Real Analysis Note

青冥

2024.8.23 - 2025.2.2

目录

1 Measure Theory **2**
1.1 Preliminaries . . . 2
1.2 Basic Conception . . . 3
1.3 Exterior Measure . . . 4
1.4 Measurable Set . . . 6
1.5 Non-measurable Set . . . 9
1.6 Measurable Functions . . . 9
1.7 Littlewood's Three Principles . . . 14

2 Lebesgue Integration Theory **16**
2.1 The Construction of New Integration Theory . . . 16
2.2 The Property of Lebesgue Integration . . . 18
2.3 L^p Space . . . 20
2.4 Fubini Theorem . . . 24
2.5 Applications of Fubini Theorem . . . 25

3 Differentiation and Integration **28**
3.1 Differentiation of the Integral . . . 28
3.2 Approximation to the Identity . . . 32
3.3 Functions with bounded Variation . . . 34
3.4 Cantor-Lebesgue Function . . . 38
3.5 Absolutely Continuous Functions . . . 39

4 Abstract Measure **41**
4.1 Measure and Integration . . . 41
4.2 Exterior Measure and Premeasure . . . 42
4.3 Product Measure and Fubini Theorem . . . 46
4.4 Signed Measure . . . 48

1 Measure Theory

1.1 Preliminaries

Proposition 1.1. 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 则

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f(x)|\le l\}=\mathbb{R},\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}\{|f(x)|\le\frac{1}{k}\}=\{f(x)=0\}.$$

Definition 1.1: 上限集和下限集

设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列集合.

1. 若 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$, 则称集合列是递降集合列, 记 $A_j\searrow$, 并定义极限集为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k.$$

2. 若 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$, 则称集合列是递增集合列, 记 $A_j\nearrow$, 并定义极限集为

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

3. 定义上限集和下限集如下

$$\limsup_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_k.$$

$$\liminf_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}A_k.$$

Proposition 1.1: 上下限集合的等价描述

$$\limsup_{k\to\infty}A_k=\{x:\text{存在无穷多个}k_j,\text{使得}x\in A_{k_j}\}.$$

$$\liminf_{k\to\infty}A_k=\{x:\text{存在整数}N>0,\text{当}k>N,\text{都有}x\in A_k\}.$$

Definition 1.1. 集合 F_σ 为可数个闭集的并, 集合 G_δ 为可数个开集的交.

Proposition 1.2: 收敛的集合表示

设 $f,f_1,\cdots$ 是一列函数, 则

$$\{x\in\mathbb{R}^n:\lim_{k\to\infty}f_k=f\}=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=k}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}^n:|f_j-f|\le\frac{1}{l}\}.$$

1.2 Basic Conception

Definition 1.2: σ-代数

若 X 为非空集合, $\mathscr{A} \subseteq 2^X$, 称 $\mathscr{A}$ 是 X 上的 σ-代数, 若 $\mathscr{A}$ 满足以下条件:

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. 若 $A \in \mathscr{A}$, 则 $A^c \in \mathscr{A}$.
3. 若 $A_n \in \mathscr{A}, n = 1, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Remark. *有条件 1 和 2, 自然有全集 $X \in \mathscr{A}$, 由条件 2 和 3, 结合 De Morgan 律, 有 $\mathscr{A}$ 对可数交封闭.*

Definition 1.2 (生成 σ-代数)**.** *设 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$, 称包含 $\mathscr{F}$ 的最小 σ-代数为 $\mathscr{F}$ 生成的 σ-代数, 记作 $m(\mathscr{F})$.*

Remark. *任意一个 σ-代数 $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{F}$, 都能推出, $\mathscr{A} \supseteq m(\mathscr{F})$.*

Definition 1.3: Borel 代数和 Borel 集

$\mathbb{R}^n$ 中的开集全体生成的最小 σ-代数称为 Borel σ-代数, 记作 $\mathcal{B}$, 其中的元素称为 Borel 集.

Example 1.1 (Borel 集)**.** *Borel 集是没法穷尽的, 但是有一些典型的构造. 首先 F_σ 集和 G_δ 集都是 Borel 集, 进一步的, 若定义 $F_{\sigma-\delta}$ 集为可数个 F_σ 集的交, $G_{\delta-\sigma}$ 集为可数个 G_δ 集的并, 那么这两个也是 Borel 集.*

Theorem 1.1: $\mathbb{R}$ 中开集的结构

$\mathbb{R}$ 中的开集可以唯一的表示为至多可数个互不相交的开集的并.

Proof: 证明大致分三步, 首先用确界原理将单点膨胀为极大区间, 其次证明各个极大区间是要么相同, 要么不交的, 最后利用 $\mathbb{Q}$ 的稠密性可以证明这些极大区间是至多可数的即可. $\square$

Remark. *若极大区间的端点是实数, 则端点是不在开集中的, 这是因为内点在膨胀后会与确界性的假设导出矛盾.*

Definition 1.3 (almost disjoint)**.** *几乎不交或是内部不交, 指的是集合的内部 (interior) 没有交集.*

Definition 1.4 (dyadic cube)**.** *二进有理数指代形如 $\dfrac{p}{2^k}$, 其中 $p, k \in \mathbb{Z}$ 的数, $\mathbb{R}^n$ 中以二进有理数为顶点的方体 (cube) 称为二进方体.*

Remark. *也可以定义 $\Gamma_k = \{2^{-k}([0,1]^n + m) : m \in \mathbb{Z}^n\}$, 从而二进方体就是 $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \Gamma_k$. 二进方体的性质很好, 里面的元素要么是几乎不交的, 要么是有包含关系的.*

Theorem 1.2: $\mathbb{R}^n$ 中开集的结构

$\mathbb{R}^n$ 中的非空开集一定可以表示为可数个几乎不交的闭方体的并.

Proof: 核心是做二进方体分解, 操作至多可数次后求并集, 就得到新的集合, 证明这个集合和原来的开集相等即可. $\square$

Remark. 由于定理中说的是闭方体, 因此是被分解为可数个, 同时, 这个分解并不是唯一的.

1.3 Exterior Measure

Definition 1.4: Cantor set

Cantor 集是将 $[0,1]$ 区间每次三等分并去掉中间的开集得到的集合, 其中每次得到的闭集记作 C_k, 那么 Cantor 集就可以记为 $\mathcal{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. 而每次去除掉的开集就记为 G_k, 从而 Cantor 开集就记为 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

Proposition 1.2. *Cantor 集有一些性质, 列举如下:*

1. $\mathcal{C}=[0,1]-G$.

2. $\mathcal{C}$ *是非空闭集.*

3. $\mathcal{C}$ *是完全集.*

4. $\mathcal{C}$ *没有内点.*

5. $\mathcal{C}$ *有连续统基数 (存在* $[0,1]$ *到* $\mathcal{C}$ *的一一映射).*

6. $\mathcal{C}$ *是零测集.*

Proof: 1 和 2 显然.

3. 取每一步同一区间的另一个端点就行了.

4. 最后的" 区间" 长度是趋于 0 的, 邻域会缩为独点.

5. 需要证明 $\mathcal{C}$ 在 3 进制下的表示, 这个证明需要用级数的分段估值, 然后用软一些的方法可以证明.

6. 计算开集部分的区间长度. □

Definition 1.5: Cantor-Lebesgue 函数

$\mathcal{C}$ 上的 Cantor-Lebesgue 函数定义为

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k},\quad 当x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}\in\mathcal{C}, 有b_k=\frac{a_k}{2}.$$

Proposition 1.3. *Cantor-Lebesgue 函数给出了* $\mathcal{C}\to[0,1]$ *的连续满射.*

Proof: 其实要先说明 Cantor-Lebesgue 函数的良定性, 也就是对同一个变量, 其对应的函数值是唯一的. 这个可以用反证法, 然后可以发现只要有一位不同了, 后面的情况只要做不等式的简单估计就行了. 连续性就是定义验证, 然后漫射也是很容易看出来的. □

其实很有趣的是函数可以扩张到整个 $[0,1]$ 区间上, 因为观察可以发现每个 Cantor 闭集的端点上的数在函数下的取值是一致的.

Definition 1.5 (类 Cantor 集)**.** 将 $[0,1]$ 区间在第 k 步去除每个构成区间中间的长度为 l_k 的开区间, 其中 $k=1,\cdots$, 并且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k<1,$$

最后得到的集合为类 *Cantor* 集 $\hat{\mathcal{C}}$.

Proposition 1.4 (类 Cantor 集的性质)**.** *列举如下:*

1. *类 Cantor 集具有正测度.*
2. *类 Cantor 集没有内点.*
3. *类 Cantor 集是完全集.*
4. *类 Cantor 集有不可数基数.*

Proof: 证明是和 Cantor 集类似的, 区别在于从取端点变成了取中点, 以及完全集是可以证明为不可数的. □

在引入外测度之前, 叙述一个失败的例子.

Definition 1.6 (outer Jordan content)**.** *$\mathbb{R}$ 上的 Jordan 外容量定义为*

$$J_*(E) = \inf \sum_{k=1}^{N} |I_k|,$$

其中 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k \supseteq E$.

这个定义中的重要性质是, $J_*(E) = J_*(\bar{E})$. 从而构造出了大量的不可测集.

为了方便, 以下简记有限维矩体为 R, 有限维方体为 Q, 其中各个区间的开闭不影响. 用 $|R|$ 代表矩体的体积.

Lemma 1.1. *若 $R = \bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$, 其中的矩体是几乎不交的, 那么有 $|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|$.*

Lemma 1.2. *若 $R \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$, 那么有 $|R| \leq \sum_{k=1}^{N} |R_k|$.*

Definition 1.6: 外测度

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E 的外测度 m_* 定义为

$$m_*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\}.$$

Remark. *这里用的定义是方体, 还可以用矩体或是球来定义, 其实是等价的. 这样定义的外测度的作用有限, 还需要一些基本的例子作为支撑.*

Example 1.2. $m_*(Q) = |Q|$.

Proof: 一方面, 方体是自身的覆盖, 因此 $m_*(Q) \leq |Q|$. 另一方面, 由下确界的定义, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 有覆盖 $Q_k, k = 1, \cdots$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq |Q| + \varepsilon$, 将闭方体做有限膨胀, 得到开方体 $\widetilde{Q_k} \supseteq Q_k$, 且 $|\widetilde{Q_k}| \leq (1+\varepsilon)|Q_k|$, 最后用有限覆盖加上不等式就得到 $m_*(Q) \geq |Q|$. □

Example 1.3. $m_*(R) = |R|$.

Proof: 证明中外测度大于等于体积的部分和上一段是类似的, 而另一边则有一些区别. 策略是用二进方体做分解, 分解以后将二进方体分为矩体边界附近的和其他的, 然后对边界附近的方体做阶的估计就可以了. □

上面关于外测度的内容还是比较朴素的, 以下为外测度的一些基本性质.

Proposition 1.5 (外测度的基本性质). *列举如下:*

1. 单调性. 若 $E_1 \subseteq E_2$, 则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.

2. 次可加性. $m_*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k)$.

3. 外正则性. $m_*(E) = \inf\{m*(G) : E \subseteq G, G\text{是开集}\}$.

4. 距离分离可加性. 设 $E = E_1 \cup E_2$, $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

5. 几乎不交方体分解. 若 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, 其中 Q_k 是几乎不交的方体, 那么有

$$m_*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|.$$

6. 平移不变性. $m_*(E) = m_*(E+h), h \in \mathbb{R}^n$.

Proof: 逐条简述证明如下:

1. 有定义给出的方体覆盖即可.

2. 几何上不难想象. 用定义给出覆盖 $Q_j^{(k)}, j = 1, \cdots$ 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q^{(k)_j} \supseteq E_k$, 并且有 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} Q_j^{(k)} \leq m_*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ 即可.

3. 经典处理, 用开集列逼近. 也就是 $Q_k \supseteq E$, 并且 $|Q_k| \leq m_*(E) + \frac{1}{k}$. 这列开集的极限集就是不等式所要的一边, 而另一边是由单调性得到.

4. 约定好无穷的情况后做有限的情况, 两个集合是距离分离的, 就可以把方体覆盖分为两堆, 此时用单调性就解决了一边, 而另一边就是直接的次可加性.

5. 次可加性导出一边后, 另一边用方体收缩, 得到分离的集合 $\widetilde{Q_k}, k = 1, \cdots$, 结合之前的性质 4, 有

$$m_*(\bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{Q_k}) = \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{Q_k}| \leq \sum_{k=1}^{N} |Q_k| - \varepsilon.$$

对 N 取极限再用单调性即可.

6. 平移是双射, 用定义推即可. □

Corollary 1.1:

若 G_k 为一列互不相交的开集，那么有

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_*(G_k). \tag{1}$$

Proof: 用 $\mathbb{R}^n$ 的结构定理. □

1.4 Measurable Set

Definition 1.7: 可测集

集合 E 被称为是 (Lebesgue) 可测的, 当其对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在开集 $\mathcal{O}$ 满足 $E \subseteq \mathcal{O}$, 且有

$$m_*(\mathcal{O} - E) \leq \varepsilon.$$

Remark 1.1:

外测度是对任意一个 $\mathbb{R}^n$ 的子集都有定义, 但是接下来会看到测度是要有可数可加性的, 而之前外测度的外正则性则未必可行, 毕竟还有不可测集的出现.

Remark. 上面的定义只是拓扑空间上的定义方法, 在抽象测度中还有等价的定义方式.

Proposition 1.6 (Lebesgue 测度的性质)**.** *1. 开集是可测的.*

2. 外测度零测集可测.

3. 可数并可测.

4. 闭集可测.

5. 补集可测.

6. 可数交可测.

Proof: 以下逐个说明:

1. 由定义得.
2. 由外测度得外正则性 + 单调性得.
3. 设 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_j$, 由定义加上外正则性就有 $\mathcal{O}_j \supseteq E_j$, 使得 $m_*(\mathcal{O}_j - E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.
4. 先证紧集可测. 扩为开集后, 差集部分由结构定理得到一个方体覆盖, 有限个方体覆盖有上界, 取极限后仍然有, 上界控制为 ε 就行.
5. 其实也是计算集合关系, 只要算差集部分, 得到零测集, 再并起来就行了.
6. 用 De Morgan 律就行. □

这也就是说, $\mathcal{L}$ 是一个 σ-代数.

Remark 1.2:

可以用闭集来等价的定义测度, 即

若对任意的 $\varepsilon > 0$, 有闭集 $F \subseteq E$, 使得 $m_*(E - F) < \varepsilon$, 则称 E 可测.

证明在知道测度的基本性质后显然.

在已知测度的性质的基础下, 可以证明 Lebesgue 可测和 Carathéodory 可测是等价的.

Definition 1.8: Carathéodory 可测

集合 E 是 Carathéodory 可测的, 若对任意集合 A, 都有

$$m_*(A) = m_*(E \cap A) + m_*(E^c \cap A).$$

Proposition 1.7. *在 $\mathbb{R}^n$ 的标准拓扑下, Lebesgue 可测和 Carathéodory 可测等价.*

Proof: 若集合 E 是 Lebesgue 可测的, 那么对任意集合 A, 由次可加性, 有

$$m_*(A) \leq m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c).$$

另一方面, 对任意 $\varepsilon > 0$, 由外正则性, 有开集 $\mathcal{O}_\varepsilon \supseteq A$, 使得 $m_*(\mathcal{O}_varepsilon) \leq m_*(A) + \varepsilon$, 接下来由单调性就得到想要的结果.

若集合 E 是 Carathéodory 可测的, 那么由外正则性, 选开集 $A_\varepsilon \supseteq E$, 接下来的过程是显然的. □

Theorem 1.3: 测度的可数可加性

若 $E_1, \cdots$ 是一列不交的集合, 且 $E \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_j$, 则

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_j).$$

Proof: 首先做有界的情况. 用可测的闭集定义, 用外测度的分离有限可加, 再取极限得到一边的不等式, 另一边用次可加性就行. 而一般的情况就是熟悉的分层技术. □

Theorem 1.4: 测度的连续性

设 $E_j, j = 1, \cdots$ 是一列可测集, 则

1. 若 $E_j \nearrow E$, 则 $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$.
2. 若 $E_j \searrow E$, 且 $m(E_j) < \infty$, 则 $m(E) = \lim\limits_{N\to\infty} m(E_N)$.

Proof: 记 $G_j = E_{j+1} - E_j$, 有

$$\begin{aligned} m(E) &= m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_j) = m((\bigcup_{k=1}^{\infty} G_j) \cup E_1) \\ &= m(E_1) + \sum_{k=1}^{\infty} m(G_j) = m(E_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (m(E_{j+1}) - m(E_j)) \\ &= \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$

□

Remark. *可测集的差集是可测的, 通过集合计算可以看出. 第二个定理中的条件是不可去的, 因为有例子 $E_n = (n, \infty) \subseteq \mathbb{R}^n$ 可以说明.*

Theorem 1.5: 可测集的逼近

设 $E \in \mathcal{L}$, 则

1. $\forall \varepsilon > 0$, 则存在开集 $\mathcal{O} \supseteq E$ 且 $m(\mathcal{O} - E) < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, 则存在开集 $F \subseteq E$ 且 $m(E - F) < \varepsilon$.
3. 若 $m(E) < \infty$, 则存在一个紧集 $K \subseteq E$ 且 $m(E - K) < \varepsilon$.
4. 若 $m(E) < \infty$, 则存在一个有限并闭方体 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{N} Q_j$ 使得 $m(E \Delta F) < \varepsilon$.

Proof: 前两条由定义是直接的.
第三条, 先将集合用闭集在内部逼近, 再将闭集分层, 找足够多层的闭集求并集就得到了想要的紧集.
最后一条, 先把集合用方体覆盖住, 利用测度的有限性, 可以让方体覆盖收敛, 去除前面的有限项就够了. □

Remark. *可测集的测度有限不代表集合是有界集, 比如平面中的一条线.*

Theorem 1.1 (测度的不变性)**.** *测度具有以下性质:*

1. 平移不变性, 旋转不变性, 反射不变性.

2. $m(\delta E)=\delta_1\cdots\delta_n m(E)$.

3. 若 $m(E)=0$, 则 $m(L(E))=0$, 其中 L 是线性变换.

Proof: 先将矩体覆盖诱导的外测度和之前定义的外测度证明是等价的. 在此基础上, 前两条用双射和基本技巧就可以了, 最后一条要对方体覆盖做适当放缩. □

Theorem 1.6: 可测集的等价叙述

设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 则 E 是可测集等价于

1. E 和一个 F_σ 集相差一个零测集,
2. E 和一个 G_δ 集相差一个零测集.

Proof: 充分性显然. 必要性证明一个, 取一列开集 $\mathcal{O}_n\supseteq E$, 满足 $m(\mathcal{O}_n-E)<\dfrac{1}{n}$, 此时令 $G_\delta=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$ 即可. □

Lemma 1.1: Borel-Cantelli 引理

设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集, 并且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)<\infty.$$

那么集合 $E=\limsup\limits_{k\to\infty}E_k$ 是零测集.

Proof: 有限项后集合测度任意小, 自然是零测的. □

1.5 Non-measurable Set

给出一个用选择公理的经典方法. 首先对于区间 $[0,1]$, 考虑商集 $\mathcal{N}=[0,1]/[0,1]_{\mathbb{Q}}=\{[\alpha]\}$, 利用区间 $[-1,1]$ 之间的有理数做平移, 稍微研究性质发现有

$$[0,1]\subseteq\bigcup_{r\in[-1,1]_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{N}+r)\subseteq[-1,2],$$

也就是

$$1\le\sum_{r\in[-1,1]_{\mathbb{Q}}}m(\mathcal{N})\le 3,$$

这是不可能的.

Remark 1.3:

这个结果说明了, 可数可加性和平移不变性, 再加上 $\mu([0,1])=1$, 这三个条件对于 $2^{\mathbb{R}^n}$ 是不相容的. 同时, 上面的技术可以推广, 正测度集里总能选出不可测集来 (当然是承认 AC 公理的基础下).

1.6 Measurable Functions

可测函数的定义是依赖于可测集的.

Definition 1.9: 可测函数

设可测集 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 广义实值函数 $f:E\to[-\infty,\infty]$, 若对任意 a, 有 $\{f<a\}:=f^{-1}([-\infty,a))$ 可测, 则称函数 f 在 E 上可测.

当然由可测集的性质, 立刻有.

Proposition 1.3: 可测函数的等价描述

1. f 可测
2. $\forall a$, $\{f>a\}$ 可测.
3. $\forall a$, $\{f<a\}$ 可测.
4. $\forall a$, $\{f\le a\}$ 可测.
5. $\forall a$, $\{f\ge a\}$ 可测.
6. 对每个开集 $\mathcal{O}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 可测.
7. 对每个闭集 F, $f^{-1}(F)$ 可测.
8. 对每个 Borel 集 B, $f^{-1}(B)$ 可测.

Proof: 证明由前置知识中的命题可以容易看出. □

Remark. *要区分广义实值和实值, 即 $[-\infty,\infty]$ 和 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, 之前定义可测函数时考虑的就是广义实值函数及其水平集.*

连续性是一个比可测性更强的条件, 结合连续函数的拓扑等价描述, 有如下性质

Proposition 1.4: 连续函数可测

若函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 则 f 可测. 若 $f:E\to\mathbb{R}$ 可测, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 则 $g\circ f$ 可测.

Remark. *上述命题若改为 f 可测, Φ 连续, 那么 $f\circ\Phi$ 未必可测. 这个命题的证明比较重要, 甚至能得到 $\mathcal{B}\subsetneqq\mathcal{L}$ 的重要结果.*

Proposition 1.8. *存在可测函数 f 和连续函数 g 使得函数 $f\circ g$ 是不可测的, 且 $\mathcal{B}\subsetneqq\mathcal{L}$.*

Proof: 利用类 Cantor 集和 Cantor-Lebesgue 函数可以构造一个将正测度集映射到零测集的函数 $\Phi:\hat{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}$. 并且用之前的技术, 可以在 $\hat{\mathcal{C}}$ 中找到一个不可测集 $\mathcal{N}$, 那么就有 $m(\Phi(\mathcal{N}))=0$, 接着取可测函数 $f=\chi_{\Phi(\mathcal{N})}$ 即可.

不难证明 $\mathbb{R}$ 上 Borel 集的原像都是可测的, 那么集合 $\Phi(\mathcal{N})$ 就是不属于 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 的可测集. □

可测函数类上有一些封闭运算, 列举如下

Proposition 1.5: 可测函数之间的运算

设函数 f,g 是可测函数, 那么在函数有定义的基础下, 有

1. $f^k, k\in\mathbb{Z}$ 是可测函数.
2. λf 是可测函数.
3. $f\pm g$ 是可测函数.
4. fg 是可测函数.
5. $\dfrac{f}{g}$ 是可测函数.

Proof: 第一条要对 k 奇偶性分类, 然后开方即可. 第二条由定义即可. 第三条有一些技巧性, 需要等式

$$\{f+g>a\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left(\{f>a-r\}\cap\{g>a\}\right).$$

第四条要等式

$$fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2+(f-g)^2\right).$$

第五条将除法不等式变成乘法即可. □

Proposition 1.9 (特征函数和可测性)**.** χ_E 可测等价于 E 可测.

Definition 1.7 (简单函数)**.** 简单函数是定义在可测集上的特征函数的线性表示, 也就是如下形式的函数

$$f=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_j},$$

Proposition 1.6: 简单函数的标准表示

简单函数是可测的, 且有唯一的标准表示如下

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k},$$

其中满足, 当 $i\neq j$ 时, $a_i\neq a_j$ 和 $E_i\cap E_j=\varnothing$, 并且 $\bigcup\limits_{k=1}^{N}E_k=\mathbb{R}^n$.

Remark 1.4:

这里的简单函数定义并没有要求有限测度, 在之后的积分理论中会让理论更加简洁.

Definition 1.10: 阶梯函数

矩体的示性函数的线性组合 (总认为是有限个) 就是阶梯函数.

Theorem 1.7: 可测函数类对极限封闭

设 $\{f_k\}$ 是一列可测函数, 那么以下函数都可测

$$\sup_k f_k,\quad \inf_k f_k,\quad \limsup_{k\to\infty} f_k,\quad \liminf_{k\to\infty} f_k.$$

特别的, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在必然可测.

Remark. 以上的函数是逐点定义的.

Proof: $\{\sup\limits_k f_k>a\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{f_k>a\}$.

$\{\inf\limits_k f_k>a\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{f_k>a\}$.

$\{\limsup\limits_{k\to\infty} f_k>a\}=\{\inf\limits_j\sup\limits_{k\geq j} f_k>a\}=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}\{f_k>a\}$.

$\{\liminf\limits_{k\to\infty} f_k>a\}=\{\sup\limits_j\inf\limits_{k\geq j} f_k>a\}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty}\{f_k>a\}$. □

Remark. 上下极限可以用极限点的上下确界来等价定义，但是会有一定的局限性，上面的计算中出现的也是一种等价的定义方式.

Corollary 1.1. 若函数 f,g 可测，则逐点定义的函数 $\max(f,g)$ 和 $\min(f,g)$ 都是可测的.

Definition 1.11: 正部和负部

函数的正部 $f^+ := \max(f(x),0)$，函数的负部 $f^- := \min(-f(x),0)$.

Proposition 1.10. $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

Corollary 1.2. f 可测 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ 可测 $\Rightarrow |f|$ 可测.

Remark. $|f|$ 可测 $\nRightarrow f$ 可测，考虑不可测集 $\mathcal{N}$，和函数

$$f = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{N} \\ -1 & x \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

Definition 1.12: a.e.

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测，$\mathcal{P}(x)$ 是有关 x 的命题，若

$$m(\{x \in E : \mathcal{P}(x)\text{不成立}\}) = 0,$$

则称 $\mathcal{P}(x)$ 在 E 上几乎处处 (a.e.) 成立.

Example 1.1: 可测函数列对几乎处处收敛封闭

设 $\{f_k\}$ 是一列可测函数，且 $f_k \to f, a.e.$，那么 f 可测.

实分析的精髓之一是用好的函数逼近差的函数，并且让好的函数尽量多的保持原有函数的性质.

Theorem 1.8: 简单函数逼近非负可测函数

设函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，那么一定存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}$，满足以下条件:

1. $\varphi_k \geq 0$,
2. $\varphi_k \nearrow f$.

特别的，若 f 有界，则 $\varphi_k \rightrightarrows f$.

Proof: 定义集合 $E_k^j = \{\frac{j}{2^k} \leq f < \frac{j+1}{2^k}\}$ 和 $F_k = \{f \geq 2^k\}$，这是可测的. 然后定义函数

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{2^{2k-1}} \frac{j}{2^k}\chi_{E_j} + 2^k \chi_{F_k}.$$

注意到集合列 $\{E_j\} \cup F_k$ 是对全空间的不断加细，因此容易证明函数是递增的. 另一方面，在有限步后，若是 $\mathbb{R}^n$ 中的点高度有限，就会落在集合列 $\{E_j\}$ 中，若是 x_0 处取值为 $+\infty$，那么 $\varphi_k(x_0) = 2^k \to \infty$. 因此 $\{\varphi_k\}$ 总逐点收敛到 f. 并且，若函数有界，有限步后所有的点落在集合列 $\{E_j\}$ 中，因此收敛速度有公共的上界，即一致收敛. $\square$

Theorem 1.9: 简单函数逼近可测函数

设函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测, 那么一定存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}$ 满足以下条件:

1. $|\varphi_k| \leq |\varphi_{k+1}|$,
2. $\varphi_k \to f$.

Proof: 对正负部分别使用上一定理即可. □

Definition 1.8 (Support Set)**.** 函数 f 的支集 $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{f \neq 0\}}$, 若 $\mathrm{supp}(f)$ 是紧的, 则称 f 是紧支的.

Corollary 1.3. 设 f 可测, 那么有紧支的绝对值递增函数列 $\{\varphi_k\}$ 逐点收敛到 f.

Proof: 把之前的函数列同时用球做截断就行. □

Theorem 1.10: 阶梯函数 a.e. 逼近可测函数

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则存在一列阶梯函数 $\{\psi_k\}$ 使得 $\psi_k \to f, a.e.$.

证明依赖如下引理

Lemma. 设 $\{f_k\}$ 和 $\{g_k\}$ 是可测函数列, 且有

$$\begin{cases} f_k \to f, a.e. \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(\{f_k \neq g_k\}) < \infty, \end{cases}$$

则有 $g_k \to f, a.e.$.

Proof of Lemma.

$$\begin{aligned}\{|g_k - f| \geq \varepsilon\} &\subseteq \{|g_k - f_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &\subseteq \{|f_k - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{g_k \neq f_k\}\end{aligned}$$

由于

$$\{g_k \to f\} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \{|g_k - f| < \frac{1}{l}\},$$

由 De Morgan 律有

$$\{g_k \nrightarrow f\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \{|g_k - f| \geq \frac{1}{l}\}.$$

因此有

$$\{g_k \nrightarrow f\} \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} \left(\{g_k \neq f_k\} \cup \{|f_k - f| \geq \frac{1}{2l}\} \right) = \limsup_{k\to\infty} \{g_k \neq f_k\} \cup \{f_k \nrightarrow f\}.$$

结合条件和 Borel Cantelli 引理得证. □

Proof: 策略是从特殊到一般的做法.

1. 当 $f = \chi_E$ 且 $m(E) < \infty$. 利用之前的有限方体逼近, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有一组方体 $\{Q_j\}_{j=1}^N$, 使得 $m(E \Delta \left(\bigcup_{j=1}^{N} Q_j \right)) < \frac{\varepsilon}{2}$. 将方体的边延长, 并以此剖分, 得到有限个内部不

交的矩体 $\{R_j\}_{k=1}^M$, 为了方便处理, 将每个矩体都以原有中心向内缩小得到 $\{\widetilde{R_j}\}_{k=1}^M$. 使得 $m(E\Delta\left(\bigcup\limits_{k=1}^M\widetilde{R_k}\right))<\varepsilon$. 此时令

$$\psi=\sum_{k=1}^M\chi_{\widetilde{R_k}}.$$

那么当

$$x\in(E\Delta\left(\bigcup_{k=1}^M\widetilde{R_k}\right))^c=(E^c\cap\left(\bigcup_{k=1}^M\widetilde{R_k}\right)^c)\cup(\left(\bigcup_{k=1}^M\widetilde{R_k}\right)\cap E),$$

有 $\psi=\chi_E$.

2. 当 f 是任意紧支简单函数. 和上一步没有本质区别.

3. 当 f 是一般的可测函数. 由之前的推论, 可以找一列紧支的简单函数列 $\{\varphi_k\}$ 使得 $\varphi\to f$. 由上一步, 可以找另一列阶梯函数 $\{\psi_k\}$, 且使得 $m(\{\psi_k\neq\varphi_k\})<\dfrac{1}{2^k}$. 由引理, 就有 $\{\psi_k\}$ 几乎处处收敛到 f. □

1.7 Littlewood's Three Principles

1. 所有集合都差不多是有限个区间的并;
2. 所有函数都是差不多连续的;
3. 所有收敛列都是差不多一致收敛的.

Theorem 1.11: (Egorov) 近乎一致收敛

设可测集 E 满足 $m(E)<\infty$, 函数 $f,f_1,\cdots$ 是定义在 E 上的可测函数且几乎处处有限, 若 $f_k\to f,a.e.$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 有 $A_\varepsilon\subseteq E$, 使得 $m(E-A_\varepsilon)<\varepsilon$, 且在 A_ε 上有 $f_k\rightrightarrows f$.

Proof: 不失一般性, 可以设函数列 $\{f_k\}$ 逐点收敛到 f, 那么其集合表示为

$$\bigcup_{l=1}^\infty\bigcap_{j=1}^\infty\bigcup_{k=j}^\infty\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\}=\varnothing.$$

由连续性, 从而对每个 l 可以取出一个 k_l(可以取为递增列) 使得

$$m(\bigcup_{k=k_l}^\infty\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\})<\frac{\varepsilon}{2^l},$$

然后由次可加性有

$$m(\bigcup_{l=1}^\infty\bigcup_{k=k_l}^\infty\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\})<\varepsilon.$$

现在令

$$A_\varepsilon=\bigcap_{l=1}^\infty\bigcap_{k=k_l}^\infty\{|f_k-f|\leq\frac{1}{l}\}$$

就完成了证明. □

Remark. *1. 在 Folland 的书上没有几乎处处有限这一条件, 在证明中好像也没用到这一条件.*

2. 测度有限是不能去掉的条件, 可以考虑正半实轴的特征函数和函数列.

Theorem 1.12: (Lusin) 限制上连续

设 E 可测, 函数 f 在 E 上连续且几乎处处有限, 那么任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subseteq E$, 使得 $m(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$, 使得 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续.

Proof: 首先对有限测度集上的简单函数, 这个很容易. 再对有限测度集上的一般可测函数, 先用简单函数逐点逼近, 再用 Egorov 定理将 E 改造成子集 A_ε, 再改造 A_ε 为闭集 F_k 使得函数 φ_k 在 F_k 的限制下连续, 最后求并集即可. 一般的可测集只要用圆环剖分加上求并就行, 注意闭集的不交并还是并集. □

Remark. 里面的连续是子拓扑的连续, 结合扩张定理会很有用.

2 Lebesgue Integration Theory

2.1 The Construction of New Integration Theory

一下的 $\int$ 符号代表在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分. 可积是指积分值有限.

首先对非负简单函数定义积分. 设函数如下

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k},$$

其中 $a_k\geq 0$, E_k, $k=1,\cdots$ 是无交的, 那么定义 Lebesgue 积分为

$$\int\varphi dm=\sum_{k=1}^{N}a_k m(E_k).$$

这个积分是良定的, 因为若写

$$\varphi=\sum_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j},$$

那么考虑计算 $m(E_k\cap f_j)$ 即可.

通过定义以及良定性中的技术可以证明其具有线性性, 可加性 (积分区域) 和单调性.

然后对非负可测函数定义积分, 设函数为 f, 那么其 Lebesgue 积分为

$$\int fdm=\sup\{\int\varphi:\varphi\text{是简单函数},0\leq\varphi\leq f\}.$$

这样定义的积分有重要的性质, 单调性是由定义显然的.

Proposition 2.1: 非负函数积分为 0

若 $f\geq 0$ 且可测, 那么 $\int_E fdm=0$ 当且仅当 E 上 $f=0,a.e.$.

Corollary 2.1. *修改可测函数零测集上的函数值, 其积分值不变.*

Proposition 2.2: 可积函数几乎处处有限

若 f 是 E 上的可积函数, 则函数 f 在 E 上几乎处处有限.

证明都是一些测度的标准计算, 略去.

Lebesgue 积分的重要问题之一是积分与其他运算的一些交换问题.

Theorem 2.1: 单调收敛定理 (MCT)

设 E 上可测函数列 $f_k\geq 0$, $k=1,\cdots$, 且 $f_k\nearrow f,a.e.$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k dm=\int_E fdm$.

Proof: 证明中有一个有意思的技巧. 几乎处处的条件没有影响, 直接忽略. 首先有显然的不等式 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k dm\leq\int_E fdm$. 利用定义, 考虑一个任给的简单非负函数 $\varphi=\sum_{j=1}^{N}a_j\chi_{F_j}$ 满足 $\varphi\leq f$. 然后取 $\alpha\in(0,1)$, 并令 $E_k=\{f_k\geq\alpha\varphi\}$. 注意到 $E_k\nearrow E$. 有

$$\int_E f_k dm>\int_{E_k}f_k dm>\alpha\int_{E_k}\varphi dm=\alpha\left(\sum_{j=1}^{M}a_j m(F_j\cap E_k)\right).$$

取极限有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f dm \geq \alpha\int_E \varphi dm.$$

最后取 $\alpha \to 1^-$ 即可. □

Theorem 2.2: Fatou 引理

设 f_k 是 E 上的非负可测函数列, 那么

$$\int_E \liminf_k f_k dm \leq \liminf_k \int_E f_k dm.$$

Proof: 注意到对给定的 k, 有

$$\inf_{j\leq k} f_j \geq f_i \quad \forall i \leq k.$$

左右同时积分有

$$\int_E \inf_{j\geq k} f_j dm \leq \int_E f_i dm \quad \forall i \leq k,$$

也就是

$$\int_E \inf_{j\geq k} f_j dm \leq \inf_{i\geq k}\int_E f_i dm.$$

两端取极限再用 MCT 就完成了证明. □

Remark. *不取等的反例可以考虑函数列* $f_n = n\chi_{(0,1)}$.

Remark. *事实上 Fatou 引理的证明并不依赖 MCT, 因此逻辑上是可以用 Fatou 引理证明 MCT 的. 证明仍然是两边做不等式, 其中 Fatou 引理可以用来解决不平凡的一边.*

利用 MCT, 就可以证明积分的正线性和下面的逐项积分性质.

Proposition 2.1. *若* $f_k \geq 0$ *是* E *上的可测函数列, 且* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *几乎处处有限, 那么*

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) dm = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k dm.$$

这个性质可以用来证明之前的 Borel Cantelli 引理.

最后给出一般的可测函数的 Lebesgue 积分.

Definition 2.1: 可测函数的 Lebesgue 积分

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集, 且函数 f 在 E 上可测, 若 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 至少一个是有限的, 那么函数 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int_E f dm := \int_E f^+ dm - \int_E f^- dm,$$

且若 $\int_E f^+ dm$ 和 $\int_E f^- dm$ 都是有限的, 这称函数 f 在 E 上可积, 记 $f \in L^1$.

这个定义自然与蕴含了下面的结果.

Proposition 2.3: 可积和绝对可积

函数 f 可积等价于函数 $|f|$ 可积.

那么以后验证函数是否 Lebesgue 可积往往可以考虑其绝对值是否可积, 也就是非负可测函数.

在之前的铺垫下, 不难验证 Lebesgue 积分的线性性, 也就是 L^1 构成线性空间 (先证可积, 再证线性), 以及函数可积则函数几乎处处有限. 使用 MCT 则得到下面的有用结果.

Proposition 2.2. 设 $f \in L^1$, 可测集 $E_1, \cdots$ 不交, 那么

$$\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k} f dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f dm,$$

最后, 还有类似的单调性和三角不等式 $|\int_E f dm| \leq \int_E |f| dm$, 证明都与之前类似或并不困难.

2.2 The Property of Lebesgue Integration

积分值有限似乎暗喻着, 积分值是由一个较大的积分区域确定的, 事实上这个感觉是有道理的. 可以联想有限可测集可以被紧集任意逼近这一结果.

Theorem 2.1. 若 $f \in L^1$, 则任取 $\varepsilon > 0$, 存在球 $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $m(B) < \infty$, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n - B} |f| dm < \varepsilon$.

Proof: 造函数列 $f_k = |f| \chi_{B_k}$, 则 $f_k \nearrow |f|$, 然后用 MCT 和 $\varepsilon - \delta$ 语言即可. □

Theorem 2.3: Lebesgue 积分的绝对连续性

设函数 $f \in L^1$, 那么任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得下式

$$\int_E |f| dm < \varepsilon,$$

对任意 $m(E) < \delta$ 成立.

Proof: 证明是标准的. 考虑截断 $E_k = \{f \leq k\}$. 令 $f_k = |f| \chi_{E_k}$, 那么有 $f_k \nearrow |f|$. 利用 MCT 就可以找 N 使得

$$0 < \int f dm - \int f_N dm \varepsilon,$$

那么取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 就有任意 $m(E) < \delta$, 都有

$$\int_E |f| dm = \int_E (|f| - f_N) dm + \int_E f_N dm < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

在幂级数的一致收敛中, 有 Weierstrass 收敛定理, 其大意就是找一个收敛级数从而控制住幂级数, 在这里用类似的想法, 将得到一个强大的收敛定理.

Theorem 2.4: 控制收敛定理 (DCT)

设函数列 $f_k \to f, a.e.$, 且存在控制函数 $g \in L^1(E)$, 使得在 E 上有 $|f_k| \leq g, a.e.$, 则有

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f_k dm = \int_E f dm.$$

Proof: 由条件 $\begin{cases} f_k \to f, a.e. \\ |f_k| \le g \end{cases}$ 可知 $|f| \le g, a.e.$. 令 $g_n := |f_n - f|$, 那么 $g_n \to 0, a.e.$, 并且有 $0 \le g_n \le 2g, a.e.$. 利用 Fatou 引理有,

$$\int \liminf_{n\to\infty}(2g - g_n) \le \liminf_{n\to\infty} \int (2g - g_n).$$

也即

$$\int 2g \le \int 2g - \limsup_{n\to\infty} \int g_n.$$

这就是说

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0.$$

□

下面给出一个使用 DCT 的例子.

Theorem 2.5: 积分号下求导

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是可测集, 定义函数 $f : E \times (a,b) \to \mathbb{R}$, 有以下条件成立:

(1) $\forall y \in (a,b), x \mapsto f(x,y)$可积.

(2) $\forall x \in E, y \mapsto f(x,y)$可微.

(3) $\exists g \in L^1, s.t. \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le g(x)$.

那么有 $\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_E f(x,y)dx = \int_E \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

Proof: 由可微性, 可以取数列 $\{t_k\}, t_k \to 0$, 当$k \to \infty$. 此时定义

$$f_k = \frac{f(x, y+t_k) - f(x,y)}{t_k} \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

直接使用 DCT 计算左端为

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

□

最后, 我们说明 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广.

Theorem 2.2. *若函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 那么函数在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积, 记为*

$$\int_a^b f dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

Proof: 利用 Darboux 上下和定义出阶梯函数列 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\psi_n\}$. 那么若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则有

$$\int_a^b \varphi_n dx \searrow \overline{\int_a^b} f dx, \quad \int_a^b \psi_n dx \nearrow \underline{\int_a^b} f dx.$$

由于 f 有界, 设 $|f| \le M$, 那么由定义, 有 $|\varphi_n|, |\psi_n| \le M$. 定义函数 $g = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ 和 $h = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$. 此时由 DCT, 可知 $g, h \in L^1$. 那么计算有

$$\int_{[a,b]} g dm = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} \varphi_n dm = \overline{\int_a^b} f dx.$$

$$\int_{[a,b]} hdm = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n dm = \underline{\int_a^b} f dx.$$

也就是说由 f 的 Riemann 可积得到了 $g = h, a.e.$ 的结果, 而事实上 $h \leq f \leq g$, 因此 $f = g, a.e.$, 即 f 是 Lebesgue 可积的. □

2.3 L^p Space

本小节将讨论函数空间的向量空间结构, 和其上的范数, 度量以及对应的收敛问题.

Definition 2.2: L^p 空间

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个可测集, f 是 E 上的可测函数, 那么对 $0 < p < +\infty$, 定义范数如下

$$||f||_p := \left(\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$L^p := \{f : ||f||_p < +\infty\}.$$

特别的, 对于 $p = +\infty$ 的情况. 称 f 本性有界, 若在 E 上有 $|f| \leq M$ 成立. 其中称 $\operatorname{ess\,sup}|f| := \inf\{M > 0 : |f| \leq M\}$ 为函数 f 的本性上确界, 此时 $||f||_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in E} |f|$.

Remark. *由于 Lebesgue 积分无法区分几乎处处相等的函数, 因此商去这个等价类, 以下也默认这一操作且不做区分.*

要使得其为向量空间, 只要验证函数的和还是 L^p 的即可.

Proposition 2.3. *设 $1 \leq p \leq +\infty$, 若函数 $f, g \in L^p$, 那么 $f + g \in L^p$.*

Proof: 当 $p = +\infty$, 结论是显然的.

当 $1 \leq p < +\infty$, 计算如下

$$||f + g||_p^p = \int_E |f + g|^p dm \leq \int_E 2^p (\max |f|, |g|)^p dm \leq 2^p \left(\int_E |f|^p dm + \int_E |g|^p dm\right).$$

□

事实上我们还没有证明定义的" 范数" 是一个范数, 这一结果的验证需要一些步骤.

Theorem 2.6: Minkovski 不等式

若 $1 \leq p \leq +\infty$, $f, g \in L^p$, 则有

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Proof: 首先证明 Young 不等式. 若 $\lambda \in (0, 1)$, $a, b \geq 0$, 则有

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

齐次化后求导即可.

其次证明积分形式的 Hölder 不等式. 若 $1 < p < \infty$, $p' := \frac{p}{p-1}$, 且 $f, g \in L^p$, 那么

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

略去平凡情况, 计算如下

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{f}{||f||_p}\frac{g}{||g||_{p'}}\right|\right|_1 &= \int_E \left|\frac{f}{||f||_p}\right|^{p\frac{1}{p}} \left|\frac{g}{||g||_{p'}}\right|^{p'\frac{1}{p'}} dm \\ &\leq \frac{1}{p}\int_E \left|\frac{f}{||f||_p}\right|^{p} dm + \frac{1}{p'}\int_E \left|\frac{g}{||g||_{p'}}\right|^{p'} dm = 1\end{aligned}$$

最后证明 Minkovski 不等式. $p=1,+\infty$ 时结论平凡. 当 $1<p<+\infty$ 时, 计算如下

$$\begin{aligned}||f+g||_p^p &= \int_E |f+g|^p dm = \int_E |f+g||f+g|^{p-1}dm \\ &\leq \int_E |f||f+g|^{p-1}dm + \int_E |g||f+g|^{p-1}dm \\ &\leq (||f||_p+||g||_p)\left(\int_E |f+g|^{(p-1)p'}dm\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (||f||_p+||g||_p)||f+g||^{p-1}.\end{aligned}$$

□

Remark. 事实上这里容易说明当 $0<p<1$ 时不是一个范数.

至此, L^p 空间成为了赋范空间, 因此有对应的范数拓扑 (其实就是度量拓扑). 基于范数定义函数空间上的 Cauchy 列, 即 $d(f_k,f_l)\to 0$, 当 $k,l\to+\infty$. 我们称任意 Cauchy 列都有极限的空间为完备的. 有下面的结果.

Theorem 2.7: Risez-Fisher

当 $1\leq p<+\infty$, $(L^p(E),||\cdot||)$ 是完备赋范空间.

Remark. 证明前需要说明的是, L^p 收敛不代表点态的收敛, 甚至可以任意一点都不收敛但 L^p 收敛. 我们要找的是 L^p 拓扑下的极限函数, 并证明其也是 L^p 的.

Proof: 仿照 $\mathbb{R}$ 上的处理, 先找 $\{f_n\}$ 的收敛子列 $\{f_{n_k}\}$, 满足

$$||f_{n_{k+1}}-f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad n_{k+1}>n_k.$$

先定义

$$g_N = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{N}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,$$

$$g = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|.$$

那么有 $g_N\nearrow g$, 也有 $g_N^p\nearrow g^p$. 并且有

$$||g_N||_p \leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{k=1}^{N}||f_{n_{k+1}}-f_{n_k}||_p \leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{k=1}^{\infty}||f_{n_{k+1}}-f_{n_k}||_p \leq M.$$

利用 Fatou 引理, 计算有

$$\int_E g^p dm \leq \liminf_{k\to\infty}\int_E g_{n_k}^p dm \leq M^p,$$

因此有 $g \in L^p$, 也有 g 几乎处处有限, 那么可以逐点定义

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

这里的等号是几乎处处成立的. 那么再有 Fatou 引理, 有

$$\int_E f^p dm \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E f_{n_k}^p dm.$$

因此 $f \in L^p$, 最后由 $||f - f_n||_p \leq ||f - f_{n_l}||_p + ||f_{n_l} - f_n||_p$ 完成证明. □

当然还要证明 $p = +\infty$ 的情况.

Theorem 2.8:

L^∞ 是完备的.

Proof: 首先处理零测集. 记集合 $A_k = \{|f_k| > ||f||_\infty\}$, 和 $B_{k,j} = \{|f_k - f_j| > ||f_k - f_j||_\infty\}$. 那么由定义, 这两种集合都是零测集. 记 $F = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k,j=1}^{\infty} B_{k,j}\right)$, 那么 F 也是零测集. 现在在集合 $E \setminus F$ 上, 有

$$|f_k(x) - f_j(x)| \leq ||f_k - f_j||_\infty,$$

因此可以逐点定义极限函数 f, 具体为

$$f = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(x) & x \in E \setminus F, \\ 0 & x \notin E \setminus F. \end{cases}$$

函数 f 是可测的, 并且不难发现其本性有界, 最后只要在 $E \setminus F$ 上计算如下

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{j\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| \leq ||f_j - f_k||_\infty.$$

□

之前的收敛模式总结为如下概念.

Definition 2.3: 依范数收敛

对于函数列 $\{f_k\} \subseteq L^p$, 其中 $1 \leq p \leq +\infty$, 若有 $f \in L^p(E)$, 满足 $||f_k - f||_p \to 0$, 当 $k \to \infty$, 则称函数列依 L^p 范数收敛于 f, 记作

$$f_k \xrightarrow{L^p} f.$$

为了应用, 我们发展更弱意义的收敛.

Definition 2.4: 依测度收敛

若可测函数列 $\{f_k\}$ 对任给的 $\varepsilon > 0$, 若有 $m(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$, 当 $k \to \infty$, 则称 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f, 记作

$$f_k \xrightarrow{m} f.$$

这两个收敛意义是相关的, 接下来串联其一些概念的关键是上下限集和 Borel-Cantelli 引理.

Proposition 2.4: 依 L^p 范数收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛

$f_k \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_k \xrightarrow{m} f.$

Proof: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 计算如下

$$\left(\int_E |f_k - f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{|f_k - f| \geq \varepsilon} |f_k - f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} \geq \varepsilon m(|f_k - f| \geq \varepsilon).$$

即

$$m(|f_k - f| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}||f_k - f||_p \to 0.$$

□

实分析中常考虑几乎处处收敛, 那么几乎处处收敛和依测度收敛是什么关系呢?

Example 2.1: 两个反例

1. $f_n = \chi_{[\frac{n-2^m}{2^m}, \frac{n+1-2^m}{2^m}]}$, 其中 $2^m \leq n < 2^{m+1}$.
2. $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$.

这两个反例给出两种收敛方式之间的关系: 一个是 L^p 但不 a.e., 一个依测度收敛但不 L^p, 但是我们仍有将其联系在一起的办法.

Theorem 2.9: Lebesgue 定理

若 $m(E) < +\infty$, 且 $f, f_1, \cdots$ 可测并在 E 上几乎处处有限, 则有

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \Rightarrow f \xrightarrow{m} f.$$

Proof: 从结论出发, 要对任给的 $\varepsilon > 0$, 证明 $m(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$, 那么考虑几乎处处收敛的集合表述, 即

$$m\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}\right) = 0.$$

也就是对任给的 $l \in \mathbb{N}_+$, 有

$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}\right) = 0.$$

此时定义 $E_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}\{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}$, 注意测度的连续性和有限性, 看出函数列依测度收敛. □

Theorem 2.10: Risez 定理

若函数列 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f, 那么有子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 f.

Proof: 由依测度收敛的定义, $m(\{|f_k - f| \geq \varepsilon\}) \to 0$, 因此可以取出递增的指标 $\{n_k\}$ 使得有

$$m(\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

利用 Borel-Cantelli 引理有 $\limsup_{k\to\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}$ 为零测集.

那么记 $E_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}$, 并考虑 $E \setminus E_j$, 在这个集合上有

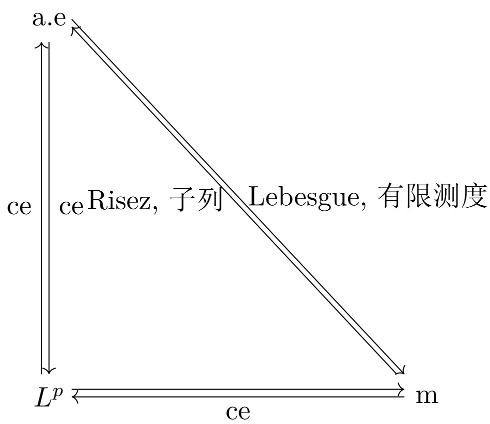
$$|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^j}.$$

那么集合

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(E \setminus E_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E \cap E_j^c) = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\{|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}\} = E \setminus \left(\limsup_{k=1}\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}\right).$$

□

我们将各种收敛意义的关系总结如下表, 值得注意的是, L^p 收敛和几乎处处收敛是没有关系的, 反例在之前已经给出了.



此外, L^p 和 L^q 空间 $(1 \leq p < q < \infty)$ 之间的关系不是想当然的, 尽管我们曾有强等价关系.

若 $X = \mathbb{R}^n$, L^p 和 L^q 空间是互不包含的, 例子可以通过幂函数来构造.

若 $m(X) < \infty$, 那么有 $L^p \subseteq L^q$, 更具体的, 我们有如下不等式:

$$\frac{1}{m^{\frac{1}{q}}(X)}||f||_q \leq \frac{1}{m^{\frac{1}{p}}(X)}||f||_p.$$

证明用到如下的 Hölder 不等式:

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

没有本质的困难.

在本节的最后, 我们仍然强调, L^p 函数有很多性质很坏的函数, 但是, 这些家伙都能被我们熟悉的一些比较好的函数逼近, 具体地说, 能被简单函数, 阶梯函数, 乃至连续紧支函数依范数逼近, 其中的工具是单调收敛定理和点集拓扑中的 Urysohn 引理, 证明是老生常谈, 略去.

Theorem 2.11: L^p 逼近

简单函数, 阶梯函数, 连续紧支函数 $(C_c(\mathbb{R}^n))$ 在 L^p 空间稠密.

2.4 Fubini Theorem

Fubini 定理是一个条件简单, 但是结论异常强大的定理, 以下仅叙述定理及其大致用法.

Definition 2.5: 切片 (slice)

我们称集合 $E^y=\{(x,y):x\in E\}$ 为集合关于 y 的切片, 称函数 $f^y(x)=f(x,y)$ 为函数 $f(x,y)$ 关于 y 的切片, 对 x 类似定义这一概念.

Theorem 2.12: Tonelli Theorem

记 L^+ 为非负可测函数全体, 那么有:

$(T1)$ 几乎所有$y\in\mathbb{R}^{n_2}, f^y\in L^+(\mathbb{R}^{n_1})$;

$(T2)$ $y\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_2}}f^y dx\in L^+(\mathbb{R}^{n_2})$;

$(T3)$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}fdm=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}}f^y dx\right)dy.$

类似的结论对 x 也成立.

用这个定理可以证明 Fubini 定理, 并且, 这两个定理也可以一起使用, 比如先处理绝对值版本的交换次序, 再回到没有绝对值的情况, 毕竟对于 Lebesgue 积分而言, 可积和绝对可积是一回事. 以下再叙述 Fubini 定理, 条件是非常弱的.

Theorem 2.13: Fubini Theorem

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$, 那么有:

$(F1)$ 几乎所有$y\in\mathbb{R}^{n_2}, f^y\in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$;

$(F2)$ $y\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_2}}f^y dx\in L^1(\mathbb{R}^{n_2})$;

$(F3)$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}fdm=\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}}f^y dx\right)dy.$

类似的结论对 x 也成立.

2.5 Applications of Fubini Theorem

似乎是众所周知的事情, Fubini 定理的应用比其证明要重要得多. 接下来将展示一些 Fubini 定理的应用, 其中的一些结果并不是完全显然的.

首先是将 Tonelli 定理对应到测度, 或者说示性函数上.

Corollary 2.1: 示性函数的 Tonelli 定理

设 $E\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 是可测集, 那么有:

(1) 几乎所有$y\in\mathbb{R}^{n_2}, E^y\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$;

(2) $y\mapsto m(E^y)$是可测函数;

(3) $m(E)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n_2}}m(E^y)dy.$

类似的结论对 x 也成立.

这个结论表明, 集合可测, 其切片也几乎是可测的, 但是, 切片几乎可测无法说明集合可测, 一个例子是 $[0,1]\times\mathcal{N}$.

切片这一操作启发我们考虑乘积集合, 按照直觉, 可测集的乘积应该也是可测的, 同时, 在测度上应该就是其测度的乘积. 另一个值得注意的是, 依照推论, 切片也应该能在某些时候变得更具体且性质更好, 把这些命题都列举如下.

Proposition 2.5: 乘积可测 $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 分量可测

若 $E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{R^{n_1+n_2}}$, 并且 $m_*(E_2)>0$, 那么 $E_1\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$.

Proof: 由于 $E_1\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}\Leftrightarrow\chi_{E_1}$ 可测, 而 $\chi^y_{E_1\times E_2}(x)=\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(y)$ 对于几乎每个 $y\in E_2$ 是可测的. 那么只要找一个确定的 $y\in E_2$ 即可, 这里用到了条件中的外测度非零. 设 $F=\{y\in\mathbb{R}^{n_2}:(E_1\times E_2)^y\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}\}$, 那么由推论, $m(F^c)=0$, 因此

$$0<m_*(E_2)\leq m_*(E_2\cap F)+m_*(E_2\cap F^c)\leq m_*(E_2\cap F)$$

也就是说 $E_2\cap F\neq\varnothing$. □

下个结果是完全符合直觉的.

Proposition 2.6: 可测集的乘积

设 $E_1\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1}}$, $E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_2}}$, 那么 $E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$ 且 $m(E_1\times E_2)=m(E_1)m(E_2)$.

Proof: 证明依赖一个引理.

Lemma. $m_*(E_1\times E_2)\leq m_*(E_1)m_*(E_2)$.

Proof: 只证明相对本质的情况, 即两个集合都是有限测度. 那么有对任给的 $\varepsilon>0$, $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ 和 $\{Q'_l\}_{l=1}^\infty$ 为两个集合的方体覆盖, 满足 $m(E_1)+\varepsilon\geq\sum\limits_{k=1}^\infty|Q_k|$ 和 $m(E_2)+\varepsilon\geq\sum\limits_{l=1}^\infty|Q'_l|$. 由于 $\{Q_k\times Q'_l\}_{k,l=1}6\infty$, 因此直接计算乘积的测度

$$\begin{aligned}m_*(E_1\times E_2)&\leq m_*(\bigcup_{k,l=1}^\infty Q_k\times Q'_l)\\&\leq\sum_{k,l=1}^\infty|Q_k\times Q'_l|=\left(\sum_{k=1}^\infty|Q_k|\right)\left(\sum_{l=1}^\infty|Q'_l\right)\\&\leq(_*(E_1)+\varepsilon)(m_*(E_2)+\varepsilon)\to m_*(E_1)m_*(E_2).\end{aligned}$$

□

有了引理以后, 设 $E_1=G_1\setminus Z_1$, $E_2=G_2\setminus Z_2$, 其中 G_i 是 G_δ 集, Z_i 是零测集. 那么集合 $G_1\times G_2$ 也是 G_δ 集, 由引理有,

$$m(G_1\times G_2\setminus E_1\times E_2)\leq m((G_1\setminus E_1)\times G_2)+m(G_1\times(G_2\setminus E_2))=0.$$

可知 $E_1\times E_2\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$. 最后使用推论

$$m(E_1\times E_2)=\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\chi_{E_1\times E_2}dm\xlongequal{\text{Fubini}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\chi^y_{E_1\times E_2}dx\right)dy=m(E_1)m(E_2).$$

□

接下来的命题为卷积做铺垫, 并且其证明不是显然的.

Proposition 2.7: 换元可测

若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 那么 $\tilde{f}(x,y)=f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的可测函数.

Proof: 由定义, 只要证明对任给的 a, 集合 $\tilde{E}_a\{(x,y):f(x-y)>a\}$ 是可测的. 考虑连续映射 $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$, $(x,y)\mapsto x-y$. 记集合 $E_a=\{x:f(x)>a\}$ 是可测的, 实际有 $\tilde{E}_a=\Phi^{-1}(E_a)$. 根据可测集的结构, 只要处理 G_δ 集和零测集的原像即可. 处理 G_δ 集的步骤是显然的, 而对于零测集, 我们考虑其等测包, 即一个零测的 G_δ 集, 只要说明这个零测集的原像仍然零测就行了. 记 $\tilde{G}=\Phi^{-1}(G)$, 由于

$$\chi_{\tilde{G}}^y(x)=1\Leftrightarrow(x,y)\in\tilde{G}\Leftrightarrow x-y\in G\Leftrightarrow x\in G+y\Leftrightarrow\chi_{y+G}(x)=1,$$

由 Fubini 定理, 有

$$m(\tilde{G})=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\chi_{\tilde{G}}dm=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\tilde{G}}^y dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{y+G}dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^n}m(y+G)dy=0.$$

剩下的步骤是平凡的. □

根据这个命题, 我们定义卷积如下.

Definition 2.6: 卷积 (convolution)

设 f,g 是可测函数, 且对几乎每个 $x\in\mathbb{R}^n$, 积分

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)dy$$

是有限的, 则称 $f*g$ 是函数 f,g 的卷积.

有了之前的命题, 很容易得到如下结果.

Theorem 2.14: 卷积的 L^1 估计

若 $f,g\in L^1$, 那么对几乎每个 $x\in\mathbb{R}^n$, $(f*g)(x)$ 是良定的且是可积的, 并有如下估计

$$||f*g||_1\le||f||_1||g||_1.$$

接下来的 Fourier 变换是熟悉的东西, 定义如下.

Definition 2.7: Fourier Transform

若 $f\in L^1$, 其 Fourier 变换定义如下

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx.$$

Proposition 2.8: Fourier 变换的性质

$\hat{f}(\xi)$ 是关于 ξ 的有界连续函数, 并且有 $\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

其中连续性的证明用到 DCT, 似乎不方便直接按定义证明.

3 Differentiation and Integration

3.1 Differentiation of the Integral

本节讨论的问题是对积分求导的问题, 在连续的形况下, 有如下结果

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

对称化后可以理解为某种平均, 也就是

$$\lim_{m(B)\to 0}\int_B f dm = f(x).$$

求导是一个局部的工作, 为了让条件足够弱, 我们考虑局部可积函数, 定义如下.

Definition 3.1: 局部可积函数 (L^1_{Loc})

$$L^1_{Loc} = \{f : f \in L^1(K),\ \forall K \subseteq_{cpt} \mathbb{R}^n\}$$

为了明确目标, 首先陈述我们将证明的结果如下.

Theorem 3.1: Lebesgue 微分定理 (LDT)

若 $f \in L^1_{Loc}$, 则对几乎每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f dm = f(x).$$

这是一个定性的结果, 但是我们将通过一些定量的估计将其证明, 接下来我们将引进中心极大函数和弱 $(1,1)$ 型算子.

Definition 3.2: Hardy-Littlewood 极大函数和中心极大函数

若 $f \in L^1_{Loc}$, 称 f 的 H-L 极大函数和中心极大函数为 f^* 和 Mf, 分别为

$$f^*(x) = \sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f|dm,$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} |f|dm.$$

Remark 3.1: H-L 极大函数和中心极大函数等价

$$Mf \le f^* \le 2^n Mf.$$

关键的观察是

$$\frac{1}{m(B)}\int_{B(x,2r)} |f|dm \ge \frac{1}{m(B)}\int_B |f|dm.$$

接下来是一个技术化的引理, 在之后还会多次出现.

Theorem 3.2: 覆盖引理

设 $\mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_N\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列开球, 那么存在 $\{B_{k_1},\cdots,B_{k_p}\}$ 满足其互不相交, 且

$$\sum_{i=1}^{p} m(B_{k_i}) \geq \frac{1}{3^n} m(\bigcup_{i=1}^{N} B_i).$$

Proof: 按直觉, 应该尽可能的选择不交的大球, 事实上也确实如此. 对于两个球 B_1 和 B_2, 不妨设前者半径更大, 那么若两球相交, 后者必然落在前者的三倍大同心球内. 那么我们每次取出最大球, 便删去与这个三倍大的同心球相交的球即可, 重复有限次完成了证明. □

接下来我们证明 M 是弱 $(1,1)$ 型算子, 首先我们证明局部可积函数的中心极大函数是可测的.

Proposition 3.1: Mf 可测

若 $f\in L^1_{Loc}$, 那么 Mf 是下半连续的.

Proof: 只要证明 $E_\alpha=\{Mf>\alpha\}$ 是开集即可. 证明的关键在于扰动. 由定义, $\forall x\in E_\alpha$, 存在半径为 r 的球使得

$$\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f|dm > \alpha.$$

那么就有 $\rho>r$ 使得

$$\frac{1}{m(B(x,\rho))}\int_{B(x,r)} |f|dm > \alpha.$$

此时有 $x\in B(x,\rho-r)\subseteq E_\alpha$. □

Remark 3.2:

若 $f\in L^1_{Loc}$, 那么 f^* 是下半连续的. 证明的手法是完全一致的.

现在来证明弱 $(1,1)$ 型不等式.

Theorem 3.3: weak type $(1,1)$ operator

存在常数 $C>0$, 使得 $m\left(\{Mf>\alpha\}\right)\leq \frac{C}{\alpha}||f||_1$ 对任意 $\alpha>0$, $f\in L^1$ 成立.

Proof: 设紧集 $K\subseteq E_\alpha$, 那么对任意 $x\in K$, 存在 $r_x>0$ 使得

$$\frac{1}{m(B(x,r_x))}\int_{B(x,r_x)} |f|dm > \alpha,$$

也即

$$\frac{1}{\alpha}\int_{B(x,r_x)} |f|dm > m(B(x,r_x)).$$

由紧性, 结合 vitali 覆盖, 不难得到如下估计

$$m(K)\leq \frac{3^n}{\alpha}||f||_1.$$

从紧集过渡到 E_α 需要用到可测集可以从内部用闭集逼近, 而 $\mathbb{R}^n$ 的闭集是 σ 紧的. □

一个形式相仿的不等式是 Tchebychev 不等式, 证明几乎是显然的.

Remark 3.3: Tchebychev Inequality

若 $f \geq 0$ 且可积, 令 $E_\alpha = \{f > \alpha > 0\}$, 那么有

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int fdm = \frac{1}{\alpha}||f||_1.$$

最后, 我们按照最开始说的, 用定量估计证明定性问题.

Theorem 3.4: Lebesgue 微分定理 (LDT)

若 $f \in L^1_{Loc}$, 则对几乎每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} fdm = f(x).$$

Proof: 首先, 我们已知这个结果是对连续函数处处成立的. 接下来考虑 $f \in L^1_{Loc}$ 的情况. 由于考虑的计算是局部的, 不妨设 f 是紧支的, 比如令 $\tilde{f} = f\chi$, 那么此时 $f \in L^1$, 由于 $C_c(\mathbb{R}^n) \overset{dense}{\subseteq} L^1$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 设 $g \in C_c$, 满足 $||f-g||_1 < \varepsilon$. 那么

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} fdm - fx\right| &\leq \left|\frac{1}{m(B)}\int_B (f-g)dm\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{m(B)}\int_B gdm - g(x)\right| + |f(x)-g(x)| \\
&\leq M(f-g) + \left|\frac{1}{m(B)}\int_B gdm - g(x)\right| + |f(x)-g(x)| \\
&\overset{r\to 0^+}{\leq} M(f-g) + |f(x)-g(x)|.
\end{aligned}$$

令 $E_\alpha = \left\{\left|\limsup\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} fdm - f(x)\right| > \alpha\right\}$. 由上面的估计, 有

$$E_{2\alpha} \subseteq \{M(f-g) > \alpha\} \cup \{|f-g| > \alpha\}.$$

利用对算子的估计和 Tchebychev 不等式, 有

$$m(E_{2\alpha}) \leq \frac{C+1}{\alpha}||f-g||_1 < \frac{C+1}{\alpha}\varepsilon.$$

也就是 $m(E_{2\alpha}) = 0$. 记 $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} E_{1/n} = E_0$, 那么 $m(E) = 0$, 这完成了证明. □

接下来看到一个 LDT 在测度上的应用.

Definition 3.3: Lebesgue 密度点

若 $E \in \mathcal{L}$, 我们称 x 是一个集合 E 的一个 Lebesgue 密度点, 若

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{m(B_r \cap E)}{m(B_r)} = 1.$$

Corollary 3.1:

设 $E \in \mathcal{L}$, 那么 E 中的几乎所有点都是 E 的 Lebesgue 密度点.

Proof: 证明是直接的, 因为下式.

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}\chi_E \overset{a.e.}{=} \chi(x)=1.$$

□

接下来的一个概念是有用的, 尽管有一些微妙. 为了严谨性, 接下来假设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Definition 3.4: Lebesgue point and Lebesgue set of a function

设 $f\in L^1_{Loc}$, 若

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|f(y)-f(x)|dy=0,$$

那么 x 是 f 的 Lebesgue 点, 并记 f 的所有 Lebesgue 点为 L_f, 称为 f 的 Lebesgue 集.

Remark 3.4:

这个集合和所有使得 LDT 成立的点的集合应该是不同的, Lebesgue 集的条件更强, 集合应该更小一些, 但是微妙之处是, 没有一个很直接的例子表明这个想法的正确性.
另一个问题是, 在 Stein 的书上, 有要求 $f(x)$ 有限, 若 $x\in L_f$, 而在 Folland 的书上则没有, 因为 Folland 的书上考虑的 L^p 空间的函数都是 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 的.

Theorem 3.5: 几乎所有点都是 Lebesgue 点

若 $f\in L^1_{Loc}$, 那么

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|f(y)-f(x)|dy \overset{a.e.}{=} 0.$$

Proof: 证明的思路与 LDT 类似. 由 LDT, 对任给的 $q\in\mathbb{Q}$, 有

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|f(y)-q|dy \overset{a.e.}{=} |f(x)-q|,$$

将上式中诱导的零测集记为 E_q, 令 $E=\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}E_q$, 只要再证明 $\mathbb{R}^n\setminus E\subseteq L_f$. 而 $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E=\bigcap\limits_{q\in\mathbb{Q}}E_q$, 对任给的 $\varepsilon>0$, 都存在 $q\in\mathbb{Q}$ 使得 $|f(x)-q|<\varepsilon$. 直接计算

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|f(y)-f(x)|dy &\le \lim_{r\to 0^+}\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r}|f(y)-q|dy+|q-f(x)|\\ &=|f(x)-q|+|q-f(x)|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

之前我们考虑的只有以 x 为中心的球的 LDT, 事实上我们可以推广这个条件.

Definition 3.5: 正则收缩 (shrink regularly)

设 $x\in\mathbb{R}^n$, 一族包含 x 的可测集合 $\mathscr{F}_x$ 被称为正则收缩至 x, 若满足:

(1) $\forall\varepsilon>0,\ \exists E\in\mathscr{F}_x, s.t.\ \mathrm{diam}E<\varepsilon$;

(2) $\exists C>0,\ s.t.\ m(E)>Cm(B(r_E,x)),\ \forall E\in\mathscr{F}_x,\ r_E=\inf\{r>0:B(r,x)\supseteq E\}$.

这个概念其实可以视为某种对称性的保持, 因为很容易说明, 含 x 的方体或者球体的全体是正则收缩的, 然后矩体全体不是, 因为里面存在很细长的矩体破坏了 $C>0$ 的一致性. 有了这个概念, 就能轻松推广原来的 LDT 了.

Theorem 3.6: generalized LDT

设 $f \in L^1_{Loc}$, 若集族 $\mathscr{F}_x$ 正则收缩到 x, 那么

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ U_\alpha\in\mathscr{F}_x}} \frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha} f(y)dy = f(x)$$

对 L_f 中的所有点成立.

3.2 Approximation to the Identity

首先给出一个有趣的观察. 令

$$\varphi(x)=\frac{1}{m(B(0,1))}\chi_{B(0,1)}(x),\quad \varphi_t(x)=\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right).$$

那么有

$$\begin{aligned}(f*\varphi_t)(x)&=\int f(x-y)\varphi_t(y)dy=\int f(x-y)\frac{1}{t^n m(B)}\chi_B(y/t)dy\\&=\frac{1}{t^n m(B)}\int_{B(0,t)} f(x-y)dy=\frac{1}{B(x,t)}\int_{B(x,t)} f(y)dy \overset{a.e.}{\to} f(x).\end{aligned}$$

那么我们也可以把 LDT 写成如下形式:

$$f\in L^1_{Loc}\Rightarrow (f*\varphi_t)(x)\overset{a.e.}{\to} f(x).$$

现在我们定义逼近恒等, 这是对 Fourier Analysis 中 good kernel 的加强版.

Definition 3.6: Approximation to the Identity

称一族定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 $\{K_t\}_{t>0}$ 是逼近恒等, 若其满足以下条件:

$(A1)$ $\displaystyle\int K_t dm=1$;

$(A2)$ $\exists C_1>0,\ s.t.\ |K_t(x)|\le \dfrac{C_1}{t^n},\ \forall t>0$;

$(A3)$ $\exists C_2>0,\ s.t.\ |K_t(x)|\le \dfrac{C_2 t}{|x|^{n+1}},\ \forall t>0,\ x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

这个条件其实比之前的 good kernel 要强, 以下用计算来验证.

首先有

$$\begin{aligned}\int_{|x|\ge\eta}\frac{t}{|x|^{n+1}}dx&=\int_{|x/t|\ge\eta/t}\frac{1}{|x/t|^{n+1}}d(x/t)\\&=\int |x|\ge\eta/t\frac{1}{|x|^{n+1}}dx \xlongequal{\text{polar}} \int_{\eta/t}^{\infty}dr\int_{S_r^{n-1}}\frac{1}{|x|^{n+1}}dS_r\\&=\int_{\eta/t}^{\infty}dr\int_{S_r^{n-1}}\frac{1}{r^2}\frac{1}{|x/r|^{n+1}}dS_1=m(S_1^{n-1})\int_{\eta/t}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\\&=m(S_1^{n-1})\frac{t}{\eta}.\end{aligned}$$

那么

$$\int |K_t|dm = \int_{|x|\le t} + \int_{|x|>t} |K_t|dm \le \int_{|x|\le t} \frac{C_1}{t^n}dm + \int_{|x|>t} \frac{C_2 t}{|x|^{n+1}}dm$$
$$= C_1 m(B(0,1)) + C_2 t \int_{|x|>t} \frac{1}{|x|^{n+1}}dm < \infty.$$

以及

$$\int_{|x|\ge\eta} |K_t|dm = \tilde{C}\frac{t}{\eta} \overset{t\to 0}{\to} 0.$$

这完成了验证. 接下来将通过直接的计算证明逼近恒等的逐点收敛性和 L^1 收敛性.

Theorem 3.7: 逼近恒等的逐点收敛性

若 $\{K_t\}_{t>0}$ 是一个逼近恒等, $f\in L^1$, 那么 $f*K_t \overset{a.e.}{\to} f$, 当 $t\to 0^+$.

Proof: 首先做差得

$$|(f*K_t)(x) - f(x)| \le \int |f(x-y) - f(x)||K_t(y)|dy.$$

自然的想法是分段估计, 为了方便处理, 打包为下面的引理.

Lemma. 设 $f\in L^1$, $x\in L_f$, 记 $g(r) = \frac{1}{r^n}\int_{|y|\le r} |f(x-y)-f(x)|dy$. 那么有 $g(r)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续有界, 并且 $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$.

Proof: 仍然是直接的计算. 由于积分的绝对连续性和 L^1 条件, 有

$$g(x+h) - g(x) = \frac{1}{(r+h)^n}\int_{B_{r+h}\setminus B_r} |f(x-y)f(x)|dy$$
$$+ \left(\frac{1}{(r+h)^n} - \frac{1}{r^n}\right)\int_{B_r} |f(x-y)-f(x)|dy$$
$$\overset{h\to 0}{\to} 0.$$

且

$$\lim_{r\to 0} g(r) = \lim_{r\to 0} m(B)\frac{1}{m(B_r)}\int_{B_r} |f(x-y) - f(y)|dy \overset{L_f}{=} 0.$$

最后, 由于函数 $f\in L^1$, 函数在 $(0,1]$ 上自然是有界的. 当 $r>1$ 时, 则

$$|g(r)| \le \frac{1}{r^n}\int_{|y|\le r} |f(x-y)|dy + \frac{1}{r^n}\int_{|y|\le r} |f(x)|dy$$
$$\le ||f||_1 + m(B)|f(x)| < \infty.$$

□

继续计算如下:

$$|(f*K_t)(x) - f(x)| \le \int_{|y|\le t} + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k-1}t<|y|\le 2^k t} |f(x-y)-f(x)||K_t(y)|dy$$
$$\le \int_{|y|\le t} |f(x-y)-f(x)|\frac{C_1}{t^n}dy + \sum_{k=1}^{\infty}\int_k |f(x-y)-f(x)|\frac{C_2 t}{y^{n+1}}dy$$
$$\le C_1 g(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_k |f(x-y)-f(x)|\frac{C_2 t}{(2^k)^{n+1}}dy$$
$$= C_1 g(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_2 t 2^{n+1} g(2^k t).$$

最后的估计只要注意到 g 有界即可完成. □

在上面我们完成了逼近恒等的逐点收敛证明, 接下来我们处理其 L^p 收敛.

Theorem 3.8: 逼近恒等的 L^p 收敛

$\forall f \in L^p, ||f * K_t - f||_p \to 0$ 当 $t \to 0$.

Proof: 首先做一些基本的计算.

$$\begin{aligned}||f * K_t - f||_p &= ||\int (f(x-y) - f(x))K_t(y)dy||_p \\ &\overset{Minkovski}{\leq} \int ||(f(x-y) - f(x))K_t(y)||_p dy \\ &\leq \int ||f_y - f||_p |K_t(y)| dy = C||f_y - f||_p.\end{aligned}$$

现在只要证明 lp 积分的平移连续性. 设 $f \in L^p$, 由紧支连续函数在 lp 空间的稠密性, 设 $g \in C_c$, 且 $||g - f||_p \varepsilon/3$. 注意到

$$f_h - f = f_h - g_h + g_h - g + g - f,$$

那么

$$||f_h - f||_p \leq ||f_h - g_h||_p + ||g_h - g||_p + ||f - g||_p = 2||f - g||_p + ||g_h - g||_p.$$

最后不等式的右端是一个有限积分平移, 自然连续. □

接下来用逼近恒等加强之前的一个结果.

Theorem 3.9: 光滑紧支函数的 L^p 稠密性

记光滑紧支函数为 C_c^∞, 那么有 $C_c^\infty \overset{dense}{\subseteq} L^p$.

Proof: 由卷积的求导, 我们只要找一个光滑化子将我们之前的连续紧支函数光滑化即可. 这里用到一个不太困难的计算结果, 记为以下引理.

Lemma. *若有界紧支函数 $\varphi \in L^1$, 那么函数族 $0K_t(x) = \frac{t^{-n}\varphi(x/t)}{||\varphi||_1}$ 是一个逼近恒等.*

此时结果已经呼之欲出, 因为我们有一个经典的光滑化子: Bump function. 其显式表达如下:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1; \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

□

3.3 Functions with bounded Variation

本节开始重新考虑如下问题.

$$F(b) - F(a) \overset{?}{=} \int_a^b F'(x)dx.$$

首先要有一些基本的要求, 右式要有意义, 那么 F' 应该几乎处处存在并且可积. 左端的值不能随意更改, 因此 F 应该连续. 这些条件其实还不够, 接下来会出现之前构造的一个函数, 作

为这个问题的奇点, 消去这个奇点后才能得到最后的充要条件. 在此之前, 我们先研究一个必要条件, 并最终得到一个更弱的不等式结果.

为了简洁性, 略去可求长曲线的内容, 直接讨论 BV 函数.

Definition 3.7: 有界变差函数 (bounded variation)

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $P: a=t_0<\cdots<t_N=b$ 是区间的一个划分, 定义变差为 $V(f,P)=\sum_{j=1}^{N}|f(t_j)-f(t_{j-1})|$, 若 $\sup_P V(f,P)<\infty$. 那么称 f 是有界变差的, 记 $V_a^b(f)=\sup_P V(f,P)$ 为 f 的总变差, $BV[a,b]$ 为区间上的有界变差函数全体.

通过直接的计算知, 有界单调函数是有界变差函数. 一个不是有界变差函数的例子是

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & 0<x\le 1;\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

由三角不等式知, $BV[a,b]$ 是一个向量空间. 接下来我们可以看到, 所有有界变差函数都能被单增函数简单地表示出来.

Theorem 3.10: Jordan 分解

f 是有界变差函数, 当且仅当 f 是两个单增函数的差.

Proof: 单增函数的差显然是有界变差的, 接下来证明另一边. 对于一个有界变差函数, 我们总有下面的等式

$$V_a^b(f)=V_a^x(f)V_x^b(f).$$

由定义, $V_a^b(f)\le V_a^x(f)+V_x^b(f)$. 另一半不等式是很基本的 ε 技巧, 稍微讨论 x 的位置即可. 注意到 $V_a^x(f)$ 是单增的, 那么 $f(x)=V_a^x(f)-(V_a^x(f)-f(x))$. 只要证明函数 $h(x)=V_a^x(f)-f(x)$ 是单增的. 直接计算, 设 $x_1<x_2$, 那么

$$h(x_2)-h(x_1)=(V_a^{x_2}(f)-f(x_2))-(V_a^{x_1}(f)-f(x_1))=V_{x_1}^{x_2}-(f(x_2)-f(x_1))\ge 0.$$

□

接下来要证明的结果是, 单增函数的微分定理.

Theorem 3.11: 单增函数的微分定理

设 f 在 $[a,b]$ 上单增, 则有

(1) f在区间上几乎处处可微;

(2) $f'\in L^1[a,b]$;

(3) $\displaystyle\int_a^b f'dx\le f(b)-f(a)$.

我们的证明是覆盖论证, 这个技术在后面的 N-L 公式的证明中也会用到. 接下来我们证明一维版本的 Vitali 覆盖引理, 之前我们遇到了一个有限版本的覆盖引理, 那个几乎是显然的, 这个是相当不平凡的. 为了方便, 接下来考虑的对象是闭集族.

Definition 3.8: Vitali 覆盖

设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 若闭集族 $\Gamma = \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足对任意 $x \in E$, 有

$$\inf\{|I| : I \in \Gamma,\ x \in I\} = 0,$$

则称 Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖.

Theorem 3.12: Vitali 覆盖

设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) < \infty$, 若 Γ 是 E 的一个 Vitali 覆盖, 那么对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在互不相交的 $I_1, \cdots, I_N$ 使得 $m_*\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) < \varepsilon$.

Proof: 证明用到的技术被称为时停. 原本的集合 E 未必可测, 但是由定义, 可以将其稍微膨胀成一个开集 G, 满足 $m(G) < \infty$ 且 $E \subseteq G$. 因为我们的 Vitali 覆盖本质上只要求小的集合存在, 不妨假设 $\forall I \in \Gamma$ 有 $I \subseteq G$. 现在给定一个 $\varepsilon > 0$, 开始实践贪心算法.

设 $\delta_0 = \sup\{|I| : I \in \Gamma\} < \infty$, 那么取出 $|I_1| > \dfrac{\delta_0}{2}$, 如果已经有 $m_*(E \setminus I_1) < \varepsilon$, 那么已经完成, 如果不然, 则继续选取.

记 $\delta_1 = \sup\{|I| : I \in \Gamma,\ I \cap I_1 = \varnothing\}$. 首先要说明此时的 $\delta_1 > 0$, 否则无法进行选取. 在 $E \setminus I_1$ 中取出 x, 那么 $d(x, I_1) > 0$($\mathbb{R}$ 上有界闭集的紧性), 由于 Γ 是一个 Vitali 覆盖, 那么此时能取出充分小的区间, 因此 $\delta_1 > 0$. 接下来重复这样的操作.

进行到第 $k+1$ 步时, 已有 $m_*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} I_j) \geq \varepsilon$, 那么 $\delta_k = \sup\{|I| : I \in \Gamma,\ I \cap \bigcup_{j=1}^{k} I_j\} > 0$, 取 $I_{k+1} > \dfrac{\delta_k}{2}$. 若有限步后能停止, 那么证明已经结束.

若不然, 由取法, 取出了一列闭集 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(G) < \infty$. 那么有一个 N 使得 $\sum_{j=N+1}^{\infty} |I_j| < \dfrac{\varepsilon}{5}$, 令 $A = E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$, 希望证明 $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ 已经满足我们的要求. 任取 $x \in A$, 那么有 $r_x = d(x, \bigcup_{j=1}^{N} I_j) > 0$. 因为 Γ 是一个 Vitali 覆盖, 那么能找到 $I \in \Gamma$ 满足 $|I| < r_x$. 这个 I 自然满足 $I \cap \bigcup_{j=1}^{N} I_j = \varnothing$. 并且由之前对 δ_N 的构造, 有 $|I| \leq \delta_N < 2|I_{N+1}|$. 因为 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \infty$, 知 $|I_j| \to 0$, 不难知道, 当 j 充分大, 有 $I_j \cap I \neq \varnothing$, 令 n_0 为满足这个关系的第一个指标. 那么对于 I_{n_0} 有 $n_0 > N$ 和 $|I| \leq \delta_{n_0 - 1} < 2|I_{n_0}$, 因此有 $5I_{n_0} \supseteq I$, 那么由 x 的任意性, $A \subseteq \bigcup_{j=N+1}^{\infty} 5I_j$. 那么 $m_*(A) < \varepsilon$, 这完成了证明. □

Remark 3.5:

这个定理还有一些其他相似的版本和不同的证明, 有的用到紧集的膨胀, 有的用到了选择公理 (Zorn 引理). 一些内容可以在这里找到 Vitali 覆盖

接下来为了证明几乎处处可微, 我们要引进 Dini 数这一概念, 并且说明引入这个概念的意义.

Definition 3.9: Dini Number

记差商为 $\Delta_h(f)(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. 四个 Dini 数为

$$D^+(f)(x)=\limsup_{h\to 0^+}\Delta_h(f)(x),\quad D_+(f)(x)=\liminf_{h\to 0^+}\Delta_h(f)(x),$$

$$D^-(f)(x)=\limsup_{h\to 0^-}\Delta_h(f)(x),\quad D_-(f)(x)=\liminf_{h\to 0^-}\Delta_h(f)(x).$$

一个基本的观察是 $D^+\geq D_+$ 和 $D^-\geq D_-$. 期待的结果是 $D^+=D_+=D^-=D_-$ 几乎处处成立, 要证明这个结果, 其实只要能证明 $D^+\leq D_-$ 对单增函数成立即可, 因为 $F(x)=-f(-x)$ 也是单增函数, 证明了前一个不等式, 就能得到 $D^-\leq D_+$, 因此能得到 $D^+\leq D_-\leq D^-\leq D_+\leq D^+$, 这迫使等号成立. 按照这个思路, 现证明单调函数的微分定理如下.

Proof: 要证明 $D^+\overset{a.e.}{\leq}D_-$, 考虑集合 $E=\{x:D^+(f)(x)>D_-(f)(x)\}$. 希望证明这个集合的测度是零, 先将这个集合做一定的分解 $E=\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}}\{D^+(f)(x)>r>s>D_-(f)(x)\}=\bigcup_{r,s\in\mathbb{Q}}A_{r,s}$, 现在希望证明 $m(A_{r,s})=0$. 注意, f 是单调函数, 因此是可测的, 集合 $A_{r,s}$ 也是可测的. 反设 $m(A_{r,s})>0$, 这里的 r,s 是给定的数. 接下来开始测度估计.

首先给定一个充分小的 $\varepsilon>0$, 将 A 膨胀为开集 G, 并且 $m(G)<(1+\varepsilon)m(A)$, 任取 $x\in A$, 由 $D^-(f)(x)<s$, 存在一列趋于 0 的正数 $\{h_n^x\}$, 使得

$$f(x)-f(x-h_n^x)<sh_n^x,$$

由于 x 是 G 的内点, 可以不妨 $[x-h_n^x,x]\subseteq G$, 那么由 x 的任意性, $\Gamma=\{[x-h_n^x,x]\}_{x\in A,n\in\mathbb{N}}$ 是 A 的一个 Vitali 覆盖, 那么有 $[x_1-h_1,x_1],\cdots,[x_N-h_N,x_N]$ 使得

$$m(A\setminus\bigcup_{j=1}^N[x_j-h_j,x_j])<\varepsilon.$$

另一方面, 之前假设每个区间都在开集 G 中, 因此

$$\sum_{j=1}^N h_j\leq m(G)<(1+\varepsilon)m(A).$$

合为

$$\sum_{j=1}^N(f(x_j)-f(x_j-h_j))<s\sum_{j=1}^N h_j<s(1+\varepsilon)m(A).$$

现在炮制不等式的另一端. 将注意到上一不等式的左端, 将集合稍微缩小为 $B=A\cap\bigcup_{j=1}^N(x_j-h_j,x_j)$, 有 $m(B)>m(A)-\varepsilon$, 重复之前类似的过程, 可以造出一个 Vitali 覆盖 $\Gamma'=\{[y,y+h_m^y]\}_{y\in B,m\in\mathbb{N}}$, 然后有相似的不等式如下

$$\sum_{j=1}^M(f(y_j+h_j)-f(y_j))>r\sum_{j=1}^M h_j>r(m(B)-\varepsilon)>r(m(A)-2\varepsilon).$$

不等式合为

$$r(m(A)-2\varepsilon)<s(1+\varepsilon)m(A)\overset{\varepsilon\to 0}{\Longrightarrow}r\leq s,$$

这导出了矛盾.

现在离得到几乎处处可微的条件还差说明 f' 是几乎处处有限的, 我们可以通过不等式来得到这个事实. 首先将 $f(x)$ 在端点处常值延拓, 得到一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 并且定义差商函数 $g_n(x) = \dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$, 由之前的计算, $g_n \overset{a.e.}{\to} f'$ 在区间上成立. 由 Fatou 引理, 直接计算

$$\begin{aligned}\int_a^b f' dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+1/n} f dx - \int_a^{a+1/n} f dx\right) \\ &\leq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

这表明 $f' \in L^1[a,b]$, 那么 f' 因此几乎处处有限, 结合之前的结论, f 是几乎处处可微的. □

Corollary 3.2: BV 函数的微分定理

设 $f \in BV[a,b]$, 那么 f 几乎处处可微且 $f' \in L^1[a,b]$.

但是问题并没有因此解决, 我们只得到了不等式, 接下来的反例表明, 仅仅是有界变差这个条件是不够的.

3.4 Cantor-Lebesgue Function

这个函数我们之前已经构造过了一次, 现在我们需要证明他的一些性质, 并以此说明这个函数是 N-L 公式的一个反例.

记 Cantor 集 $\mathcal{C} = [0,1] \setminus G$, 其中 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{2^{k-1}} I_{k,j}$, 且 $|I_{k,j}| = \dfrac{1}{3^k}$.

Proposition 3.2: Cantor-Lebesgue 函数的性质

记 f 为 Cantor-Lebesgue 函数, 那么

(1) f单增;

(2) $f(G) \overset{dense}{\subseteq} [0,1]$;

(3) f连续;

(4) $f' \overset{a.e.}{=} 0$.

Proof: 若记

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \frac{2j-1}{2^k} \chi_{I_{k,j}},$$

那么可以定义 f 如下

$$f = \begin{cases} 0 & x = 0; \\ \sup\{g(t) : t \in [0,x) \cap G\} & x \in (0,1); \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

因此 $f(G)=\{\frac{2j-1}{2^k}:1\le j\le 2^{k-1},k\in\mathbb{N}\}$, 可见 $f(G)\overset{dense}{\subseteq}[0,1]$. 而单增函数只有跳跃间断点, 这迫使 f 连续. 在集合 G 上 $f'=0$, 而 $m(G)=1$, 也就是 $f'\overset{a.e.}{=}0$. □ 此时的不等式是

$$1=f(1)-f(0)>\int_0^1 f'dx=0.$$

3.5 Absolutely Continuous Functions

Definition 3.10: 绝对连续函数

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 若对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对 $[a,b]$ 中的任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N$, 当满足 $\sum\limits_{k=1}^N|a_k-b_k|<\delta$, 则有 $\sum\limits_{k=1}^N|f(a_k)-f(b_k)|<\varepsilon$, 那么 f 是绝对连续函数.

显然的, Lipschitz 函数是绝对连续函数, 绝对连续函数是一致连续的 (当然在紧区间上的连续函数自然是一致连续的). 我们之前讨论 Cantor-Lebesgue 函数, 现在可以直接计算说明其不是一个绝对连续函数.

记 $\mathcal{C}_n$ 为消去边界点的 Cantor 集, 可以重写为 $\mathcal{C}_n=\bigsqcup\limits_{k=1}^{2^n}(a_k,b_k)$. 注意到 $m(\mathcal{C}_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 而 $\sum\limits_{k=1}^{2^n}|f(a_k)-f(b_k)|=1$, 这导出了矛盾.

记 $AC[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数全体. 那么按定义, 不难看出 $AC[a,b]$ 是一个向量空间. 并且 $AC[a,b]\subseteq BV[a,b]$.

以下记录一些关于 AC 函数的性质.

Proposition 3.3: AC 保可测性

设 $f\in AC(\mathbb{R})$, 那么 f 把零测集映成零测集, 把可测集映成可测集.

Proof: 零测集 Z 可以膨胀成开集 G, 使得 $m(G)<\delta$, 有开集的结构定理, 有 $G=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$, 那么

$$f(Z)\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}[f(m_k),f(M_k)].$$

注意到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|m_j-M_j|\le m(G)<\delta$, 那么由条件, 得 $m(f(Z))\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(m_k)-f(M_k)|<\varepsilon$. 而对于可测集 E, 可以写为 $E=F\cup Z$, 而 F_σ 集 F 的像其实还是 F_σ 集, 那么完成了证明. □

与这个命题相关的结论与类 Cantor 集有关.

Example 3.1: 绝对连续函数的原像未必可测

设 $f(x)=\int_0^x\chi_{\hat{\mathcal{C}}^c}dx=m([0,x]\setminus\hat{\mathcal{C}})$. 其中 $\hat{\mathcal{C}}$ 是类 Cantor 集. 由积分的绝对连续性, 函数是绝对连续的. 利用 Lebesgue 微分定理, 函数在一个正测度集合上导函数为零, 但是函数确实是严格单增的. 一个观察是 $f(\hat{\mathcal{C}})\xlongequal{injective}f([0,1])\setminus f([0,1]\setminus\hat{\mathcal{C}})$. 而由函数的定义, 函数在类 Cantor 集上是保测度的, 因此上面的集合测度实际为零. 由于函数是一个单射, 并且 $\hat{\mathcal{C}}$ 是一个正测度集, 由熟悉的 Vitali 不可测集的构造, 有 $f(\mathcal{N})$ 可测, 但是其原像是不可测的. 不过有趣的是, 单增的绝对连续函数都有 $f^{-1}(E)\cap\{f'>0\}$ 可测, 证明并不困难. 值得注意的是, 在以上论证的基础上可得积分换元公式.

另一个结论和变差有关, 需要使用 N-L 公式.

Proposition 3.4: f' 和 $V(f)$

设 $f \in AC[a,b]$, 那么 $\int_a^x |f'|dx = V_a^x(f)$.

Proof: 对于 BV 函数, 有

$$f(x) = P_f(x) - N_f(x) + f(a) \Rightarrow f'(x) \overset{a.e.}{=} P_f'(x) - N_f'(x).$$

因此

$$\int_a^x |f'| \leq \int_a^x P_f' + \int_a^x N_f' \leq P_f + N_f = V_a^x(f).$$

对于另一边,

$$\sum |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum |\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'| \leq \sum \int |f'| = \int |f'|.$$

另一种处理的方式很有意思, 用到了逼近的方式. 由于 $f' \in L^1$, 那么存在阶梯函数 ψ 使得 $||f - \psi||_1 \varepsilon$, 记 $f' = g + h$, 其中 h 是可积的. 两边同时积分, 由 N-L 公式, 得 $f(x) - f(a) = \int_a^x \psi + \int_a^x h = \Psi(x) + H(x)$. 由三角不等式, 两边求变差有 $V_a^x(f) + V_a^x(H) \leq V_a^x(\Psi)$. 注意到

$$V_a^x(H) \leq \int_a^x |H'| \overset{LDT}{=} \int_a^x |h| \leq ||h||_1 < \varepsilon.$$

那么

$$V_a^x(f) > V_a^x(\Psi) - \varepsilon \overset{P}{\geq} \sum \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi \right| - \varepsilon = \sum \int |\psi| - \varepsilon = \int |\psi| - \varepsilon > \int_a^x |f'| - 2\varepsilon.$$

□

最后, 我们来证明微分定理, 其实也就是 N-L 公式.

Theorem 3.13: N-L 公式

(1) 若 $f \in [a,b]$, 那么有 f 几乎处处可微, $f' \in L^1[a,b]$ 且 $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$.
(2) 若 $f \in L^1[a,b]$, 则存在 F 几乎处处可微, 满足 $F' \overset{a.e.}{=} f$.

Proof: 其实主要是证明第一条. 设 $g(x) = \int_a^x f'$, 那么 $g' \xlongequal{LDT,\ a.e.} f'$, 而 $f - g \in AC[a,b]$, 只要证明导数几乎处处为零的绝对连续函数是常值函数就行了.

设 $c \in (a,b]$ 使得 $f(c) \neq f(a)$, 记 $\varepsilon_0 = \dfrac{|f(c) - f(a)|}{3}$, 由绝对连续的定义, 有 $\delta_0 > 0$. 现在定义 $E = \{x \in (a,c) : f'(x) = 0\}$, 设 y 充分小, 那么对每个 $x \in E$, 有一列 h_k^x 使得 $[x, x + h_k^x] \subseteq (a,c)$, 并且有 $|f(x) - f(x + h_k^x)| < h_k^x y$, 这诱导了一个 Vitali 覆盖. 那么 $(x_1 - a) + \cdots + (c - (x_N + h_N)) < \delta_0$, 有不等式

$$3\varepsilon_0 = |f(c) - f(a)| \leq * + y\sum_{j=1}^N h_j < \delta_0 < \varepsilon_0 + y(b-a),$$

而 y 的选取和 ε_0 无关, 这迫使 $\varepsilon_0 = 0$, 因此完成了证明.

第二条就是微分定理加上积分的绝对连续性, 不再赘述. □

4 Abstract Measure

4.1 Measure and Integration

以下考虑的是一般的空间 $X \neq \varnothing$. 首先从测度这一概念开始处理.

Definition 4.1: Algebra

$\mathcal{A} \subseteq 2^X$ 被称为代数, 若满足:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{A}$;

(2) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$;

(3) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$.

之前定义过 σ-代数和生成 σ 代数, 这里不再赘述, 仅明确记号. 记 $\mathcal{M}$ 为一个 σ-代数, 由集族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$ 生成的 σ-代数记为

$$\sigma(\mathscr{F}) = \bigcap_{\mathscr{F} \subseteq \mathcal{M}} \mathcal{M}.$$

Definition 4.2: Measure

测度是一个函数 $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ 满足:

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;

(2) 若$\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$是一列互不相交的集合, 则 $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

我们把三元组 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 称为一个测度空间. 若 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 有限.

除了实数上的 Lebesgue 测度, 测度空间的例子还有很多, 比如概率测度 $(\mu(X) = 1)$, Dirac 测度 (单点为 1, 其余为 0).

抽象的测度其实和之前的 Lebesgue 测度有很多共性, 这是公理化带来的, 我们不难证明测度具有以下性质, 其中的大多数证明就是一些集合的划分, 证明略去.

Proposition 4.1 (property of measure)**.**

(1) $E_1 \subseteq E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$;

(2) $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$;

(3) $E_k \in \mathcal{M} \nearrow E \Rightarrow \mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N)$;

(4) $E_k \in \mathcal{M} \searrow E,\ \mu(E_1) < \infty \Rightarrow \mu(E) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N)$.

Definition 4.3: μ-null set

集合 $E \in \mathcal{M}$ 被称为 μ-零测集, 若 $\mu(E) = 0$.

Definition 4.4: μ-a.e.

一个性质 P 对任意 $x \in X$ 成立, 除了一个 μ-零测集, 则称性质 P 是 μ-a.e. 的.

Definition 4.5: completeness of measure

一个测度 μ 被称为完备的, 若满足

$$\mu(E) = 0,\ \forall S \subseteq E \Rightarrow S \in \mathcal{M}.$$

Example 4.1: an incomplete example

$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度是完备的, 但是 $m\mid_{\mathcal{B}}$ 不是完备的, 不然就有 $\mathcal{L} = \mathcal{B}$. 核心在于 $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{L}$. 这个事实的证明依赖 Cantor-Lebesgue 函数 f, 令 $\psi = x + f$, 那么 ψ 是一个同胚映射, 注意到 $m_{\mathcal{L}}(\psi(\mathcal{C})) = 1$, 那么 $\mathcal{N} \subseteq \psi(\mathcal{C})$ 的原像 Lebesgue 可测但是 $\psi^{-1}(\mathcal{N}) \notin \mathcal{B}$.

Definition 4.1 (measurable function)**.** 称广义函数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ 是可测的, 若对 $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, a)) = \{f < a\}$ 都可测. 复值函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 可测, 若其实部和虚部均可测.

有了可测函数的概念, 我们按照之前的结合运算, 可立刻得到下面的结果.

Proposition 4.2 (limit operation)**.** 若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测, 那么下列运算结果均可测

$$\sup f_k, \quad \inf f_k, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k.$$

接下来我们按照四步走定义积分, 从示性函数, 到简单函数, 到非负可测函数, 最后到一般的可积函数. 对比之前的证明, 我们这里的做法是一样的. 以下把一些记号和结论列举.

Definition 4.2 (non-negative measurable function)**.** 记集合 $L^+(X)$ 为 X 上的非负可测函数全体.

Definition 4.3 (integrable function)**.** 可测函数 f 可积, 若 $\int f^+$ 和 $\int f^-$ 均有限. 记 $L^1(X, \mu)$ 为 X 上的可积函数全体.

Theorem 4.1 (simple approximation)**.** 任给 $f \in L^+(X)$, 有一列非负简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\varphi_k \nearrow f$.

Theorem 4.2 (MCT)**.** $\{f_k \geq 0\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L^+$, $f_k \nearrow f \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k = \int f$.

Theorem 4.3 (Fatou lemma)**.** $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L^+ \Rightarrow \liminf\limits_{k\to\infty} \int f_k \geq \int \liminf\limits_{k\to\infty} f_k$.

Theorem 4.4 (DCT)**.** 可测函数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $f_k \to f$, 且存在控制函数 $g \in L^1$ 使得 $|f_k| \leq g$, 那么 $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k = \int f$.

上面记号中函数列的收敛是指几乎处处收敛, 在实分析中我们已经看到这与逐点收敛在积分意义下是无差异的, 因此不做区分.

4.2 Exterior Measure and Premeasure

测度这个概念不是很自然, 接下来将其去抽象化为外测度, 甚至是预测度, 在这个过程可以看到, 测度是如何构造的, 并且是以一种相对自然的方式产生的.

Definition 4.6: exterior measure

外测度是一个函数 $\mu^*: 2^X \to [0,+\infty]$ 满足以下条件:

(1) $\mu^*(\varnothing)=0$;

(2) $\forall E_1 \subseteq E_2 \in 2^X \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$;

(3) $\mu^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$.

将外测度改进到测度需要一个条件, 我们在直接的 Lebesgue 测度的构造中已经给出了.

Definition 4.7: μ^*-measurable

称集合 $E \subseteq 2^X$ 是 μ^*-可测的, 若其满足如下的 Carathéodory 条件

$$\forall A \subseteq X, \quad \mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c).$$

这个条件仅给出了集合在计算上的信息, 但是作用是巨大的, 下面的定理反映了这个事实.

Theorem 4.1: Carathéodory

记 $\mathcal{M}$ 为 μ^*-可测集合全体, 那么 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数, 并且 $\mu=\mu^*\mid_{\mathcal{M}}$ 是一个完备测度.

Proof: 由 Carathéodory 条件, 只要验证 $\mathcal{M}$ 对可数并封闭即可. 先证明有限的情况. 设 E_1, $E_2 \in \mathcal{M}$, 那么

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_1^c)\\ &= \mu^*(A\cap E_1\cap E_2)+\mu^*(A\cap E_1\cap E_2^c)+\mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2)+\mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c)\\ &\geq \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))+\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)\geq \mu^*(A).\end{aligned}$$

若此时的 E_1, E_2 是不交的, 则还有

$$\mu^*(E_1\cup E_2)=\mu^*(E_1\cup E_2\cap E_2)+\mu^*(E_1\cup E_2\cap E_2^c)=\mu^*(E_1)+\mu^*(E_2).$$

由归纳法, $\mathcal{M}$ 对有限并封闭, 并且由有限可加性. 接下来处理可数的情况, 自然是考虑测度的连续性. 不失一般性, 设 E_j 是一列互不相交的集合, 设 $G_n=\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$, $G=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, 即 $G_n \nearrow G$. 那么有

$$\begin{aligned}\mu^*(G_n\cap A) &= \mu^*(E_n\cap G_n\cap A)+\mu^*(E_n^c\cap G_n\cap A)\\ &= \mu^*(E_n\cap A)+\mu^*(G_{n-1}\cap A)=\sum_{j=1}^{n}\mu^*(E_j\cap A).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(G_n\cap A)+\mu^*(G_n^c\cap A)\geq \sum_{j=1}^{n}\mu^*(E_j\cap A)+\mu^*(G^c\cap A)\\ &\overset{n\to\infty}{\geq} \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A)+\mu^*(G^c\cap A)\geq \mu^*(G\cap A)+\mu^*(G^c\cap A)\geq \mu^*(A).\end{aligned}$$

同时

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap X)\geq\mu^*(G\cap X)=\mu^*(G)\geq\mu^*(G_n)=\sum_{j=1}^{n}\mu^*(E_j)$$
$$\overset{n\to\infty}{\geq}\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j).$$

因此 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个度量. 设 $E\subseteq\mathcal{M}$ 满足 $\mu^*(E)=0$, 对于任意 $A\subseteq E$, 有

$$\mu^*(B)\leq\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A^c\cap B)\leq\mu^*(A)+\mu^*(B)\leq\mu^*(B),$$

从而 $A\in\mathcal{M}$, 也就是说 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是完备的. □

当然, 外测度是定义在幂集上的, 事实上还能从更小的对象开始处理.

Definition 4.8: premeasure

称函数 $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ 是一个预测度, 若满足:

(1) $\mu_0(\varnothing)=0$;

(2) 若不交的一列集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ 满足 $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\in\mathcal{A}$, 那么 $\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j)$.

由于预测度是定义在代数上的, 因此单调性和有限可加性是显然的. 现在要将预测度提升至外测度, 定义的方式和之前定义 Lebesgue 外测度的时候是一致的, 要用到所谓的方体覆盖.

Theorem 4.2: construct an exterior measure

若 μ_0 是一个定义在 $\mathcal{A}\subseteq 2^X$ 上的预测度, 那么定义 2^X 上的 μ^* 如下

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j):E\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,\ E_j\in\mathcal{A}\}.$$

那么 μ^* 是一个 2^X 上的外测度, 满足

(1) $\mu^*|_{\mathcal{A}}=\mu_0$;

(2) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}=\{\mu^*\text{-measurable sets}\}$.

Proof: 证明的核心与之前一致, 是 ε 技巧. 空集零测和单调性易证, 仅证明次可加性. 对于一列集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 和给定的 $\varepsilon>0$, 有 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^j\supseteq E_j$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k^j)<\mu^*(E_j)+\varepsilon/2^j$. 那么有 $\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^j$, 由此时对 μ^* 的定义, 得

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k^j)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j)+\varepsilon.$$

这表明 μ^* 是一个外测度.

设 $E\in\mathcal{A}$, 有 $E\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ 和给定的 $\varepsilon>0$ 使得 $\mu^*(E)+\varepsilon>\sum_{j=1}^{\infty}\mu_0(E_j)$, 记 $\tilde{E}_j=$

$E \cap \left(E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k \right) \in \mathcal{A}$. 从而有

$$\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(\tilde{E}_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) < \varepsilon + \mu^*(E) \le \varepsilon + \mu_0(E).$$

可见 $\mu^* |_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

接下来要对 $\forall E \in \mathcal{A}$ 验证 Carathéodory 条件, 对任给的 $A \in 2^X$, 由定义, 有给定的 $\varepsilon > 0$ 和一列集合 $E_j \in \mathcal{A}$ 使得 $\mu^*(A) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$. 那么

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &> \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) - \varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu_0(E_j \cap E) + \mu_0(E_j \cap E^c)) - \varepsilon \\ &\ge \sum_{j=1}^{\infty} (\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)) - \varepsilon \ge \mu^*(A) - \varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. □

Theorem 4.3: property of above exterior measure

$\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}}$ 是一个测度. 若 ν 是 $\mathcal{M}$ 上的另一个测度且满足 $\nu |_{\mathcal{A}} = \mu_0$, 则有 $\nu(E) \le \mu(E)$ 对 $\forall E \in \mathcal{M}$ 成立, 并且若 $\mu(E) < \infty$, 则还有 $\nu(E) = \mu(E)$.

Proof: 由之前定理, 已知 $\mu = \mu |_{\mathcal{M}}$ 是一个完备测度. 对 $\forall E \in \mathcal{M}$, 有 $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 其中 $E_j \in \mathcal{A}$, 由测度的次可加性, 有 $\nu(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$. 取下确界得到 $\nu(E) \le \mu^*(E) = \mu(E)$.

若 $\mu(E) < \infty$, 则证明反向不等式, 需要化归到由 $\mathcal{A}$ 生成的集合上, 因为这是两个测度相关的部分. 设 $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = F$ 且 $\mu(E) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$. 那么自然有 $\mu(F \setminus E) < \varepsilon$. 注意到

$$\nu(F) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) = \lim_{N \to \infty} \nu\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j \right) = \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_j \right) = \mu(F).$$

因此

$$\mu(E) < \mu(F) = \nu(F) = \nu(F \setminus E) + \nu(E) \le \mu(F \setminus E) + \nu(E) < \varepsilon + \nu(E).$$

特别的, 若 X 是 μ_0-有限的, 利用标准的圆环技巧, 可以证明 $\nu = \mu$. □

最后介绍一个比代数更粗糙一些的概念, 这个概念虽然在字面上比较抽象, 但反而是我们最熟悉的对象之一.

Definition 4.9: semi-algebra

$\mathscr{F} \subseteq 2^X$ 被称为一个半代数, 若满足:

(1)$\varnothing \in \mathscr{F}$;

(2)$E_1, E_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathscr{F}$;

(3)$E \in \mathscr{F} \Rightarrow E^c = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ E_j \in \mathscr{F}$.

一个最简单的例子就是直线上的全部区间, 或者高维空间的矩体, 其实是我们很熟悉的例子, 接下来的命题是完全符合直觉的.

Proposition 4.1: from semi-algebra to algebra

若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathscr{F}$ 中集合有限不交并的全体, 那么 $\mathcal{A}$ 是一个代数.

Proof: 在计算并集时用到 $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, 都是平凡的计算. □

4.3 Product Measure and Fubini Theorem

本节将 Fubini 定理推广到乘积测度空间上, 值得注意的是, 乘积测度和原本的 Lebesgue 测度有一些微妙的差别. 先给出一些基本的设定, 现在考虑的是两个测度空间 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 的乘积空间 $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$, 这里的 $\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2$ 和 $\mu_1 \times \mu_2$ 都没有定义, 记号 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{A \times B : A \in \mathcal{M}_1,\ B \in \mathcal{M}_2\}$ 中的元素称为可测矩形.

为了自然地推广 Fubini 定理, 我们至少应该要求对 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 有 $\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$, 现在我们定义 $\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$, 那么我们如何定义 $mu_1 \times \mu_2$.

接下来考虑我们之前定义测度的套路. 注意到下面的命题.

Proposition 4.2: a natural semi-algebra

$\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2$ 是一个半代数.

Proof: 注意到 $(A \times B)^c = (X \times B^c) \bigsqcup (A^c \times B)$ 即可. □

那么我们如果按照 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \to (\mathcal{A}, \mu_0) \to (2^X \times 2^Y, \mu^*) \to (\mathcal{M}, \mu)$ 的模式, 最终得到的 σ-代数 $\mathcal{M}$ 和我们定义的 $\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2 = \sigma(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$ 是一个对象吗, 其实一般不是, 一个很简单的想法是, $\mathcal{M}$ 是完备的, 但是 $\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2$ 是最小的, 在非平凡的情况下, 这两个一般是有严格的包含关系的, 比如 Lebesgue 可测集和 Borel 可测集, 但是我们可以利用得到的这个测度.

Definition 4.10: product measure

称 $\mu_1 \times \mu_2 = \mu \mid_{\mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2}$ 是乘积空间 $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2)$ 上的测度.

因为选择的 σ-代数和之前的有所差别, 可以预见定理的一些细节上有所不同. 比如下面的命题. 和原来的情况算是相差了一个零测集.

Proposition 4.3: measurability of slice

$E \in \mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2 \Rightarrow E_x \in \mathcal{M}_2,\ E^y \in \mathcal{M}_1$. 对可测函数类似.

Proof: 证明不难, 技巧是去证明所有满足的条件的对象是构成一个 σ-代数, 然后是完全平凡的集合计算. □

上面的相当于之前的 Tonelli 定理的第一条, 接下来叙述 Tonelli 定理和 Fubini 定理. 但是由于考虑的 σ-代数与之前不同, 现在算是在一个更小的空间上推广这个定理, 我们接下来的处理也会不同, 先定义一个叫做单调类的对象. 我们将用单调类这个相对具体好操作的对象来重新理解我们的 σ-代数, 从而将我们要处理的命题化简到一个较小的区域上, 然后按照标准的方式把结论提升, 最终得到我们要证明的结论.

Definition 4.11: monotone class

$\mathscr{F} \subseteq 2^X$ 被称为单调类, 若其满足

$$E_j \in \mathscr{F} \nearrow E \Rightarrow E \in \mathscr{F} \quad E_j \in \mathscr{F} \searrow E \Rightarrow E \in \mathscr{F}.$$

Theorem 4.4: monotone class lemma

由代数 $\mathcal{A}$ 生成的单调类 $\mathscr{F}$ 等于 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{M}$.

Proof: 由于 $\mathcal{M}$ 已经是单调类, 有 $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{M}$. 接下来只要证明 $\mathscr{F}$ 是一个 σ-代数. 设 $\mathscr{F}_E = \{F \in \mathscr{F} : E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathscr{F}\}$. 不难简单计算得到:

1. $\varnothing, E \in \mathscr{F}$
2. $E \in \mathscr{F}_F \Leftrightarrow F \in \mathscr{F}_E$
3. $\mathscr{F}_E$ 是单调类
4. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathscr{F}_E$

由第四条以及第三条, 可见 $\forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_E$. 进一步, 由 $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_A$, 那么 $\forall E \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_A \Leftrightarrow A \in \mathscr{F}_E$, 从而 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{F}_E$, 由第三条, 得对 $\forall E \in \mathscr{F}$ 有 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_E$. 至此, 直接计算得到了想要的结论. □

Theorem 4.5: Tonelli

X, Y 都是 σ-有限的测度空间, $f \in L^+(X_1 \times X_2)$, 那么

(1) $x \mapsto \int_{X_2} f_x d\mu_2 \in L^+(X_1)$;

(2) $\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_x d\mu_2 \right) d\mu_1$.

结论对 y 对应成立.

Theorem 4.6: Fubini

X, Y 都是 σ-有限的测度空间, $f \in L^1(X_1 \times X_2)$, 那么

(1) $f_x \in L^1(X_2)$ μ_1 -a.e.;

(2) $x \mapsto \int_{X_2} f_x d\mu_2 \in L^1(X_1)$;

(3) $\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_x d\mu_2 \right) d\mu_1$.

结论对 y 对应成立.

Proof: 按照之前得想法, 我们对示性函数证明 Tonelli 定理即可.

首先假设两个空间都是有限测度的. 设

$$\mathscr{F} = \{E \in \mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2 : E \text{ 满足结论}\} \subseteq \mathcal{M}_1 \bigotimes \mathcal{M}_2.$$

我们断言这是一个单调类. 首先由定义, 显然有 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \subseteq \mathscr{F}$. 由有限可加性 (或者是线性

性), 由 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 得到的代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{F}$. 现在用 MCT 和测度的连续性来计算最后的结论, 在这一步用到了有限测度的假设.

而对于一般的情况, 将两个空间剖分为上升的集合即可, 然后还是由测度的连续性得到结论. □

其实可以看到, 很多证明的技术是标准的几步走, 想法是直接的.

4.4 Signed Measure

本节将测度的取值推广到广义实数上, 并且在最后以测度来理解积分中的 d 是什么.

Definition 4.12: singed measure

函数 $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ 被称为符号测度, 若满足:

(1) $\nu(\varnothing) = 0$;

(2) ν 至多取到 $\pm\infty$ 之一;

(3) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是一列不交的集合, 则 $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$(右端绝对收敛).

有两个例子来理解符号测度, 并且根据接下来的两个分解定理, 我们可以知道符号测度和这两个例子差不多, 就像我们用单增函数理解 BV 函数一样.

Example 4.2: standard examples of signed measure

1. 两个测度之差 $\nu = \mu_1 - \mu_2$, 其中一个测度是有限的.
2. 可测函数 f 的积分, 且 $\int f^+$ 和 $\int f^-$ 至少一个是有限的.

符号测度仍然具有**测度的连续性**, 不再赘述. 由于能进行正负取值, 因此有如下概念.

Definition 4.13: positive(/negative/null) set

一个集合 E 被称为正集, 若其任意的可测子集 F 都满足 $\nu(F) \geq 0$, 负集和零集类似定义.

Proposition 4.4: subset and countable union of positive set

正集的子集和可数并仍然是正集.

Proof: 一个是定义, 一个是将正集划分为分离的集合后由定义和可数可加性即可验证. □

现在开始解释第一个例子.

Theorem 4.7: Hahn decomposition

ν 是测度空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个符号测度, 那么 X 可以被分为 $X = P \bigsqcup N$, 分别为 ν 的正集和负集, 并且若有另一分解 $X = P' \bigsqcup Q'$, 那么 $P \Delta P'$ 和 $Q \Delta Q'$ 都是 ν 的零集.

Proof: 不失一般性, 设 ν 不取 $+\infty$. 想法是先尽可能地把正集拼起来, 然后证明剩下的集合是负集. 记 $M = \sup_{positive} \{\nu(E)\} < \infty$, 那么 $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是一列正集满足 $\nu(P_j) \to M$, 现在

记 $P=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}P_j$, 由测度的连续性和正集的可数并, 有 P 为正集且 $\nu(P)=M$, 接下来证明 $N=X\setminus P$ 是负集, 用反证法.

注意到存在 $A\subseteq N$ 满足 $\nu(A)>0$, 但是 A 不是正集, 不然 $P\cup A$ 与 P 的构造矛盾, 那么就能在 A 中找到一个符号测度更大的集合, 并且类似的, 这个集合也不是正集. 我们可以想象这个过程下的符号测度是收敛的. 具体来说, 我们有一列集合 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$ 满足 $0<\nu(A_1)<\nu(A_2)<\cdots$, 记 $\nu(A_{k+1})-\nu(A_k)>1/n_k$, 其中 n_k 是使得这样的 A_{k+1} 存在的最小正整数, 令 $A=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}A_j$, 则有 $\infty>\nu(A)=\lim\limits_{N\to\infty}\nu(A_N)>\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}$. 从而 $n_j\to\infty$. 现在得到的 A 仍然不能是正集, 那么有子集 $C\subseteq A\subseteq A_j$, 使得 $\nu(C)>\nu(A)+1/n_c\geq\nu(A_j)+1/n_c$, 但是 n_c 是一个确定的数, 与 n_j 的定义和 $n_j\to\infty$ 的事实矛盾. 因此 N 是负集.

对于唯一性, 注意到 $P\setminus P'\subseteq P$ 和 $P\setminus P'\subseteq N'$ 即可. □

为了叙述接下来的定理, 我们要引入一个类似于向量正交的概念.

Definition 4.14: mutually singular

测度空间 X 上的两个符号测度 μ 和 ν 被称为相互奇异的, 若存在 X 的分解 $X=E\bigsqcup F$ 使得 E 是 μ 的零集, F 是 ν 的零集. 记为 $\mu\perp\nu$.

某种意义上, 这是在说两个符号测度生活在不交的地方上.

Theorem 4.8: Jordan decomposition

一个符号测度 ν 能被唯一的分解为两个测度 ν^+ 和 ν^- 满足 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 和 $\nu^+\perp\nu^-$.

Proof: 做 Hahn 分解 $X=P\bigsqcup N$, 记 $\nu^+(E)=\nu(E\cap P)$, $\nu^-(E)=-\nu(E\cap N)$, 那么 $\nu^+\perp\nu^-$. 若有另一分解 $\nu=\mu^+-\mu^-$, 诱导了一个 Hahn 分解 $X=E\bigsqcup F$, 那么 $P\Delta E$ 是 ν 的零集. 注意到 $\forall A\in\mathcal{M}$, $\mu^+(A)=\mu^+(A\cup E)=\nu(A\cap E)=\nu(A\cap P)=\nu^+(A)$, 可见分解的唯一性. □

由上面的定理, 我们看到了其中一个例子的意义. 我们还提到符号测度可以与 BV 函数比较. 事实上, 若定义 $|\nu|=\nu^++\nu^-$, 则相当于之前的全变差. 不难验证一个性质:

$$\nu\perp\mu\Leftrightarrow|\nu|\perp\mu\Leftrightarrow\nu^+\perp\mu,\ \nu^-\perp\mu.$$

我们定义 ν 是有界的若 $|\nu|$ 是有界的, 类似通过 $|\nu|$ 的有限和 σ-有限定义了 ν 的有限和 σ-有限.

利用 Jordan 分解, 我们看到符号测度的积分自然的定义在 $L^1(\nu)=L^1(\nu^+)\cap L^1(\nu^-)$ 上, 形为

$$\int f d\nu=\int f d\nu^+-\int f d\nu^-.$$

接下来我们来解释第二个例子, 核心是证明 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理. 为了证明这个定理, 需要先定义一个叫做关于测度绝对连续的概念.

Definition 4.15: absolutely continuous with respect to measure

符号测度 ν 被称为关于测度 μ 绝对连续, 若 $E\in\mathcal{M}$, $\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=0$. 记作 $\nu\ll\mu$.

类似上文, 不难证明 $\nu\ll\mu\Leftrightarrow|\nu|\ll\mu\Leftrightarrow\nu^+\ll\mu$, $\nu^-\ll\mu$. 我们把这个概念叫做绝对连续是有道理的, 因为下面这个命题.

Proposition 4.5:

若有限符号测度 $\nu \ll \mu$, 那么对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 若 $\mu(E) < \delta$, 则有 $\nu(E) < \varepsilon$.

Proof: 由我们提到的不难验证的性质, 不妨设符号测度为测度. 反证法, 则存在 $\varepsilon > 0$, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 E_n 使得 $\nu(E_n) \geq \varepsilon$, $\mu(E_n) < 1/2^n$. 记 $F_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} E_j$, $F = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. 那么 $\mu(F_k) \leq 2^{1-k}$, $\nu(F_k) \geq \varepsilon$, 由测度的连续性导出了矛盾. $\square$

接下来开始我们的证明, 首先引进记号

$$d\nu = f d\mu$$

表示关系 $\nu(E) = \int_E f d\mu$.

Lemma 4.1: relation of two finite measure

ν, μ 为有限测度, 那么要么 $\nu \perp \mu$, 要么 $\exists \varepsilon > 0$, $E \in \mathcal{M}$, 使得 E 是 $\nu - \varepsilon\mu$ 的正集且 $\mu(E) > 0$.

Proof: 对 X 做关于 $\nu - 1/n\mu$ 的 Hahn 分解 $X = P_n \bigsqcup N_p$, 令 $P = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_n$, $N = P^c$. 那么 N 是 $\nu - 1/n\mu$ 的负集, 那么可以知道 $0 \leq \nu(N) \leq 1/n\mu(N)$, 也就是 $\nu(N) = 0$. 若 $\mu(P) = 0$, 则 $\nu \perp \mu$, 若不然, $\mu(P) > 0 \Rightarrow \mu(P_n) > 0$ 且 P_n 是 $\nu - 1/n\mu$ 的正集. $\square$

Theorem 4.9: Lebesgue-Radon-Nikodym

设 ν 是一个 σ-有限符号测度, μ 是一个 σ-有限测度, 那么存在唯一的符号测度 λ 和 ρ 使得

$$\lambda \perp \mu, \quad \rho \ll \mu, \quad \nu = \lambda + \rho.$$

Proof: 首先证明有限测度的情况. 我们通过构造函数的办法将符号测度中的绝对连续部分分出, 剩下的部分按照直觉应该是与测度奇异的部分. 令

$$\mathscr{F} = \{f : \int_E f d\mu \leq \nu(E), \ \forall E \in \mathcal{M}\}.$$

由 $0 \in \mathscr{F}$, 知 $\mathscr{F} \neq \varnothing$. 注意到若 $f, g \in \mathscr{F}$, 那么 $h = \max(f, g) \in \mathscr{F}$. 这是因为令 $A = \{f > g\} \cap E$ 可测, 那么

$$\int_E h d\mu = \int_{E \setminus A} g d\mu + \int_A f d\mu \leq \nu(E \setminus A) + \nu(A) \leq \nu(E).$$

令 $a = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathscr{F}\}$, 有 $a \leq \nu(X) < \infty$. 设 $\int_X f_n d\mu \to a$, 令 $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$, 那么 $g_n \nearrow f$, 由 MCT 可知 $\int_X f d\mu = a$. 我们断言 $d\lambda = d\nu - f d\mu$ 与 μ 相互奇异. 由对 $\mathscr{F}$ 的假设, λ 是正测度. 若断言不成立, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使有关于 $\nu - \varepsilon\mu$ 的正集 E 且 $\mu(E) > 0$. 那么得到了

$$\varepsilon \chi_E d\mu \leq d\lambda = d\nu - f d\mu.$$

积分知我们找到了一个积分值比 a 更大的函数 $f + \varepsilon\chi_E$.

对于唯一性, 仅需做差后验证 $\lambda - \lambda'$ 和 μ 相互奇异且关于其绝对连续, 然后则知唯一性.

对于一般的情况, 我们利用加细, 得到公共的有限测度圆环, 在圆环上做分解后验证这些符号测度 (测度) 可以拼回去即可. $\square$

对于特殊的情况 $\nu \ll \mu$, 我们就能找到 $d\nu = fd\mu$, 称这个 μ-a.e. 函数类为 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数, 记作 $\dfrac{d\nu}{d\mu}$. 不难证明, 若 $\nu \ll \mu$, 两者为 σ-有限的 (符号) 测度. 那么 $g \in L^1(\nu) \Rightarrow g(\dfrac{d\nu}{d\mu}) \in L^1(\mu)$, 且

$$\int gd\nu = \int g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu.$$

以上完成了本节的最终目标.