

2 第二次习题课讲义

2.1 作业答案

Problem 2.1 P25.14

试证明全体超越数的基数是 c .

Proof. 首先, 代数数是整系数多项式的根集, 而超越数是代数数的补集. 因此只要说明代数数是可数的. 我们考虑截断, 设 A_n 是次数 $\leq n$ 的整系数多项式的根集, 注意到系数取值是可数的, 而每个多项式的根是有限的, 因此 A_n 是可数集. 进一步, $\cup_n A_n$ 也是可数的. 因此代数数可数, 超越数不可数. \square

Problem 2.2 P43.2

$\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是一类标准的实分析习题, 将函数问题集合表示, 然后变成测度问题或者积分问题. 因为这里没有极限函数, 所以要考虑 Cauchy 列. 这里注意, 收敛是有限项后要有小性, 因此是用上限集刻画. 也就是

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq N} \left\{ |f_n - f_m| \leq \frac{1}{l} \right\}.$$

所谓 $\epsilon \rightarrow 0$ 就是对 l 取极限, 从而有

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq N} \left\{ |f_n - f_m| \leq \frac{1}{l} \right\}}_{\text{closed}}.$$

这里的闭性是因为连续性等价于闭集的原像是闭的, 上课应该讲过. \square

Problem 2.3 P55.19

设 f 在 \mathbb{R} 上具有介值性, 并且对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 是闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

Proof. 如果我们能证明 $\{f \leq q\}$ 是闭集, 那么就能证明

$$\{f \leq a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, a \leq q} \{f \leq q\}$$

是闭集, 那么我们就完成了证明 (因为我们只要对拓扑基验证原像性质). 而由对称性, 我们只要证明 $A_q := \{f < q\}$ 是开集. 反证法, 若不然, 存在 $x_0 \in A_q$, 使得有点列 $x_n \notin A_q$, 满足 $x_n \rightarrow x_0$, 且 $f(x_n) \geq q$, 而由介值性, 就有 y_n 在 x_0 和 x_n 之间, 满足 $f(y_n) = q$, 并且 $y_n \rightarrow x_0$. 但是 $\{f = q\}$ 是闭集, 这就说明 $q > f(x_0) = \lim_n f(y_n) = q$, 矛盾! 因此我们完成了证明. \square

Problem 2.4 p55.30

设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的可微函数, 且对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续函数.

Proof. 用 Darboux 中值定理, 我们知道 f' 有介值性, 由 2.3 即可. \square

Problem 2.5 P94.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 且存在 $0 < q < 1$, 使得对任一区间 (a, b) , 都有开区间列 $\{I_n\}$:

$$E \cap (a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 本题有不同的看法, 如果已经知道群里的外测度的密度定理, 这里就相当于在说, 一个有正外测度的集合密度显然不小于 1, 因此完成了证明. 但是我们这里不引用这个结论, 而是考虑迭代的办法,

$$E \subseteq (a, b) \Rightarrow E \subseteq \bigcup_n I_n \Rightarrow E \cap I_n \subseteq \bigcup_m I_{n,m} \dots$$

在测度侧我们相当于有

$$m^*(E \cap (a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} m(I_{n,m}) \leq (a, b)q^2.$$

右侧的 2 是我们的迭代次数, 因为 $q < 1$, 我们就说明了 $m^*(E \cap (a, b)) = 0$. 从而 $m(E) = 0$.

Remark. 这里没说 E 的可测性, 在证明零测集前别乱写 $m(E)$!

□

Problem 2.6 P94.2

设 $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_1 \subseteq A_2$, A_1 是可测集, 且 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 试证明 A_2 是可测集.

Proof. 如果知道等测包的概念, 这里大概是在说, 有等测核的集合是可测的, 因此等测包和等测核的地位并不对等. 证明就是走 Carathéodory 条件.

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) \Rightarrow m^*(A_2 \setminus A_1) = 0.$$

这表明 $A_2 \setminus A_1$ 可测, 从而 $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ 可测.

□

Problem 2.7 P94.7

$\{E_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 中的可测集列, 若 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$, 试证明:

$$m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} m(E_k).$$

Proof. 这个结论在大家学了 Fatou 引理后可能会有不同的看法. 不过这里是直接的计算.

$$\begin{aligned} m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) &= m\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq l} E_k\right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k \geq l} E_k\right) \\ &= \limsup_{l \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k \geq l} E_k\right) \\ &\geq \limsup_{l \rightarrow \infty} m(E_l). \end{aligned}$$

□

Problem 2.8 P94.8

设 $\{E_k\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集合列, $m(E_k) = 1 (k = 1, 2, \dots)$, 试证明:

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

Proof. 这道题看起来和 Baire 纲说的事有点像, 不过这是形式上的看法. 我们直接计算

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_k E_k\right) &= 1 - m\left(\bigcup_k E_k^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_k m(E_k^c) = 1. \end{aligned}$$

□

2.2 补充内容

1. 可测集与不可测集

这里我们主要关心函数和可测性的关心, 首先我们回忆定义.

Definition 2.9 Measurable functions

$f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ 是可测函数, 若对任意 \mathbb{R} 中的 Borel 子集 U , 都有 $f^{-1}(U)$ 是 μ -可测的.

这个定义其实隐含一个想法, “原像往往是好的, 而像集则未知”. 我们先处理原像. 由定义, 连续函数的原像能保持开集, 闭集, Borel 集 (因为 f^{-1} 可以和集合运算交换), Lebesgue 可测集. 不过, 零测集并不是稳定的.

Example 2.10

对于连续 (或可测) 函数, 零测集的原像未必零测.

考虑常值函数即可.

接下来我们考虑像的性质. 首先是最经典的例子.

Example 2.11

可测函数在可测集上的像未必可测.

考虑 Cantor 集 \mathcal{C} , Vitali 集 N , 我们知道 \mathcal{C} 的基数是 \mathfrak{c} , Vitali 集的基数也是 \mathfrak{c} (这时因为每个等价类的基数是可数的, 而他们的并集是不可数的), 因此这里存在一个满射 $g : \mathcal{C} \rightarrow N$, 现在我们构造函数

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathcal{C} \\ 0 & x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

这个函数是可测的, 因为可测函数可以修改零测集上的取值但不改变可测性, 而常值函数可测, 因此这个函数可测. 因此我们实际上说明了, 可测函数可以把零测集打到不可测集. 当然, 实际上有一个更应该记忆的例子, 就是连续函数可以把零测集打到不可测集.

Example 2.12

连续函数可以把零测集打到不可测集.

考虑 Cantor 函数 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, Vitali 集 N , 那么令 $E = f^{-1}(N) \cap \mathcal{C}$, 我们有

$$f(E) = N,$$

这是因为任意 $y \in N$, 由于 $f(\mathcal{C}) = [0, 1]$, 存在 $x \in \mathcal{C}$, 使得 $f(x) = y$, 因此 $x \in E$. 其实我们稍微延拓一下, 可以造出一个例子, 使得连续函数把正测度集打到不可测集.

Example 2.13

连续函数可以把正测度集打到不可测集.

我们对 Cantor 函数做常值延拓, 也即

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ f(x) & x \in [0, 1] \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

E 还是 2.12 的定义, 令 $A = [-1, 0] \cup E$, 那么 $m(A) = 1$, 而 $\tilde{f}(A) = \{0\} \cup E$ 还是不可测的. 最后用这个延拓后的函数, 我们还能说明连续函数能把不可测集打到正测集.

Example 2.14

连续函数可以把不可测集打到正测集.

仍然用 \tilde{f} , 现在我们考虑 $N' \subseteq [2, 3]$, 也就是平移后的 Vitali 集合. 那么 $E' = C \cup N'$ 就是一个不可测集, 但是 $\tilde{f}(E') = [0, 1]$.

总之, 原则就是像集的性质可以很古怪, 构造例子尝试用 Cantor 函数和 Cantor 集就行了, 一般都能试出来的.

2. Borel-Cantelli 引理的应用

这里我们展示一些与 Borel-Cantelli 引理有关的例题, 希望以此反映一些分析和概率论中的想法. 在做题中至少应该知道, Borel-Cantelli 是为数不多能用来证明 a.e.(a.s.) 收敛的工具. 在讲例题之前, 我们先把 Borel-Cantelli 引理的表述写一下.

Theorem 2.15 Borel-Cantelli lemma

若一系列可测集 $\{E_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$, 那么

$$m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) = 0.$$

为什么这个定理能帮助证明几乎处处收敛呢? 首先我们知道, 几乎处处收敛就是除去零测集后的逐点 (pointwise) 收敛, 而处处收敛意思实际上是, 除去有限项后的收敛, 因此可以被下限集刻画, 而对偶的考虑不收敛点 (因为几乎处处收敛是要刻画这个集合零测), 那么就自然是考虑上限集. 因此 Borel-Cantelli 引理的出现是合情合理的. 接下来的例题中, 我们将不再重复这里的论证过程.

接下来的例子大多数取材于概率论, 或许可以把这些内容当成概率论习题课.

Example 2.16 矩有界

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是随机变量列. 若存在 $p > 0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty,$$

证明

$$X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 任取 $\epsilon > 0$. 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{\epsilon^p}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon \text{ i.o.}) = 0.$$

□

Remark. 本题其实和 2025 年实分析 (H) 期末第二题是相同的道理.

Example 2.17 矩带速率

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 满足: 存在 $p > 0, \delta > 0, C > 0$ 使得

$$\mathbb{E}|X_n|^p \leq Cn^{-1-\delta}, \quad n \geq 1.$$

证明 $X_n \rightarrow 0$ a.s.; 并进一步证明: 对任意

$$0 < \alpha < \frac{\delta}{p},$$

都有

$$n^\alpha X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 先证 $X_n \rightarrow 0$ a.s.. 对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p} n^{-1-\delta}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理, $X_n \rightarrow 0$ a.s.

再证带速率的结论. 对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|n^\alpha X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon n^{-\alpha}) \leq \epsilon^{-p} n^{\alpha p} \mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p} n^{-1-\delta+\alpha p}.$$

由于 $\alpha < \delta/p$, 故 $-1 - \delta + \alpha p < -1$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|n^\alpha X_n| > \epsilon) < \infty.$$

再次应用 Borel-Cantelli 引理可得

$$n^\alpha X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Example 2.18 四阶矩与强大数律

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{E}X_1^4 < \infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 由独立性、同分布性及 $\mathbb{E}X_1 = 0$, 展开四次方可得

$$\mathbb{E}S_n^4 = n \mathbb{E}X_1^4 + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = n \mathbb{E}X_1^4 + 3n(n-1)(\mathbb{E}X_1^2)^2.$$

故存在常数 $C > 0$ 使得

$$\mathbb{E}S_n^4 \leq Cn^2.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| > \epsilon n) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\epsilon^4 n^4} \leq \frac{C}{\epsilon^4 n^2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Remark. 从级数求和那一步可以看出, 本题的四阶矩是绰绰有余的, 这个数主要是可以用二项式定理把奇次项的矩消去, 从这个角度看, 要降低矩条件的一个自然策略是把尾概率先丢掉从而提升可积性.

Example 2.19 方差条件到强大数律

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 相互独立, 满足

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

这里形式上出现了 $\frac{X_k^2}{k^2}$ 的求和, 因此我们需要补充一个 Kronecker 引理, 证明可以点击这里或这里.

Lemma 2.20

若序列 $\{x_n\}$ 求和收敛到有限数 s , 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s < \infty,$$

那么对一系列实数 $0 < b_1 < b_2 < \dots, b_n \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k = s.$$

同时, 这里涉及到一个方差估计, 因此我们还要引入 Kolmogorov 最大不等式, 一个不涉及鞅的证明是停时 (stopping-time) 论证, 接下来有一次习题课应该会讲一些停时的内容, 因此这里暂时不写出证明, 可以参考这里.

Theorem 2.21 Kolmogorov inequality

设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量列, 满足 $\mathbb{E}X_i = 0$ 和 $\text{Var}(X_i) < \infty$, 那么记 $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, 就有

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Proof. 考虑级数

$$T_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}.$$

只需证明 $\{T_n\}$ 几乎处处收敛, 再由 Kronecker 引理推出 $S_n/n \rightarrow 0$ a.s.

下面证明 $\{T_n\}$ 几乎处处是 Cauchy 列. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < \infty,$$

可取严格递增整数列 $\{N_j\}_{j \geq 1}$, 使得

$$\sum_{k > N_j} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{-3j}, \quad j \geq 1.$$

定义事件

$$A_j := \left\{ \sup_{m \geq N_j} \left| \sum_{k=N_j+1}^m \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j} \right\}.$$

对任意 $M > N_j$, 由 Kolmogorov 最大不等式,

$$\mathbb{P}\left(\max_{N_j < m \leq M} \left| \sum_{k=N_j+1}^m \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j}\right) \leq 2^{2j} \sum_{k=N_j+1}^M \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2}.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 得

$$\mathbb{P}(A_j) \leq 2^{2j} \sum_{k > N_j} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{2j} \cdot 2^{-3j} = 2^{-j}.$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理和最开始的转化, 我们完成了证明. □

Example 2.22 高阶矩估计

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{E}|X_1|^p < \infty$$

其中 $p > 2$. 记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明: 对任意 $\alpha > \frac{1}{2}$, 都有

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

这个例题在估计 p 阶矩的时候要用 Rosenthal 型不等式, 变体太多因此就不列出定理, 这里用到的其实是, 当 $p \geq 2$, 对一系列独立且 $\mathbb{E}X_i = 0$ 的随机变量, 有

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^p \leq C_p \left(\mathbb{E}|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right).$$

一个参考是这里. 这个定理本身还是比较符合直觉的, 一个联想是稀疏波 (频率支撑在不同的二进环带上) 的平方函数计算, 也许学过调和分析会比较有感觉?

Proof. 由 Rosenthal 最大不等式, 存在只依赖于 p 和 $\mathbb{E}|X_1|^p$ 的常数 $C_p > 0$, 使得对任意 $m \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k|^p\right] \leq C_p 2^{mp/2}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k|^p\right]}{\epsilon^p 2^{map}} \leq C_p \epsilon^{-p} 2^{-mp(\alpha - \frac{1}{2})}.$$

由于 $\alpha > \frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha}\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{1}{2^{m\alpha}} \max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

现取任意 n , 令 m 满足 $2^m \leq n < 2^{m+1}$. 则

$$\frac{|S_n|}{n^\alpha} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{(m+1)\alpha}} = 2^\alpha \cdot \frac{\max_{1 \leq k \leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{(m+1)\alpha}}.$$

右端几乎处处趋于 0, 故

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Remark. 这里用到的应该是叫二进制列法, 不用这个方法就要处理 $n^{-p(\alpha-1/2)}$ 的收敛性, 那么对 α 的要求就变成了 $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ 了.

Example 2.23 高斯尾估计

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立, 且 $X_n \sim N(0, 1)$. 证明: 对任意 $\epsilon > 0$,

$$|X_n| \leq (1 + \epsilon)\sqrt{2 \log n}$$

几乎处处最终成立.

Proof. 记

$$t_n := (1 + \epsilon)\sqrt{2 \log n}.$$

标准高斯尾估计表明: 存在常数 $C > 0$, 使得对一切 $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq C \frac{e^{-t^2/2}}{t}.$$

(不用复杂的估计, 凑个 $\frac{t}{t} \leq \frac{x}{t}$ 进去分部积分就行了, 概率论作业里有 Mills 比有关的证明, 道理是类似的)

取 $t = t_n$, 则当 n 足够大时,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t_n) \leq C \frac{e^{-t_n^2/2}}{t_n} = C \frac{n^{-(1+\epsilon)^2}}{(1 + \epsilon)\sqrt{2 \log n}}.$$

由于 $(1 + \epsilon)^2 > 1$, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > t_n) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|X_n| > (1 + \epsilon)\sqrt{2 \log n}$$

只会发生有限次. 换言之,

$$|X_n| \leq (1 + \epsilon)\sqrt{2 \log n}$$

几乎处处最终成立.

□

Example 2.24 L^p 收敛和几乎处处收敛

设 $p > 0$, f_n, f 是测度空间 (X, \mathcal{M}, μ) 上的可测函数, 并满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

证明

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

Proof. 任取 $\epsilon > 0$, 定义

$$E_n^\epsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}.$$

由 Chebyshev 不等式,

$$\mu(E_n^\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \frac{1}{\epsilon^p} \|f_n - f\|_p^p.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^\epsilon) \leq \epsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$$

只会对几乎处处的 x 发生有限次.

再对所有正有理数 ϵ 取可数交, 得

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

□

Remark. 从本题可以自然得到一个从 L^p 收敛序列抽取出几乎处处收敛子列的办法.

3. Lebesgue 外测度的密度

本部分讲解课程群中提到的外测度的密度, 一般这类证明都会用到覆盖定理 (看过 Evans 的测度论就知道套路了), 因此这里先介绍我们要用到的工具. 这一工具一般叫做 Vitali covering 定理或者 $5r$ -covering 定理.

Lemma 2.25 $5r$ covering lemma

设 \mathcal{B} 是 \mathbb{R}^d 中一族开球, 并且这些球的半径有统一上界. 则存在一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

其中若 $B = B(x, r)$, 则 $5B := B(x, 5r)$.

Theorem 2.26

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是任意集合, m^* 表示 \mathbb{R}^d 上的 Lebesgue 外测度. 则对 m^* -几乎处处的 $x \in E$, 有

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} = 1,$$

其中 $|B(x, r)|$ 表示该球的 Lebesgue 测度.

Proof. 一般来说, 这类证明都要定义一个坏点集, 然后通过覆盖定理证明坏点集能被覆盖住并且覆盖本身具有小性.

因此我们固定 $t \in (0, 1)$, 定义坏点集

$$A_t := \left\{ x \in E : \liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 - t \right\}.$$

我们先证明

$$m^*(A_t) = 0.$$

一旦这一点成立, 定理便立刻推出. 因为,

$$\left\{ x \in E : \liminf_{r \downarrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 \right\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_{1/n},$$

故左边这个集合有零外测度. 另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意 $r > 0$, 总有

$$0 \leq \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} \leq 1,$$

因此

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} \leq 1.$$

所以在 E 中除去一个零外测度集后, 上述比值的 \liminf 至少为 1, 而 \limsup 至多为 1, 从而极限存在且等于 1.

下面证明 $m^*(A_t) = 0$.

我们不妨假设 $A = A_t$ 有界, 这是因为

$$A_t = \bigcup_{N=1}^{\infty} (A_t \cap B(0, N)).$$

固定 $\epsilon > 0$. 由于 A 有界, 故 $m^*(A_t) < \infty$. 由外测度的定义, 可取开集 $U \supset A$, 使得

$$|U| < m^*(A) + \epsilon.$$

我们注意到, 若 $X \subset U$ 是 Lebesgue 可测集, 则

$$m^*(A \cap X) \geq |X| - \epsilon.$$

这是因为

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap X) + m^*(A \setminus X) \leq m^*(A \cap X) + m^*(U \setminus X) \\ &= m^*(A \cap X) + m^*(U) - m^*(X) < m^*(A \cap X) + m^*(A) + \epsilon - m^*(X). \end{aligned}$$

现在任取 $x \in A$. 因为 $x \in A_t$, 由 A_t 的定义可知

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 - t.$$

又由于 U 是开集且 $x \in U$, 故可取 $r_x > 0$, 使得

$$r_x < 1, \quad B(x, r_x) \subset U,$$

并且

$$m^*(E \cap B(x, r_x)) < (1 - t)|B(x, r_x)|.$$

记

$$B_x := B(x, r_x).$$

于是 $\{B_x\}_{x \in A}$ 是覆盖 A 的一族开球, 且所有半径都被 1 所控制.

由 $5r$ covering lemma, 可从中选出一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, 满足

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

令

$$X := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

则 $X \subset U$, 且 X 是可测集. 因为这些球两两不交, 所以

$$|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|.$$

接下来从上估计 $m^*(A \cap X)$. 由于 $A \subset E$, 由外测度的可数次可加性,

$$m^*(A \cap X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap B_i) < (1-t) \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = (1-t)|X|.$$

另一方面, 因为 $X \subset U$ 且 X 可测, 由前面得到的观察可知

$$m^*(A \cap X) \geq |X| - \epsilon.$$

合并这两个不等式, 得

$$|X| - \epsilon < (1-t)|X|,$$

从而

$$|X| < \frac{\epsilon}{t}.$$

最后, 由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

所以

$$m^*(A) \leq \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |5B_i| = 5^d \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = 5^d |X| < \frac{5^d}{t} \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 便得到

$$m^*(A) = 0.$$

这就完成了证明. □