0.1 26mid

请仔细对照后决定是否查卷, 无意义 argue 会扣去同情分.

Problem 0.1 题 1(10 分)

证明: 存在 $[0,1]$ 中的无处稠密集具有正测度.

Proof. 群里讲过这个例子, Cantor-like set 即可.

给分标准:

1. (3') 写出大致构造, 去除区间
2. (4') 计算测度
3. (1') 闭集
4. (2') 无处稠密

其他情况酌情扣分. □

Problem 0.2 题 2(10 分)

证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

Proof. 群里还是讲过, 用 Baire 纲定理.

参考给分标准:

1. (2') 反证, 设 $\mathbb{Q} = \bigcap G_n$
2. (2') G_n 稠密
3. (2') G_n^c 无处稠密
4. (2') $\mathbb{R} = \bigcup G_n^c \cup \{r\}$
5. (2') 用 Baire 纲

其他情况酌情扣分. □

Problem 0.3 题 3(10 分)

证明: $\mathbb{R}$ 上连续函数全体的基数为 $\mathfrak{c}$; 而 Lebesgue 可测函数全体的基数为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Proof. 往年题有类似的, 群里也说过要会计算.

参考给分标准:

1. (3') 连续函数上界 $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
2. (2') 下界, 考虑常值函数
3. (3') 可测函数上界 (这个往年题有) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. (2') 可测函数下界, 考虑 Cantor 集子集的示性函数

Remark. 绝大多数扣分来自连续函数上界得扣分, 如果答案涉及有理稠密性, 有理基等用语, 视完整性给分. 用多项式列 (注意是 $\{P_n\}$) 等论证会根据完整性给分. 用 Graph 只能得到 $2^{\mathfrak{c}}$.

□

Problem 0.4 题 4(10 分)

设 $E=[a,b]$, $f_n\to f$ a.e. on E, 且 $f_n, f\in L^+\cap L^1(E)$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$.

Proof. 讲义里有类似的题, 构造比较函数用 Fatou 即可, 这里考虑 $g_n=f_n+f-|f-f_n|$.

参考给分标准:

1. (3') 构造 g_n
2. (2') 用 Fatou
3. (3') 用条件
4. (2') 得到 $\limsup$

其他情况:

1. 用 Egorov, 3 分同情分. 因为没有一致可积性 (或者说一致绝对可积)
2. 用正负部分解, 没有本质内容, 同情分. 合理运用条件可得全分, 但是绝大多数都没用条件.
3. 用广义 DCT 扣两分
4. 写 $|f_n-f|\le f+f_n\in L^1$, 并用 DCT(实际上是广义 DCT), 得 5 分.
5. 用 min 和 Fatou 引理可以得全分

□

Problem 0.5 题 5(10 分)

利用积分的定义和 Lebesgue 控制收敛定理, 证明 Levi 单调收敛定理.

Proof. 这个证明和 Folland 上的证法有类似, 但是不太一样, 要注意, 因为是要用控制收敛, 所以要对可积性讨论, 不能直接做. 以下过程仅供参考, 实际阅卷中几乎都是对角线方法.

当 f 可积, 直接用 DCT 即可. 当 f 不可积, 可行的方法是像往年一样用对角化序列, 或者如下方法.

考虑

$$\int\phi_n\nearrow\int f,$$

对 ϕ 做定义域截断保证可积性 (不截断是无法保证可积性从而用 DCT 的)

$$K<\int\phi<\infty.$$

然后令 $g_n=\min(f_n,\phi)\nearrow\phi$, 对 g_n 用 DCT 后放缩 f_n 积分即可.

参考给分标准:

1. (6') 可积 case 用 DCT
2. (2') 对角线
3. (2') 序列具体构造 (这个地方分值较少, 往年为 10 分)

其他情况:

1. 不知道 Levi, 比如默认所有函数可积, 或者写 $L^+ \cup L^1$ 但实际上默认可积性, 至多 4 分
2. 其余方法酌情给分

□

Problem 0.6 题 6(10 分)

判断 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是否在 $[0,\infty)$ 上 Lebesgue 可积, 并给出理由.

Proof. 数分老题. 注意到 $|\sin x| \geq |\sin^2 x|$ 即可.

参考给分标准:

1. (5') 正确上手, 如上述放缩, 或者拆区间
2. (5') 会算数, 同时说明不可积

其他情况:

1. 无意义计算至多 3 分同情分
2. 知道广义 Riemann 积分的计算结果可以给 2 分

Remark. 本题中有若干同学计算积分错误, 会酌情扣分, 如果漏扣分查卷发现后可能倒扣.

□

Problem 0.7 题 7(10 分)

设 $E \subset [0,1]$ 是可测集且 $m(E) > 0$. 证明: 存在 $x \in E$ 使得对无穷多个正整数 n, 有 $x + \dfrac{1}{n} \in E$(模 1 意义下, 即考虑圆上的加法).

Proof. 没讲过, 但是转化后还是有迹可循. 考虑

$$A_n = E \cap \big(E - \frac{1}{n}\big).$$

由测度连续性,

$$m(E\Delta\big(E - \frac{1}{n}\big)) \to 0$$

那么 A_n 有正下界, 用测度的 Fatou 引理即可.

用 Borel-Cantelli 的大致做法是, 误差集测度会收敛到 0, 然后可以抽取指数衰减子列用 B-C 引理, 也就证明了几乎处处的 x 能使得 $x + 1/n$ 出现无数次.

用 Steinhaus 的方法比较优雅, 记 $F_N = \{x \in E : \text{for } n > N,\ x + \frac{1}{n} \notin E\}$. 那么 $E = \bigcup F_N$, 然后发现 $m(F_M) > 0$, 对这个集合用 Steinhaus 后, 取 $L > M$, 得到 $x, y \in F_M$, 但是 $x - y = \frac{1}{L}$, 这和 F_M 的定义矛盾.

参考给分标准:

1. (3') 转化, 定义 A_n
2. (4') 正下界
3. (3') $\limsup$

当然上述三个方法只有极个别同学写到, 其他同学一般只能拿到 Steinhuas 定理的 2 分同情分. □

Problem 0.8 题 8(10 分)

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义其 Fourier 变换 $g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \, \mathrm{d}x$. 证明: g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

Proof. 讲过连续性, 这里只是多一点, 要对积分区域截断一下.

参考给分标准:

1. (2') 写成差值
2. (2') 估计 exp 差值
3. (3') 截断 $||f||_1$
4. (3') 会使用截断后的误差小性

其他情况:

1. 证明连续性给 6 分, 没说清楚酌情扣分

Remark. 用 C_c 函数的稠密性可以得满分, 这和截断尾部能量是一样的.

□

Problem 0.9 题 9(10 分)

假设可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 保持加法运算, 证明 $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Proof. 就是 22mid 第 9 题.

参考给分标准:

1. (2') 有理数加法
2. (2') Lusin 定理
3. (3') Steinhaus 定理
4. (3') 计算原点连续性

□

Problem 0.10 题 10(10 分)

设 $m(E) < \infty$, f_n, f 在 E 上可测且 $f_n \to f$ 依测度收敛, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明: $g \circ f_n \to g \circ f$ 依测度收敛.

Proof. 任取 $\varepsilon > 0$. 由于 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以 g 在任意紧区间上一致连续.

因为 $m(E) < \infty$ 且 f 有限 a.e., 可取 $M > 0$, 使得

$$m\big(\{x \in E : |f(x)| > M/2\}\big) < \varepsilon.$$

由 g 在 $[-M, M]$ 上一致连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x, y \in [-M, M]$ 且 $|x - y| < \delta$ 时,

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

令

$$\alpha = \min\{\delta, M/2\}.$$

若 $|f(x)| \le M/2$ 且 $|f_n(x) - f(x)| < \alpha$, 则

$$|f_n(x)| \le |f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \le M,$$

从而 $f_n(x), f(x) \in [-M, M]$, 并且

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

因此

$$\{|g(f_n) - g(f)| \ge \varepsilon\} \subset \{|f| > M/2\} \cup \{|f_n - f| \ge \alpha\}.$$

于是

$$m\big(\{|g(f_n) - g(f)| \ge \varepsilon\}\big) \le m\big(\{|f| > M/2\}\big) + m\big(\{|f_n - f| \ge \alpha\}\big).$$

由 $f_n \to f$ 依测度收敛可知,

$$m\big(\{|f_n - f| \ge \alpha\}\big) \to 0.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} m\big(\{|g(f_n) - g(f)| \ge \varepsilon\}\big) \le m\big(\{|f| > M/2\}\big) < \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 任意, 故

$$m\big(\{|g(f_n) - g(f)| \ge \varepsilon\}\big) \to 0.$$

即 $g \circ f_n \to g \circ f$ 依测度收敛.

参考给分标准:

1. (2') 连续函数紧集上一致连续
2. (3') 截断
3. (3') 拆测度
4. (2') 求极限

其他情况:

1. 没有提到一致性的证明基本是伪证, 至多 2 分
2. 提到一致性但是集合分解混乱, 酌情扣少量分
3. 子列方法 (4')+Egorov 定理 (4')+ 逻辑完整, 如使用反证 (2') 可得 10 分, 但是不写出每一步原因会扣除部分分数

□

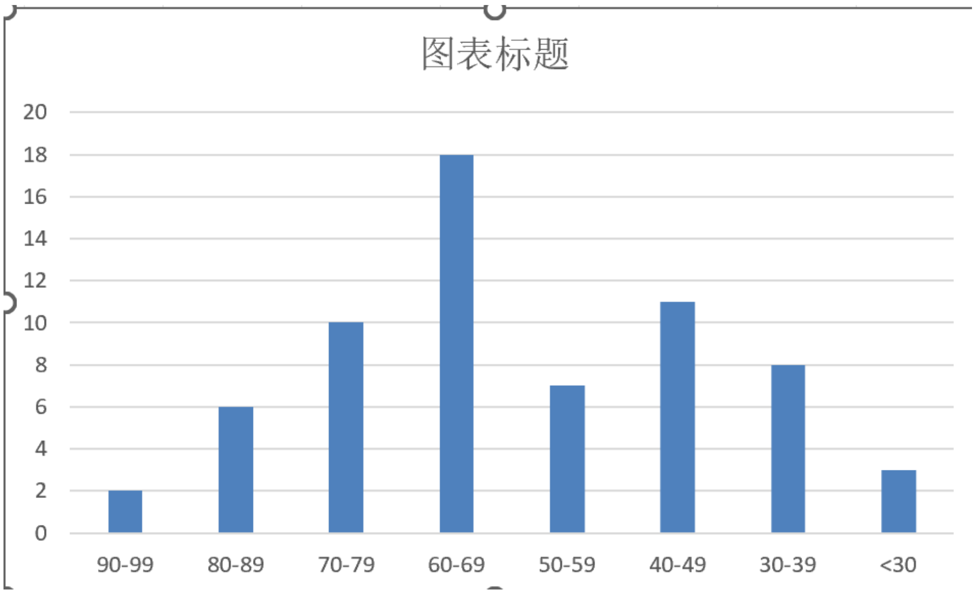
再也不想查卷了.

Remark. 前五题习题课/课程群中均讲过原题或者所谓母题, 但是得分率仍然较低. 第 4 题在第三次习题课讲义里本来有, 但是因为做法过于雷同被删去了, 感觉绝大多数同学们不知道什么叫

“DCT → Fatou → Egorov”,

只是在按照不存在的记忆乱写. 第六题有同学不知道绝对可积, 知道的同学基本都能做出. 第七题大致类似于 PPT 中 B-C 引理的题目做法, 姑且算是新题, 绝大多数同学没有写出本质步骤, 逻辑混乱的解法其实同情分也不该多给. 第 8 题为了鼓励来上习题课的同学, 证明连续性给了 6 分, 实际上和证明关系也不大, 只是送分. 这题反映绝大多数同学还不理解一致性, 可见数分教学问题之严重性. 第 9 题是原题, 这个

做不出来说明复习策略有待改进. 第 10 题在 PPT 上有类似的内容, 但是 PPT 这种跳步严重的材料不应该成为同学们的做题模板, 逻辑不通的证明应该自己注意而不是和助教扯皮, 没有意义. 不用 PPT 上的方法, 似乎只有最高分的同学做出来, 事实上是很标准的截断想法, 很多证明都是在用连续性做无意义的操作, 但是没有一致性的做法是一样伪证. 通常来说小问题的机制是很容易说清的, 而机制错误的证明没有看的必要, 同学们以后应该能理解这句话.



最终分数分布如上, 平均分 57.51, 最高分 96. 留于此处供后来者参考.