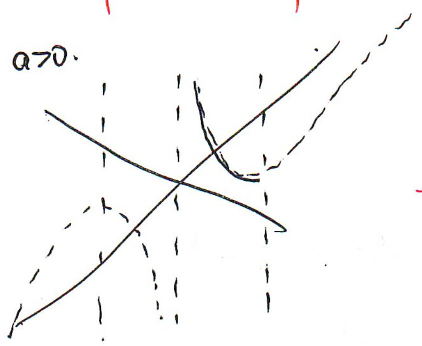
y - nullcline $x=0$. $y = a\left(x - \frac{1}{x}\right)$

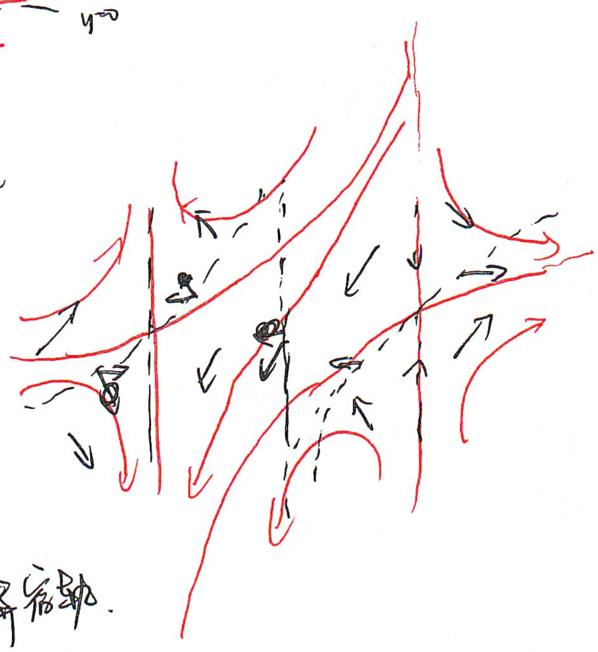
$$y = \frac{a(x^2-1)}{x}$$

$\boxed{\text{if } a=0}$



if $a>0$.





连接两个鞍点的轨线 ⇒ 异宿轨.

$$\tilde{x} = \int_a^x \frac{1}{p(s)}\, ds$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2} + \left[\lambda \tilde{r}(\tilde{x}) + \tilde{q}(\tilde{x})\right]\tilde{y} = 0$$

$\tilde{y}(\tilde{x}) = y(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right)$$

$$p\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) = p(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right) = \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2} + \left[\underbrace{\lambda c^2 p(x) r(x)}_{\tilde{r}(\tilde{x})} + \underbrace{c^2 p(x) q(x)}_{\tilde{q}(\tilde{x})}\right]\tilde{y} = 0$$

$y(a) = \tilde{y}(0)$

$y(b) = \tilde{y}(1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{x}}{dx}\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{1}{cp(x)}\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}$$

$$y'(a) = \frac{1}{cp(a)}\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}(0)$$

$$\tilde{x} := \frac{1}{c}\int_a^b \frac{1}{p(s)}\, ds$$

令 $c = \int_a^b \frac{1}{p(s)}\, ds$

Thm 7.2.

令 ϕ 是 (7.13) 的解，满足 $y(0)=\sin\alpha$. $y'(0)=\cos\alpha$

则 $\phi(x,\lambda)$ 满足 (7.14) 第一条件. 要证其对于 λ 离散，它满足第二条件

极坐标 $\begin{cases} \phi'(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda) \\ \phi(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda). \end{cases}$ $\rho>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho'\sin\theta+\theta'\rho\cos\theta=\rho\cos\theta \\ \rho'\cos\theta-\theta'\rho\sin\theta+(\lambda r+q)\rho\sin\theta=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta'=\cos^2\theta+(\lambda r+q)\sin^2\theta=F(x,\theta,\lambda). \\ \theta(0,\lambda)=\alpha. \end{cases}$$

由于 $|F(x,\theta,\lambda)|\le 1+|\lambda|r(x)+|q(x)|$

由延拓定理，方程的解在 $[0,1]$ 上

由于 $F(x,\theta,\lambda)$ 关于 λ 连续可微 $\Rightarrow \theta(x,\lambda)$ 关于 λ 连续可微 在 $(-\infty,+\infty)$ 上.

lem 7.3. 对于任意固定的 $x_0\in(0,1]$. $\theta(x,\lambda)$ 关于 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 是连续的，并且严格递增

Pf 对方程求导 $\frac{d}{dx}\boxed{\frac{d\theta}{d\lambda}}=-2\cos\theta\sin\theta\boxed{\frac{d\theta}{d\lambda}}+2\sin\theta\cos\theta(\lambda r+q)\boxed{\frac{d\theta}{d\lambda}}+r\sin^2\theta$

一阶线性方程 $=\underbrace{\left[-2\cos\theta\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta(\lambda r+q)\right]}_{E(x,\lambda)}\frac{d\theta}{d\lambda}+r\sin^2\theta$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda}=\int_0^x r(t)\sin^2\theta(t,\lambda)e^{\int_t^x E(s,\lambda)ds}dt>0 \qquad \square$$

lem 7.4 对固定的 $x_0\in(0,1]$ 有 $\theta(x_0,\lambda)>0$. 且 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\theta(x_0,\lambda)=0$

特别地. 令 $\omega(\lambda)=\theta(1,\lambda)$. 当 $\lambda\to-\infty$. $\omega(\lambda)\to 0$.

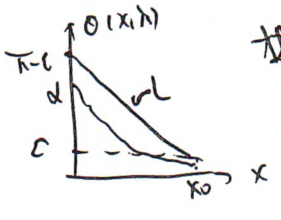
Pf: 若 $\alpha>0$. 存在 $x_1\in(0,1]$. s.t $\theta(x,\lambda)>0$.

若有 $\bar{x}\in(0,1]$ s.t $\theta(\bar{x},\lambda)=0$ 且 $\theta(x,\lambda)>0$. on $x\in(0,\bar{x})$.

因此 $\theta'(\bar{x},\lambda)\le 0$. 但由方程 $\theta'(\bar{x},\lambda)=1>0$. 矛

若 $\alpha=0$ $\theta'(0,\lambda)=1>0$. $\exists$ $x_1>0$, s.t $\theta(x,\lambda)>0$. 对于 $\forall$ $x\in(0,x_1)$.

想证解一直在直线下方. 取 ε s.t $\varepsilon<\alpha<\pi-\varepsilon$.



$\theta(x,\lambda)<L(x)$. on $x\in(0,x_1)$.

断 $\theta(x,\lambda)$ 连续. s.t $\exists x_1\in[0,1]$. s.t $\theta(x,\lambda)<L(x)$ on $x\in(0,\bar{x})$; $\theta(\bar{x},\lambda)=L(\bar{x})$.

反证. $\exists\bar{x}$. s.t $\theta(x,\lambda)<L(x)$ 令 $m=\min\limits_{[0,1]}r(x)$. $M=\max\limits_{[0,1]}p(x)$

$\theta'(\bar{x},\lambda)\ge L'(\bar{x})=-\frac{\pi-2\varepsilon}{x_0}$. $\sin x$

lem. 7.5 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \theta(x_0,\lambda) = +\infty$, 推导可以 $\omega(\lambda)\to+\infty$ 当 $\lambda\to+\infty$.

for Any fixed $x_0\in[0,1]$

Pf: prove by contradiction

$\exists K \overset{\in\mathbb{Z}}{>0}$ s.t. $\theta(x_0,\lambda)\le 2K\pi$ for $\forall\lambda<+\infty$.

~~N=max~~ 倒球

令 $m=\min\limits_{[0,1]} r(x)$

$$\theta' = \cos^2\theta + \underbrace{(\lambda r+q)}_{>N^2}\sin^2\theta \quad (\forall N)$$

$$\ge \cos^2\theta + N^2\sin^2\theta$$

$$x_0 = \int_0^{x_0} dx \le \int_0^{2K\pi}\frac{1}{\cos^2\theta+N^2\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{2K\pi}{N}$$

N是任意大的, 矛盾.

the proof of Thm 7.2.

$\phi(x,\lambda_n)$ 为 λ_n 对应的~

$\phi(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\sin\theta(x,\lambda)$

$\phi'(x,\lambda)=\rho(x,\lambda)\cos\theta(x,\lambda)$

~~编号~~ 代入第二边值. $\Rightarrow \sin(\theta(1,\lambda)-\beta)=0$

$\theta(1,\lambda)=\beta+k\pi$ $\quad \theta>0.$ $\quad \beta\in(0,\pi]$

$\Rightarrow k=0,\cdots$ 且每个 k 对应一个 λ_k (单调&介值)

于是, λ_k 为 (7.13), (7.14) 的特征值.

$\phi(x,\lambda_k)$ 为 λ_k 的特征函数.

再证明 $\phi(x,\lambda_k)$ 在 ~~[0,1]~~ (0,1) 上恰有 k 个零点 $(0<\beta<\pi)$.

$\theta(0,\lambda_k) \overset{0<\ \ <\pi}{=} \alpha.$ $\quad \theta(1,\lambda_k)=\beta+k\pi<(k+1)\pi$
$k\pi<$

$\forall j\in[1,k]$.

$\exists x_j\in(0,1)$ s.t. ~~θ~~ $\theta(x_j,\lambda_k)=j\pi$ (介值).

x_j 是 $\phi(x,\lambda_k)$ 的零点.

$\frac{d\theta}{dx}\Big|_{x_j} = c^2+(\lambda r+q)s^2 = 1 \Rightarrow$ 仅有 x_j 一个点使 $\theta(x_j,\lambda_k)=j\pi$.

$k=0.$ 若 $j\ge 1$. $\theta(x_i,\lambda_0)=j\pi$. 令 $\bar{x}_j=\sup\{x_j \mid \theta(x_j,\lambda_0)=j\pi\}$

$\Rightarrow \theta(\bar{x}_j,\lambda_0)=j\pi \Rightarrow \theta'(\bar{x}_j,\lambda_0)\le 0$ ↯.

$$\phi_n\phi_m'' + (\lambda_m r + q)\phi_m\phi_n = 0$$

$$\phi_m\phi_n'' + (\lambda_n r + q)\phi_m\phi_n = 0$$

$$\Rightarrow \phi_n\phi_m'' - \phi_m\phi_n'' + (\lambda_m - \lambda_n) r\phi_m\phi_n = 0$$

$$\Rightarrow \int \phi_n\phi_m'' - \phi_m\phi_n''$$

$$= \phi_n\phi_m' - \phi_m\phi_n' \Big|_0^1 - 0. + (\lambda_m - \lambda_n)\int r\phi_m\phi_n = 0.$$

$$\phi_n(1)\phi_m'(1) - \phi_m(1)\phi_n'(1) - \phi_n(0)\phi_m'(0) + \phi_m(1)\phi_n'(0).$$

$$= \begin{vmatrix} \phi_n(1) & \phi_m(1) \\ \phi_n'(1) & \phi_m'(1) \end{vmatrix} - \cdots = 0.$$

常微分方程与偏微分方程的转化

e.g. $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0.$ $u = u(x,t).$ $t \in \mathbb{R}.$ $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma > 1.$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

设 $u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$ (有相似) 若是解

$u(x,t) \longmapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) \triangleq u^\lambda(x,t).$ 也是解

代入为 $\lambda^{\alpha+1}(\partial_t u)(\lambda^\beta x, \lambda t). - \lambda^{\alpha\gamma+2\beta}(\Delta u^\gamma)(\lambda^\beta x, \lambda t) = 0$

$$\Rightarrow \partial_t u - \lambda^{\alpha\gamma+2\beta-\alpha-1}\Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\gamma + 2\beta - \alpha - 1 = 0. \quad \alpha = \frac{1-2\beta}{\gamma-1}.$$

$$-\alpha\frac{1}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \beta\frac{x}{t^{\beta+1+\alpha}}\cdot(\nabla v)\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{1}{t^{\alpha\gamma+2\beta}}\Delta(v^\gamma)\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

$y = \frac{x}{t^\beta}$

$$\Rightarrow \alpha v + \beta y\nabla v + \Delta(v^\gamma) = 0$$

令 $v(y) = V(|y|).$ 极坐标 令 $\alpha = n\beta.$ $\Rightarrow \partial_r\left(\beta r^n V + r^{n-1}\partial_r(V^\gamma)\right) = 0$