2.28.

一 概率论的基本概念

1. 概率空间

def 1.1. 样本点：随机试验的每个可能的基本结果
样本空间，样本点全体

ex 1.1 $C[0,1]$ 一个复杂的例子

事件指 Ω 的子集 ⟶ "事件的运算 ⟷ 集合的运算"

若试验的结果 $\omega \in A$，则称事件 A 发生.

ϕ 不可能事件

$\omega \in A\cup B$，A 或 B 发生；$\omega \in A\cap B$ A 和 B 同时发生；$\omega \in A^c$，A 不发生

$A \subseteq B$，A 发生则 B 发生；$A\cap B=\phi$，A, B 不相容（同时发生）；$A_i\cap A_j = \phi$ $\{A_j\}$ 事件列不相容

Question：是否 Ω 的每个子集都是随机事件？
基本要求，有限交，并，补封闭
注意到 有限时间也可能完成不了 ⟹ 推至可列

My note
似乎抽象测度空间上不太谈论不可测集，而是直接定义一个需要的对象为 $\mathcal{M}$

$\boxed{\text{def 1.2}}$ 称 $\underbrace{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)}_{\text{非空集族}}$ ~~为其~~ 为 σ-代数，若

$\mathcal{F}$ 对补和可数并封闭，且 $\phi \in \mathcal{F}$.

EX 1.3 σ-algebra
(1) $\{\phi, \Omega\}$
(2) $A\subseteq\Omega$ $\{\phi, A, A^c, \Omega\}$
(3) $\#\Omega < \infty$ 常用 $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

idea:
概率测度 重复试验 N 次，A 发生 N_A 次，当 $N\to\infty$，$\frac{N_A}{N} \to$ 某数 $:= P(A)$

$\Rightarrow P(\phi)=0 \quad P(\Omega)=1$

当 $A\cap B=\phi$ $N_{A\cup B} = N_A + N_B \Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)$

$\boxed{\text{def 1.3}}$ 称 $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 为一个概率测度，若
(1) $P \geq 0$
(2) $P(\Omega)=1$
(3) $\{A_j\}$ 不相容 $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$

称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间

例：古典概型，有限概率空间，样本点等可能

(2)(3) 蕴含 $P(\phi)=0$

EX 1.5 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$ $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$

$P(A):=\sum_{i\in A}2^{-i}$

$A,B\in\mathcal{F}$

Thm 1.4 (1) $P(A)+P(A^c)=1$

(2) $B\supseteq A$ $P(B)=P(A)+P(B\setminus A)\geq P(A)$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus(A\cap B))=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(4) Jordan formula $P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$

Thm 1.5 (1) 若 $A_1\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ ~~$\lim\bigcup A_n$~~ $A:=\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ | 测度的连续性

则 $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$ | 基于 $\mu(\Omega)=1$.

(2) 若 $A_1\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$ $A=\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$

则 $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$

pf: See real analysis. □

2. 条件概率

Def 2.2.1 对 $P(B)>0$, B发生条件下A发生的概率为 $P(A|B):=\frac{P(AB)}{P(B)}$

Rmk. 乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)$

Ω的划分是指 $B_1,\cdots,B_n\in\mathcal{F}$ ($n<\infty$ or $n=\infty$), $B_i\cap B_j=\emptyset$. $\bigcup_i B_i=\Omega$

Thm 2.2 设 $B_1,\cdots,B_n$ 为Ω的划分 且 $P(B_i)>0$, 则 $P(A)=P(A\cap\Omega)$

$$=P(A\cap(\bigcup_{i}^{n}B_i))=P(\bigcup_{i}^{n}AB_i)\xlongequal[\text{不相容}]{\text{可列}}\sum_{i}^{n}P(AB_i)=\boxed{\sum_{i}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)}$$

这一公式被称为全概率公式 (由原因推测结果?)

Lem 2.3 设 $B_1,\cdots,B_n$ 为Ω的划分 $\forall i\in\mathbb{N}$. $P(B_i)>0$ 且$P(A)>0$ 则 ~~B~~ $P(B_k|A)$

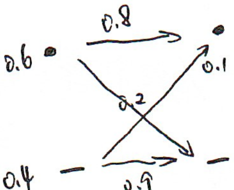
$$P(B_k|A)=\frac{P(B_kA)}{P(A)}=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}=\boxed{\frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{\sum_{i}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}}$$

Rmk: LPZ: 知道结果找原因

EX. 2-1

A={发·}

B={收到}



$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(\cancel{A|B}\ B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)\cdot P(A^c)}=\frac{0.6\cdot 0.8}{0.6\cdot 0.8+0.4\cdot\cancel{0.9}\,0.1}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$

独立

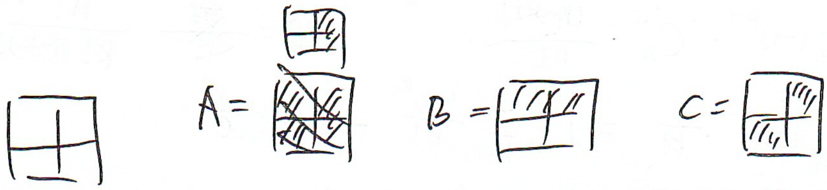
$\boxed{\text{Def 2.4}}$ 若 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A,B 独立.

更一般地，$\{A_i\}_{i\in I}$ 相互独立指 $\forall \underset{\text{有限}}{J}\subset I$ 均有 $P(\bigcap_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in J}P(A_i)$

Rmk (1) 有限多个 $A_1,\cdots,A_n$ 相互独立，指 $\forall k\geq 2$ $\forall i_1<\cdots<i_k\in\{1,\cdots,n\}$，均有 $P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k})$

(2) 两两独立与相互独立 $\{A_i\}_{i\in I}$ 两两独立 指 $\forall i,j\in I$. $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$

$\boxed{\text{EX 2.2}}$



$P(AB)=P(BC)=P(BC)=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ A,B,C 两两独立

$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$.

$\boxed{\text{lem 2.5}}$ 若 A,B 独立 $\Rightarrow\begin{cases}A^c\text{ 与 }B^c\text{ 独立}\\ A\text{ 与 }B^c\\ A^c\text{ 与 }B^c\end{cases}$

若 $\underset{\text{有限}}{A_1,\cdots,A_n}$ 互相独立 $\Rightarrow A_1^c,\cdots,A_n^c$ 互相独立.

proof. $P(AB^c)=\cancel{P(A)}\ P(A\setminus B)=P(A\setminus AB)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(B^c)$

$\boxed{\text{EX 2.3}}$ 独立重复~~事件~~试验中，小概率事件必然发生.

记 A_k: 为 A 在第 k 次事件发生的概率

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k)=1-P(\bigcap_{k=1}^n A_k^c)=1-\prod_{k=1}^n(1-P(A_k))$$

$$=1-(1-\underset{>0}{\varepsilon})^n\rightarrow 1\quad \text{as } n\rightarrow\infty$$

3. 概率模型

$\boxed{\text{EX 3.1}}$ 生日问题 365天 $\underset{\text{有两人相同}}{P(A)}=1-\frac{A_{365}^n}{365^n}$

$\boxed{\text{EX 3.2}}$ 古典概型 Ω 有限 不同 $a_1,\cdots,a_n$ 选 m 个

	不放	放
有序	A_n^m	n^m
无序	C_n^m	$\boxed{C_{m+n-1}^m}$

插板 $m+n-1$ 中选出 m 个球的位置.

n 个球放入 $\underset{}{\overset{\geq n}{N}}$ 个盒中 $A=\{$前 n 个盒子各1个$\}$

Case I 球可分，容量无限

$P(A)=\frac{n!}{N^n}$

Case II 球不可分，容量无限

$P(A)=\frac{1}{C_{n+m-1}^m}$

Case III 球不可分，每盒至多一个

$P(A)=\frac{1}{C_N^n}$

4. $\boxed{EX\ 3.3}$ $\sigma \in S_n$ 对称群. 记 $B=\{\sigma$ 至少有一个不动点$\}$ $P(B)=?$

记 $A_i=\{\sigma(i)=i\}$ 则 $B=\bigcup_1^n A_i$

注意 $i_1<\cdots<i_k$ $P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_1\cdots A_k)=\frac{(n-k)!}{n!}$

那么, 由 Jordan 公式

$$P(B)=P(\bigcup_1^n A_i)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})$$

$$=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\cdot C_n^k\cdot\frac{(n-k)!}{n!} \qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k!}=1-\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}\to 1-\frac{1}{e}$$

$\boxed{EX\ 3.4}$ P 有 k、D 有 N−k 赌局正反概率相同 P 输光的概率

$A_k=\{$初始有 k 输光$\}$ $B=\{$P 首次 +1$\}$

由全概率公式 $P(A_k)=P(B)P(A_k|B)+P(B^c)P(A_k|B^c)$

$$=\frac{1}{2}P(A_{k+1})+\frac{1}{2}P(A_{k-1})$$

$p_k=P(A_k)$

初始条件 $p_0=0$ $p_N=1$ $\Rightarrow p_k=1-\frac{k}{N}$

$\boxed{EX\ 3.5}$ (Polya 坛子) b 个黑球. r 个红球, 从中取一个, 放回去. 再放 c 个同色球

记 $B_n=\{$第 n 次抽取黑球的概率$\}$ 求 $P(B_n)$

观察/计算知 $\boxed{\text{概率和次序无关}}$!

在 n 次抽取中, 抽中 k 次黑球的概率为 (准确来说这叫一种情况的概率)

$$D_k(b)=\frac{b(b+c)\cdots(b+(k-1)c)\,r(r+c)\cdots(r+(n-k+1)c)}{(b+r)(b+r+c)\cdots(b+r+(n-1)c)}$$

$$P(B_{n+1})=\sum_k P(A_k)P(B_{n+1}|A_k)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}D_k(b)\frac{b+kc}{b+r+nc}=\sum_k\binom{n}{k}D_k(b+c)\cdot\frac{b}{b+r}$$

记 $A_k=\{$前 n 次中 k 次黑$\}$

$$=\frac{b}{b+r}\underbrace{\boxed{\sum_k\binom{n}{k}D_k(b')}}_{\text{恒等式}}=\frac{b}{b+r}$$

$\boxed{EX\ 3.6}$ (概率数论) $\Omega_N=\{1,\cdots,N\}$ 古典概型. 记 $A_q=\{k\in\Omega_N: q|k\}$, 当 p,q 互素且 $pq|N$,

必有 A_p, A_q 独立. $P(A_pA_q)=P(A_{pq})=\frac{1}{N}\frac{N}{pq}=\frac{1}{pq}=P(A_p)P(A_q)$

当 $N\to\infty$. $\boxed{\text{渐近处理}}$

4. 随机变量与分布函数

Def 4.1 对概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$，$X: \Omega \to \mathbb{R}$ 若 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

则称 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个随机变量

这是可测函数…

Def 4.2 X 为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的一个随机变量，称函数

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\})$$

为 X 的分布函数

Borel-Stieltjes 测度有类似的分布函数

EX 4.1 掷硬币 $\Omega = \{H, T\}$　$X(H) = 1$，$X(T) = -1$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 1 \\ \frac{1}{2} & x \in [-1, 1) \\ 0 & x < -1 \end{cases}$$

单增，右连续，"有界"

Thm 4.3 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则

(1) 单调增　$x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$

(2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$　$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $F(x+0) = F(x)$　i.e. 右连续.

proof. (1) $F(y) - F(x) = P(\{\omega \in \Omega : x < X(\omega) \le y\}) \ge 0$

(2) $A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le -n\}$　$n = 1, 2, \cdots$

$A_n \downarrow$　$\bigcap_1^\infty A_n = \phi$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} F(-n) = 0$　i.e. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$　by monotone.

同理. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(3) $B_n = \{X \le x + \frac{1}{n}\}$　$B_n \downarrow$　$\bigcap_1^\infty B_n = \{X \le x\}$

$\Rightarrow F(x + \frac{1}{n}) \to F(x)$　by monotone. $\lim_{\tilde{x} \to x^+} F(\tilde{x}) = F(x)$. □

Rmk 称分布函数为满足以上三条的函数，那么这一定是某个随机变量的分布函数；分布函数忘记了样本空间的信息

EX 4.3 常值随机变量 $X(x) = c$　$\forall x \in \Omega$. $\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 & x \ge c \\ 0 & x < c \end{cases}$

Rmk 概率为 1 被视为蕴含了最全的信息.

$\boxed{\text{EX 4.4}}$ Bernoulli 两点分布

$P(X=1)=p,\ P(X=0)=q \quad 0\le p\le 1,\ p+q=1$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}1 & x\ge 1\\ q & 0\le x<1\\ 0 & x<0\end{cases}$$

分佈函数就是一个 r.v.

$\boxed{\text{prop 4.4}}$ (1) $P(X>x)=1-F(x)$

(2) $P(x<X\le y)=F(y)-F(x)$

(3) $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$ （右连续，左边不太一样）

proof (3): $A_n=\{x-\frac{1}{n}<X\le x\}$ 则 $A_n\downarrow$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\}$

$\Rightarrow P(A_n)=F(x)-F(x-\frac{1}{n})$

$\Rightarrow P(X=x)=F(x)-F(x-0)$ 由单调性及连续性，确有极限

随机变量的等价刻画

$\boxed{\text{Fact}}$ $\mathcal{F}_i\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ 是个 σ-代数 $\Rightarrow \bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ 也是个 σ-代数.

Borel-σ代数：包含形如 $(a,b]$ 区间的最小 σ-代数记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\cdots\ \prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\ \cdots\quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$\boxed{\text{Thm 4.5}}$ X is a r.v. on $(\Omega,\mathcal{F},P)$，$\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，有

$X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$

proof: 记 $\mathcal{A}=\{A\subseteq\mathbb{R}: X^{-1}(A)\in\mathcal{F}\}$，不难有 $\mathcal{A}$ 是一个 σ-代数

$\Rightarrow \mathcal{A}\supseteq\mathcal{B}(\mathbb{R})$ （因为 $(-\infty,a]$ 在 $\mathcal{A}$ 中） $\square$

$\boxed{\text{prop 4.6}}$ X,Y are r.v. then so is $X+Y$.

proof: $\{X+Y\le z\}=\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(\{X\le z-q\}\cup\{Y\le q\})$

LHS $\subseteq$ RHS : $\{X+Y\le z\}\subseteq\{X\le z-q\}\cup\{Y\le q\}$

RHS $\subseteq$ LHS : if $\omega\notin$ LHS，$X(\omega)+Y(\omega)>z$

$\Rightarrow X(\omega)>z-Y(\omega)$

$\Rightarrow X(\omega)>q>z-Y(\omega)$

i.e. $X(\omega)>q$，$Y(\omega)>z-q$

$\Rightarrow \omega\notin$ RHS $\square$

$\boxed{\text{Rmk}}$ 这个结论更重要.

5. 随机向量

$\boxed{\text{Def 5.1}}$ $X_1,\cdots X_n$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量. 则称 $X=(X_1,\cdots X_n)$ 为一个 n 维随机向量. 而 n 元函数 $F(x_1,\cdots x_n)=P\left(X_1\le x_1,\cdots X_n\le x_n\right)$ 为随机向量 X 的联合分布函数.

以 $n=2$ 为例

$\boxed{\text{Thm 5.2}}$ (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)$ 有

(1) $F(x,y)$ 关于 x,y 分别单调增

(2) $F(x,y)$ 关于 x,y 分别右连续

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$, $\lim\limits_{x,y\to+\infty}F(x,y)=1$

(4) $\forall\ x_1\le x_2,\ y_1\le y_2.$

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

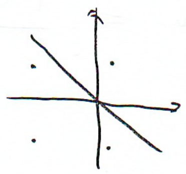
proof (4): $P(x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2)=P(X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2)-P(X\le x_1,y_1<Y\le y_2)$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0. \quad \square$$

$\boxed{\text{Rmk}}$ 令 y_1 or $x_1\to-\infty$ 可知 (2)(3)(4) $\Rightarrow$ (1)

但 (1)(2)(3) $\not\Rightarrow$ (4) 如

$$F(x,y)=\begin{cases}1 & x+y\ge 0\\ 0 & x+y<0\end{cases}$$



$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$ So $F_Y(x)$.

$\boxed{\text{Def 5.3}}$ 随机向量 X

(1) 若 X 只取 $\mathbb{R}^n$ 中可数个不同的点. 则称 X 为 n 维离散型随机向量.

$$f(x_1,\cdots x_n):=P(X_1=x_1,\cdots X_n=x_n)$$

(2) 若存在非负可积函数 $f(x_1,\cdots x_n)$ s.t.

$$F(x_1,\cdots x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1,\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

称 X 为连续型随机向量 并称 $f(x_1,\cdots x_n)$ 为 X 的联合密度函数.

$\boxed{\text{EX 5.1}}$ "三面币" H. T. E. $H_n+T_n+E_n=n$

$$P(\underset{\substack{\| \\ (h,t,e)}}{H_n,T_n,E_n})=\frac{n!}{h!t!e!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

8. $\boxed{\text{EX 5.2}}$ $\Omega=[0,a]$ $a>0$、$\mathcal{F}=\{B\cap\Omega:\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

定义概率测度 $P(A)=\frac{|A|}{a}$.

有自然的随机变量 $X(\omega)=\omega$ $\qquad P(X\le x)=\frac{x}{a}\quad x\in[0,a]$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & x\in[0,a]\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$

"均匀分布"

$\boxed{\text{Rmk}}$ 随机变量分类原因.

(1) 分布函数(单调)只有可数个不连续点.

(2) 由 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理，$F=c_1F_1+c_2F+c_3F_3$

$c_1+c_2+c_3=1$. F_i 分别为离散型. 绝对连续型. 奇异函数

离散型 ~~分布函数~~ 随机变量 $\Rightarrow$ 分布函数有跳跃

连续型 : $f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ 边际密度函数.

例如 $F(x,y)$ 连续. 且 $F'(x)$ 除有限点外存在 $\Rightarrow f=\frac{\partial F}{\partial x\partial y}$.

一元密度的注记

(1) $\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(u)\,du=\frac{P(x_0<X\le x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

(2) 密度函数不唯一

(3) $\int_{\mathbb{R}} f=1 \qquad P(X=a)\le P(a-\frac{1}{n}<X\le a)=\int_{a-\frac{1}{n}}^{a} f(x)\,dx\to 0$ as $n\to\infty$.

i.e. $P(X=a)=0$

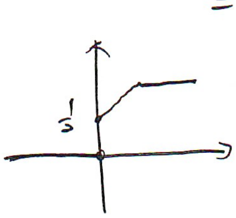
(4) X 连续型 $\Longleftrightarrow$ F 绝对连续.

$\boxed{\text{EX 5.2'}}$ 例 X 是 $[0,1)$ 上的均匀分布, i.e. $f(x)=1\ \forall x\in[0,1)$.

掷均匀硬币. $H\Rightarrow Y=0$, $T\Rightarrow Y=X$ $\quad Y$ 的分布?

$P(Y\le y)=P(Y\le y\mid H)P(H)+P(Y\le y\mid T)P(T)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y$



因此Y既不是离散型也不是连续型，当然可以写成组合

6. 随机变量的独立性.

$\boxed{\text{Def 6.1}}$ $X_1,\cdots X_n$ are r.v.s on $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是相互独立的. 若

$P(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n)=P(X_1\le x_1)\cdots P(X_n\le x_n)$. i.e.

$F_X(x_1,\cdots x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$.

$\boxed{\text{Rmk}}$ 由任意性, 这个定义与"相互独立"(之前)的定义是一致的.

$\boxed{\text{Thm 6.2}}$ $X_1,\cdots X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow \forall B_1,\cdots B_n\in\mathcal{B}$. $P(X_1\in B_1,\cdots X_n\in B_n)=P(X_1\in B_1)\cdots P(X_n\in B_n)$.

$\boxed{\text{Def 6.3}}$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. is borel-measurable ~~if~~ $g^{-1}(B)\in\mathcal{B}$ for $\forall B\in\mathcal{B}$.

(这里可弱化到 $\{g(y)\le x\}\in\mathcal{B}$.).

$\boxed{\text{Thm 6.4}}$ (通过复合造出更多的随机变量) 设 $g_1,\cdots g_n$ 是一元 Borel 可测函数, 若 $X_1,\cdots X_n$ 相互独立 $\Rightarrow g_1(X_1),\cdots g_n(X_n)$ 也是相互独立的.

proof. 记 $B_i=\{g_i(x)\le x_i\}\in\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow P&(g_1(X_1)\le x_1,\cdots g_n(X_n)\le x_n)\\ &=P(X_1\in B_1,\cdots X_n\in B_n)\\ &=P(X_1\in B_1)\cdots P(X_n\in B_n)\\ &=P(g_1(X_1)\le x_1)\cdots P(g_n(X_n)\le x_n).\end{aligned}$$ $\square$

以下具体至离散型.

$\boxed{\text{Thm 6.5}}$ 若 X,Y 是离散型的随机变量. X,Y 独立, 则 $\Leftrightarrow P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$ $\forall x,y$

(分布列变量分离)

proof. 只需 $\Leftarrow$.

$$P(X\le x,Y\le y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=}\Big(\sum_{x_i\le x}P(X=x_i)\Big)\Big(\sum_{y_j\le y}P(Y=y_j)\Big)=P(X\le x)P(Y\le y)$$ $\square$

$\Rightarrow$ "$f_X(x)=F_X(x)-F_X(x-0)$"

$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$$\begin{aligned}\cancel{f(x,y)=}\ f_X(x)f_Y(y)&=\big(F_X(x)-F_X(x-0)\big)\big(F_Y(y)-F_Y(y-0)\big)\\ &=F_X(x)F_Y(y)-F_X(x-0)F_Y(y)-F_X(x)F_Y(y-0)+F_X(x-0)F_Y(y-0)\\ &=F(x,y)-F(x-0,y)-F(x,y-0)+F(x-0,y-0)\\ &=f(x,y)\end{aligned}$$

当然可以换回 P 看. $\square$

$\boxed{\text{Thm 6.6}}$ (连续型的独立，质量函数 ⟷ 密度函数) 设 X，Y 有密度 $f_1(x)$，$f_2(y)$，则

X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ ~~$f(x,y)$~~ 联合密度是 $\prod f_i$

proof ($\Rightarrow$) $F(x,y) = F_X(x) F_Y(y) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_1(u) f_2(v)\,du\,dv$$

($\Leftarrow$) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_1(u) f_2(v)\,du\,dv$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du\right)\left(\int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv\right)$$

$$= F_X(x) F_Y(y).$$

□

$\boxed{\text{Rmk}}$ 看成：独立类比变量分离.

二、离散型随机变量

1、典型离散分布

分布列 $p_k = P(X = x_k)$ $\sum_k p_k = 1$

$\boxed{\text{EX 1.1}}$ (二项分布) $\underbrace{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad k=0,\cdots n}_{X\text{的分布列}}$

记 $X \sim B(n,p)$

$\boxed{\text{EX 1.2}}$ (几何分布) X的分布列 $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k=1,\cdots$

$P(X>k) = (1-p)^k$

$\boxed{\text{Rmk}}$ 无记忆性、$P(X'=k) = P(X=m+k \mid X>m) = \dfrac{p(1-p)^{m+k-1}}{(1-p)^m} = p(1-p)^{k-1}$

$\boxed{\text{Prop 1.1}}$ (几何分布的等价刻画) 离散型随机变量 X 取值为正整数. 若 $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(X=m+1 \mid X>m)$ 与m无关 (无记忆性) 则 X 服从几何分布.

proof. 记 $p = P(X=m+1 \mid X>m)$. $r_k = P(X>k)$

$$p = \frac{P(X=k+1)}{r_k} = \frac{r_k - r_{k+1}}{r_k} = 1 - \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

$$\Rightarrow \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1-p \qquad r_0 = 1 \Rightarrow r_k = (1-p)^k$$

$$P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k) = p(1-p)^{k-1}. \quad \square$$

$\boxed{\text{EX 1.3}}$ (poisson分布) $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\boxed{\text{推导}}$ 假设 V 每次只放出一个粒子, $\Delta V = \frac{V}{n}$ 小块放出粒子概率为 P.

$\begin{pmatrix} p=u\Delta V \\ \lambda=uV \end{pmatrix}$ $\lambda = pn$, 独立性.

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

即, 满足 $p = u\Delta V$, $\lambda = uV$, 独立性, 可得到 poisson分布 $\square$

$\boxed{\text{EX 1.4}}$ (Gibbs分布) $P(X=E_j) = p_j$. 平均能量 $U = \sum_{i=1}^{n} p_i E_i$

熵最大时. $p_i = \dfrac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ (Z 正规化常数)

β 由U决定. (温度导数?)

$\boxed{\text{EX 1.5}}$ (泊松截断?) 抛掷一次 $P(H)=p$. X、Y表示 H, T 出现的次数，X Y 不独立.

$$P(X=Y=1)=0 \qquad P(X=1)P(Y=1)=pq$$

若抛掷N次 $N\sim P(\lambda)$，则 X, Y 独立.

$$\begin{aligned}
P(X=x, Y=y) &= P(X=x, Y=y, N=x+y) \\
&= P(X=x, Y=y \mid N=x+y)\, P(N=x+y) \\
&= \binom{x+y}{x} p^x q^y \frac{\lambda^{x+y}}{(x+y)!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda q)^y}{y!} e^{-\lambda q} = f_X(x) f_Y(y) \quad \square
\end{aligned}$$

可算

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \sum_y P(X=x, Y=y) \\
&= \sum_y \left(\frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p}\right) \cdot \frac{(\lambda q)^y}{y!} e^{-\lambda q} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

2. 数学期望.

$\boxed{\text{Def 2.1}}$ 离散型随机变量的分布列 $P(X=x_k)=p_k$ 若 $\sum |x_k| p_k < \infty$.

则 $\sum_k x_k p_k := \mathbb{E}[X]$. 称为期望. $\left(\sum_{x_k} x_k f(x_k)\right)$

$\boxed{\text{Lem 2.2}}$ $G: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is Borel measurable. $Y=G(X)$

then $\mathbb{E}[Y]=\sum_x g(x)f(x)$ where the right side is convergent absolutely.

proof. Y的分布列 $P(Y=y) = P(G(X)=y) = P\left(\bigcup_{G(x)=y}\{x\}\right)$

$$= \sum_{G(x)=y} P(x).$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum y P(X=y) = \sum y \sum_{G(x)=y} P(x) = \sum_x G(x) f(x). \quad \square$$

$\boxed{\text{Def 2.3}}$ k阶矩 $m_k=\mathbb{E}[X^k]$. k阶中心矩 $\sigma_k=\mathbb{E}[(X-m_1)^k]$，特别的

均值 $\mu=\mathbb{E}[X]$. 方差 $\mathrm{Var}[X]=\mathbb{E}[(X-\mu)^2]$. 标准差为 $\sqrt{\mathrm{var}(X)}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \sum_x (x-m_1)^2 f(x) &= \sum x^2 f(x) - 2m_1 \sum x f(x) + m_1^2 \sum_x f(x) \\
&= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 \\
&= m_2 - m_1^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(X) \le \mathbb{E}[X^2]$$

$\boxed{EX\ 2.1}$ ~~B(n,p)~~ $P(X=0)=1-p,\ P(X=1)=p$

Bernoulli $\mathbb{E}[X] = 0\,(1-p) + 1\cdot p = p$

$$\mathbb{E}[X^2] = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

$\boxed{EX\ 2.2}$ $B(n,p)$ $\mathbb{E}[X] = \sum k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np\big((n-1)p\big) + np = np(np+q)$$

$$Var(X) = npq$$

$\boxed{EX\ 2.3}$ $X \sim P(\lambda)$ $k=0\ \dots$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = \lambda^2 + \lambda$$

$Var(X) = \lambda$. □

$\boxed{Thm\ 2.4}$ 期望的基本性质

1、非负性

2、归一性

3、线性性. $\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$.

proof of 3. $\mathbb{E}[aX+bY] = \sum_{x,y} (ax+by) P(A_x \cap B_y)$

$$= \sum_{x,y} ax\, P(A_x \cap B_y) + \sum_{x,y} by\, P(A_x \cap B_y)$$

$$= a \sum_x x \sum_y P(A_x \cap B_y) + b \sum_y \sum_x y\, P(A_x \cap B_y)$$

$$= a \sum_x x P(A_x) + b \sum_y y P(B_y)$$

$= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$. □

$\boxed{Lem\ 2.5}$ 若 X, Y 独立, 则 $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

proof. $\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy\, P(X=x, Y=y) = \sum_{x,y} xy\, P(A_x \cap B_y)$

$$= \sum_{x,y} xy\, P(X=x)P(Y=y) = \sum_x x P(X=x) \sum_y y P(Y=y).$$

$= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. □

$\boxed{Thm\ 2.6}$ 方差的性质

1、$\forall a,b \in \mathbb{R}$. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

2. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$. ~~如~~若 X, Y 独立

3、若 $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ (称为不相关) 则 2. 也成立.

14. proof 1. $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathbb{E}\left[\left((aX+b)-\mathbb{E}[aX+b]\right)^2\right]$

$= \mathbb{E}\left[(aX-a\mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\,\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$

$= a^2\,\mathrm{Var}(X).$

2. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}\left[\left((X+Y)-\mathbb{E}[X+Y]\right)^2\right]$

$= \mathbb{E}\left[\left((X-\mathbb{E}[X])+(Y-\mathbb{E}[Y])\right)^2\right] = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) + \mathbb{E}\left[\underline{XY} - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\right]$

$= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).$

$\boxed{\text{EX 2.4}}$ $P(X=x_k) = \frac{1}{2^k}$

$x_k = (-1)^k \frac{2^k}{k}.$ 但 $\sum_k |x_k| p_k = \sum_k \frac{1}{k} = +\infty.$

$\sum_k x_k p_k = -\ln 2.$ 不在数学期望的定义中.

$$\begin{cases} X \geq 0 \quad \mathbb{E}[X] \geq 0 \\ \mathbb{E}[1] = 1 \\ \mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] \end{cases} \Rightarrow \text{公理化}$$

例3 概率方法.

已知 Jordan 公式 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$

I_A 为示性函数. $\boxed{\mathbb{E}[I_A] = P(A)}$ 基本观察.

$B = \bigcup_{i=1}^n A_i \qquad B^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c \Rightarrow I_{B^c} = \prod_{i=1}^n (1-I_{A_i})$

$\Rightarrow I_B = 1 - \prod_{i=1}^n (1-I_{A_i})$ 两边取期望即得.

$= \cdots$

$\boxed{\text{Ex 3.1}}$ 随机置换. N 为装对的个数.

$A_i = \{$第 i 封信装对$\}$

$I_i := I_{A_i}$

$X = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r \\ i_{r+1}<\cdots<i_n}} I_{i_1}\cdots I_{i_r}(1-I_{r+1})\cdots(1-I_n)$

$\uparrow$

$\{N=r\}$ 的示性函数.

$\Rightarrow P(N=r) = \mathbb{E}[X] = \binom{n}{r}\mathbb{E}\left[I_{i_1}\cdots I_{i_r}(1-I_{r+1})\cdots(1-I_n)\right]$

$= \binom{n}{r}\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}(-1)^s\,\mathbb{E}\left[I_{i_1}\cdots I_{i_r} I_{i_{r+1}}\cdots I_{i_{r+s}}\right]$

$= \binom{n}{r}\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}(-1)^s\frac{(n-r-s)!}{n!}$

$$= \frac{\cancel{n!}}{r!\,\cancel{(n-r)!}} \sum_{s=0}^{n-r} (-1)^s \frac{\cancel{(n-r)!}}{\cancel{(n-r-s)!}\, s!} \cdot \frac{\cancel{(n-r-s)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-1)^s}{s!} \qquad \square$$

这个和高中似乎计算过，当时使用的递推方法？
当时好像计算的是 $r=0$、"全错排"

$\boxed{\text{EX 3.2}}$ 计算 $\mathbb{E}[X]$ & $\mathrm{Var}(X)$ "基本量"

~~$\mathbb{E}[X]$~~ $N = I_1 + \cdots I_n$

$$\mathbb{E}[N] \overset{\text{对称性}}{=} n\,\mathbb{E}(I_1) = n \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

$$\mathrm{Var}(N) = \mathbb{E}[N^2] - (\mathbb{E}[N])^2$$

$$\mathbb{E}[I_i^2] = \mathbb{E}[I_i] = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{E}[I_1 I_2] = P(A_1 A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\mathbb{E}[N^2] = n \cdot \frac{1}{n} + 2\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}(N) = 1 \qquad \square$$

$\boxed{\text{EX 3.3}}$（染色问题）正十七边形的顶点中恰有5个红色顶点，证明存在七个相邻顶点，其中至少三个红色.

组合上似乎显然。 $\Omega = \{1, \cdots 17\}$，随机取点 古典概形

$$a_k = \begin{cases} 1 & k\text{点红} \\ 0 & \end{cases}$$

$X(k) = \# \, a_{k+1} + \cdots a_{k+7}$. 下标 mod 17.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{17} \frac{1}{17} X(k) = \frac{7}{17} \times 5 = 2\frac{1}{17}.$$

Claim $\boxed{P(X>2) > 0.}$ $\Rightarrow$ "$B = \{X > 2\}$ $B \neq \phi$"

$\exists k$ s.t. $X(k) > 2$. $\square$

$\boxed{\text{EX 3.4}}$ $a_i \in \mathbb{R}$. 可选 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ s.t.

$$\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2$$

proof. 设 ε_i 为随机变量. $P(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. 相互独立

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}[\varepsilon_i^2 a_i^2] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j a_i a_j]$$

$$= \sum_i a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j]}_{0}$$

$$= \sum_i a_i^2$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_i \cdots$ 当然不等式也能反向. 不过反向后太平凡了. $\square$

$\Omega_N = \{1, \dots N\}$

$\boxed{\text{Ex 3.5}}$ r.v. $X_{N,q} : \Omega_N \to \mathbb{Z}_q = \{0, \cdots q-1\}$

for $k \in \mathbb{Z}_q$

$$P(X_{N,q} = k) = \frac{1}{N}\left(\left[\frac{N}{q}\right] + h(k)\right)$$

$$h(k) = \begin{cases} 0 & \\ 1 & k + q\left[\frac{N}{q}\right] \leq N \end{cases}$$

设 U 是 $\mathbb{Z}_q$ 上的均匀分布

g on $\mathbb{R}$.

$$\left| \mathbb{E}[g(X_{N,q})] - \mathbb{E}[g(U)] \right| = \left| \sum_{k=0}^{q-1} g(k)\left(P(X_{N,q} = k) - \frac{1}{q}\right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{q-1} g(k)\left(\left[\frac{N}{q}\right]\cdot\frac{1}{N} + \frac{h(k)}{N} - \frac{1}{q}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{q-1} |g(k)| \cdot \left(o\left(\frac{1}{N}\right)\right) \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

$\cancel{\frac{N+1}{q} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{q}}$ g 是随意函数 . 若 $g = I_{(-\infty, x]}$

$$\mathbb{E}[g(U)] = P(U \leq x) = F_U(x).$$

p, q 互素时.

$$\lim_{N\to\infty} P(X_{N,p} = a, X_{N,q} = b) = \lim_{N\to\infty} P(X_{N,p} = a) \lim_{N\to\infty} P(X_{N,q} = b).$$

By CRT, $\mathbb{Z}_{p \cdot q} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$

$$P(X_{N,p} = a, X_{N,q} = b) \overset{?}{=} P(X_{N,pq} = ab) \quad \begin{cases} mq \equiv 1 \mod p \\ np \equiv 1 \mod q \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N} \# \{ i = amq + bnp + kpq,\ 1 \leq i \leq n \}.$$

4. 协方差 与条件期望

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y])^2] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\underline{\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]}.$$

$\boxed{\text{Def 4.1}}$ 称 r.v. X, Y 之间的协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])].$$

相关系数 $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$ with $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) > 0$.

为了计算协方差

Lem 4.2 (X,Y) 的联合分布列为 $f(x,y)$，$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ Borel 可测，则

$$\mathbb{E}[g(X,Y)]=\sum_{x,y} g(x,y)f(x,y)$$

~~proof~~

Thm 4.3 ρ 为 X,Y 的相关系数，则

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$$

(i) $|\rho|\le 1$

(ii) 当 X,Y 独立或不相关时，$\rho=0$

(iii) $|\rho|=1$ $\exists\, a,b\in\mathbb{R}$, s.t. $P(Y=aX+b)=1$.

这里多一个常数项是因为 ρ 的定义中有一个中心化，so ...

为证明下列结果。

Thm 4.4 (Cauchy-~~Stuart~~ Schwarz inequality) $(\mathbb{E}[XY])^2\le\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$

"=" holds true iff $\exists\, a,b\in\mathbb{R}$ except $a,b=0$ s.t. $P(aX=bY)=1$.

proof. If $\mathbb{E}[X^2]=0$, we have $\sum_x x^2 p(X=x)=0$. That is to say.

$p(X)\ne 0$ iff $X\ne 0$ $\Rightarrow \mathbb{E}[X,Y]=\sum_{x,y} xy f(x,y)$

$$=\sum_{x=0,y} xy f(x,y)+\sum_{x\ne 0,y} xy f(x,y)$$

$$=0+\sum_x f_X(x)=0.$$

If $\mathbb{E}[X^2]\ne 0$. $\mathbb{E}[(Y-tX)^2]=t^2\mathbb{E}[X^2]-2t\mathbb{E}[XY]+\mathbb{E}[Y^2]\ge 0$

$\Rightarrow \Delta=4(\mathbb{E}[XY])^2-4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]\le 0$

"=" holds ~~iff~~ iff $\exists\, t_0\in\mathbb{R}$ s.t. $\mathbb{E}[(Y-t_0X)^2]=0$ $\square$

Rmk for r.v $\vec{X}=(X_1,\cdots X_n)$ 引入协方差矩阵 $\Sigma=(\sigma_{ij})$

$$\sigma_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\mathbb{E}[X_iX_j]-\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j].$$

Σ ~~非正定~~ 半正定 $\quad t\Sigma t^T=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n t_i(X_i-\mathbb{E}[X_i])\right)^2\right]\ge 0.$

Def 4.5 离散型 r.v. X,Y 在给定 $X=x$ ($P(X=x)>0$) 的条件下，Y 的条件分布函数为 $F_{Y|X}(y|x):=P(Y\le y\,|\,X=x)$.

条件分布列为 $f_{Y|X}(y|x):=P(Y=y\,|\,X=x)$.

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}}{f_X}$ if $f_X(x)\ne 0$

$f_{Y|X}(y|x)=0$ if $f_X(x)=0$

Def 4.6 给定 $X=x$，$\psi(x):=\mathbb{E}[Y|X=x]=\sum_y y f_{Y|X}(y|x)$

称 $\psi(X)$ 为 Y 对 X 的条件期望，记为 $\mathbb{E}[Y|X]$.

18. $\boxed{\text{Thm4.7}}$ for $\psi(X)=\mathbb{E}[Y|X]$. we have

$\mathbb{E}[\psi(X)]=\mathbb{E}[Y]$ | $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]=\mathbb{E}[Y]$.

proof $\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_x \psi(x) f_X(x) = \sum_x f_X(x) \cdot \sum_y y f_{Y|X}(y|x)$

$= \sum_{x,y} y\, f(x,y) = \sum_y y f_Y(y) = \mathbb{E}[Y]$. $\square$.

$\boxed{\text{Thm4.8}}$ (一般化) $\psi(X)=\mathbb{E}[Y|X]$. 有 $\mathbb{E}[\psi(X)g(X)]=\mathbb{E}[Yg(X)]$

其中 g 可测.

proof. LHS $= \sum_x \psi(x) g(x) f_X(x) = \sum_x g(x) \cdot \sum_y y f_{Y|X}(y|x)\ f_X(x)$

$= \sum_y y \sum_x f_{Y|X}(y|x) g(x) f_X(x) = \sum_x\sum_y y\, g(x) f(x,y)$

$= \cancel{\sum_y y \underbrace{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}_{f(x,y)} g(x) = \mathbb{E}[Yg(X)]}$ =RHS

$\square$

$\boxed{\text{EX4.1}}$ 母鸡下N枚蛋 $N\sim P(\lambda)$. 蛋 p 率成鸡. K为小鸡数.

求 $\mathbb{E}[K|N]$ $\mathbb{E}[K]$. $\mathbb{E}[N|K]$

解: $\mathbb{E}[K|N] = Np$ (二项)

$\mathbb{E}[K] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[K|N]] = \mathbb{E}[Np] = p\lambda$. (N 是服从 $P(\lambda)$ 的随机变量)

$\mathbb{E}[N|K]$ 不好算

$f_{N|K}(n|k) = P(N=n|K=k) = \dfrac{P(N=n)\,P(K=k|N=n)}{\sum_m P(N=m)\,P(K=k|N=m)}$

$\overset{n\geq k}{=} \dfrac{\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\sum_{m\geq k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\binom{m}{k}p^k q^{m-k}} = \dfrac{\frac{\lambda^n}{n!}\cancel{e^{-\lambda}}\binom{n}{k}\cancel{p^k}q^{n-k}}{\left(\frac{p}{q}\right)^k\cdot\frac{1}{k!}\cancel{e^{-\lambda}}\lambda^k e^{\lambda q}}$

$= \dfrac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda q}$

分母 $\sum_{m\geq k}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\cdot\frac{m!}{(m-k)!\,k!}p^k q^{m-k}$

$= \left(\frac{p}{q}\right)^k\cdot\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k\sum_{m=0}\frac{(\lambda q)^m}{m!}$

$= \left(\frac{p}{q}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\cdot e^{\lambda q}$

$\mathbb{E}[N|K=k] = \sum_{n\geq k} n \cdots = k+\lambda q$

§5 随机游走.

$\mathbb{Z}^d$ 上. $S_n = X_1+\cdots+X_n$. 其中 X_i 在 $\{(x_1,\cdots x_d),\ x_j=\pm1,0,\ x_i=0\ j\neq i\}$ 上均匀取值.

"简单随机游走"

$\boxed{\text{EX 5.1}}$ (d=2) $P(\vec{S}_{2n}=0) = P\left(\bigcup_{i+j=n}\{\text{向 } e_1\ i\text{次}.\ e_2\ j\text{次}\}\right)$

$$= \sum_k \frac{(2n)!}{(k!(n-k)!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}\cdot\binom{2n}{n}\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_k \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$$

$\boxed{\text{EX 5.2}}$ line. $S_0=a$. $P(S_n \cancel{=b}) = ?$ 右 p，左 q

$$\begin{cases} r+l=n \\ r-l=b \end{cases} \qquad r=\frac{n+(b-a)}{2} \qquad l=\frac{n-(b-a)}{2}$$

$$P(S_n=b) = \binom{n}{\frac{n+(b-a)}{2}}\, p^{\cdots}\, q^{\cdots} \qquad \square$$

$\boxed{\text{Thm 5.1}}$ 随机游走.

(1) ~~时间~~齐性. 空间 $P(S_n=j \mid S_0=a) = P(S_n=j+b \mid S_0=a+b)$ translation invariate

(2) 时间齐性 $P(S_n=j \mid S_0=a) = P(S_{m+n}=j \mid S_m=a)$.

(3) Markov 性. $P(S_{m+n}=j \mid \underline{\underline{S_0,\cdots S_m}}) = P(S_{m+n}=j \mid S_m)$

记号 seems strange.

$\boxed{\text{Rmk}}$ (3) 要求左右意义.

proof. (1) LHS $= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = j-a\right)$, RHS $= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = j-a\right)$

(2) LHS $= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = j-a\right)$ RHS $= P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i = j-a\right)$

(比较奇怪的是 讲义 & 课上没有定义什么是随机游走，应该到有 <u>独立同分布</u>的条件)

(3) LHS $= P(S_{m+n}=j \mid S_0=j_0, \cdots S_m=j_m)$

$$= \frac{P(S_{m+n}=j, S_0=j_0, \cdots S_m=j_m)}{P(S_0=j_0, \cdots S_m=j_m)} = \frac{P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X = j-j_m,\ X_k=j_k-j_{k-1}\ (k=1,\cdots m)\right)}{P(X_k=j_k-j_{k-1}\ (k=1,\cdots m))}$$

$$= P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} X_i = j-j_m\right) = P(S_{m+n}=j \mid S_m=j_m). \qquad \square$$

$\boxed{\text{Rmk}}$ 1. X与Y同分布 $\Longleftrightarrow P(X=x)=P(Y=x)\ \forall x$ (分布列)

$\Longleftrightarrow \cancel{P(X=x)=} F_X(x)=F_Y(x)\ \forall x$ (分布函数)

2. 此三条代表更一般的 Markov 过程的基本性质

轨道计数问题

轨道平面表示 $\{(n,S_n): n=0,1,\cdots\}$

记号 $S_0=a,\ S_n=b$

$N_n(a,b) = \#\{(0,a)$到(n,b)的轨道$\}$ ← 好处理

$N_n^0(a,b) = \#\{(0,a)$到(n,b)且过 x轴某点 $\overset{\exists k}{(k,0)}$的轨道$\}$ ← 难

$\boxed{\text{Thm 5.2}}$ 设 $a,b>0$ $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$

（强行与 x轴碰到一次，不能然要自然穿过！）

proof：反射是1-1的，显然获证. □

$\boxed{\text{lem 5.3}}$ $N_n(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}$

proof：即$\boxed{\text{EX 5.2}}$中的方法. □

$\boxed{\text{Cor 5.4}}$（投票定理）$\#\{$从$(0,0)$出发，到(n,b)不再过x轴的轨道$\} = \frac{b}{n}N_n(0,b)$

$$N_{n-1}(1,b) - N_n^0(1,b) = N_{n-1}(1,b) - N_n(-1,b)$$

$$= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+b-2}{2}\right)!\left(\frac{n-b}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+b}{2}\right)!\left(\frac{n-b-2}{2}\right)!}$$

$$= \frac{b}{n}\binom{n}{\frac{n+b}{2}} = \frac{b}{n}N_n(0,b). \quad \square$$

$\boxed{\text{Ex 5.3}}$ A有a票，B有b票 $a>b$. A始终大于B的概率

解：构造随机游走. $X_i = \begin{cases} 1 & A \\ -1 & B \end{cases}$

$$\cancel{N(a+b,a-b)} = \frac{a-b}{a+b}N_n(0,a-b)\Big/N_n(0,(a-b)) = \frac{a-b}{a+b} \quad \square$$

不返回出发点的概率

$\boxed{\text{Thm 5.5}}$ $S_0=0$ $\forall b\neq 0$. $P(S_0=0, S_1,\cdots S_n\neq 0, S_n=b) = \frac{|b|}{n}P(S_n=b)$.

进而 $P(S_0=0, S_1\cdots S_n\neq 0) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[|S_n|]$.

proof. 由投票，数目为 $\frac{|b|}{n}N_n(0,b)$ $\begin{cases} l+r=n \\ r-l=b \end{cases}$

$$\Rightarrow P\cdots = \underbrace{\frac{|b|}{n}N_n(0,b)\,p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}} = \frac{|b|}{n}P(S_n=b).$$

对 b 求和则易形式为 $\frac{1}{n}\mathbb{E}[|S_n|]$. □

最后一次返回

$A_{2n,2k}=\{\max\{0\le i\le 2n : S_i=0\}=2k\}$

$\boxed{\text{Thm 5.6}}$ $P(A_{2n,2k})=P(S_{2k}=0)P(S_{2n-2k}=0)$

proof. $\text{LHS}=P(S_{2k}=0, S_{2k+1},\cdots S_{2n}\ne 0)$

$$=P(S_{2k}=0)\,P(S_{2k+1},\cdots S_{2n}\ne 0\mid S_{2k}=0)$$

$$\overset{\text{齐性}}{=}P(S_{2k}=0)\,P(S_1,\cdots S_{2n-2k}\ne 0\mid S_0=0)$$

先令 $m=n-k$

$$P(S_1,\cdots S_{2m}\ne 0\mid S_0=0)=\frac{1}{2m}E[|S_{2m}|]$$

$$\overset{\text{对称}}{=}2\sum_{i=1}^{m}\frac{2i}{2m}P(S_{2m}=2i)$$

$$=2\cdot\left(\frac12\right)^{2m}\sum_{i=1}^{m}\frac{i}{m}\cdot\binom{2m}{m+i}$$

$$=2\cdot\left(\frac12\right)^{2m}\sum_{i=1}^{m}\frac{(m+i)-(m-i)}{2m}\binom{2m}{m+i}$$

$$=2\cdot\left(\frac12\right)^{2m}\sum_{i=1}^{m}\left[\binom{2m-1}{m+i-1}-\binom{2m-1}{m-i-1}\right]$$

$$=2\cdot\left(\frac12\right)^{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\binom{2m-1}{m+i-1}-\binom{2m}{m+i}\right)$$

$$=2\cdot\left(\frac12\right)^{2m}\cdot\binom{2m-1}{m}=\left(\frac12\right)\binom{2m}{m}=P(S_{2m}=0).$$

□

6. 概率母函数

$\boxed{\text{Def 6.1}}$ 数列 $\{a_n\}$ 的母函数 $G_a(s):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n$

数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的卷积 $\{c_n\}$ 为 $c_n=a_0b_n+\cdots+a_nb_0$，记 $c=a*b$

$\boxed{\text{Prop 6.2}}$ $G_c(s)=G_a(s)\,G_b(s)$.

$\boxed{\text{EX 6.1}}$ 直线对称随机游走. 求 $P(S_1\ge 0,\cdots S_{2n}\ge 0,\ S_0=S_{2n}=0)$

记 $C_n=\#\{(S_1,\cdots S_{2n}) : S_i\ge 0\ \ 1\le i\le 2n,\ S_0=S_{2n}=0\}$

所求为 $C_n\cdot\left(\frac12\right)^{2n}$

又 $C_n=\sum_{k=1}^{n}C_{k-1}C_{n-k}$，$t=2k$

$S_1,\cdots S_{2k-1}\ge 1 \rightsquigarrow C_{k-1}$

$S_{2k}\cdots S_{2n}\ge 0 \longrightarrow C_{n-k}$

~~$\frac{2n-(2k-1)+1}{2}=n-k+1$~~

$$G(s)=\sum_{i=0}^{\infty}C_i s^i$$

$$G(s)\cdot G(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}C_iC_{n-i}\right)s^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}s^n=\frac{G(s)-1}{s}$$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}=\frac{1}{2s}\left(1-(1-4s)^{\frac12}\right)=\frac{1}{2s}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac12}{n}(-4s)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2s}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac12(\frac12-1)\cdots(\frac12-n+1)}{n!}(-4s)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}(2n-3)!!\,n!}{n!\,n!}s^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}s^n$$

22. $\boxed{\text{Def 6.3}}$ 概率母函数 . X 为非负整值 r.v. $G(s) = \mathbb{E}[s^X]$

$$G(s) = \sum_{i\geq 0} s^i P(X=i) \quad \cdots$$

级数的收敛半径 ≥ 1 　 1处左连续 $\Rightarrow G(1) = 1$

$\boxed{\text{EX 6.2}}$ 二项分布 $G(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k = (ps+q)^n$

几何分布 $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p\, q^{k-1} = \frac{ps}{1-qs}$

poisson分布 $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$

$\boxed{\text{Thm 6.4}}$ $\mathbb{E}[X] = G'(1)$

$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-(k-1))] = G^{(k)}(1)$

$Var(X) = G''(1) + G'(1)(1-G'(1))$

proof (1) $G'(X) = \sum_{k=0}^{\infty} i f(i) s^{i-1}$ 　 $G'(1) = \sum_{i=0}^{\infty} i f(i) = \mathbb{E}[X]$.

(2) $G^{(k)}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} s^{i-k} i(i-1)\cdots(i-(k-1)) f(i) = \mathbb{E}[s^{X-k} X(X-1)\cdots(X-k+1)]$

$s \nearrow 1$

(3) $Var(X) = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X](1-\mathbb{E}[X])$. □

$\boxed{\text{Thm 6.5}}$ $X_1 \cdots X_n$ 非负整值 相互独立. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 　 $G(s) = G_1(s) \cdots G_n(s)$

proof $G(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \mathbb{E}[s^{X_1} \cdots s^{X_n}] \overset{\text{独立}}{=} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdots$

$\boxed{\text{Thm 6.6}}$ $\{X_i, i\geq 1\}$ 独立同分布 G_X . $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, N 与 $\{X_i\}$ 独立 G_N

则 $G_S(s) = G_N(G_X(s))$

pr

$$G_S(s) = \mathbb{E}[s^S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[s^S | N=n]]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^S | N=n] P(N=n)$$

用到 N 与 $\{X_i\}$ 独立

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n P(N=n)$$
$$= G_N(G_X(s))$$

□

$\boxed{\text{Def 6.7}}$ $X . Y$ 非负整值 , 联合母函数 $G(s,t) = \mathbb{E}[s^X t^Y]$

$\boxed{\text{Thm 6.8}}$ X, Y 独立 $\Leftrightarrow$ $G(s,t) = G_X(s) \cdot G_Y(t)$

proof ($\Rightarrow$) $G(s,t) = \sum_{i,j} s^i t^j P(X=i, Y=j) \overset{\text{独立}}{=\!=} G_X(s)\, G_Y(t)$

($\Leftarrow$) 比较系数! □

$\boxed{\text{Ex 6.3}}$ 掷3颗骰子，和为9

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

$$G_{X_i} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} s^i = \frac{1}{6}\frac{s(1-s^6)}{1-s}$$

$$G_Y = \frac{1}{6^3} s^3 (1-3s^6+3s^{12}-s^{18}) \cancel{\sum_{k=0}^{6}} (1-s)^{-3}$$

$$= \frac{1}{6^3} s^3 (1-3s^6+3s^{12}-s^{18}) \sum_{k=0}^{6} \binom{-3}{k}(-s)^k$$

$$\cancel{-3}\binom{-3}{6}(\cancel{-s^6})\cdot\frac{1}{6^3} \quad -\frac{3}{6^3}$$

$$\frac{-3(-3-1)\cdots-(-3-5)}{6!} = \frac{3\cdot 4\cdots 8}{6!} = 28 \qquad \square$$

$\boxed{\text{Def 6.4}}$ 推广到 X 为随机变量，定义矩母函数 $M_X(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]$.