

3 第三次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P78.1

设 $E \subset [0, 1]$, 若 $m(E) = 1$, 试证明 $\bar{E} = [0, 1]$; 若 $m(E) = 0$, 试证明 $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Proof. 第一部分是直接的, 因为

$$1 = m([0, 1]) \geq m(\bar{E}) \geq m(E) = 1 \Rightarrow m(\bar{E}) = 1.$$

第二部分是反证法, 若 E 有内点, 就有开球 $B \subset E$, 但是 $0 < m(B) \leq m(E) = 0$, 这不可能! □

Problem 3.2 P78.2

设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n \subset A_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证明

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Proof. 这个题相当于用分离性让外测度具有分离可加性, 某种意义上来说, 能从外测度的定义直接看出来. 当然更直接的办法是用 Carathéodory 条件去拆这个集合.

$$\begin{aligned} m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &= m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_1 \right) + m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_1 \right) \\ &= m^*(B_1) + m^* \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \right) \\ &= \dots \\ &\geq \sum_{n=1}^N m^*(B_n). \end{aligned}$$

对 N 取极限即可得到

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

用次可加性得到另一侧不等式, 从而完成了证明.

Remark. 同学们一定要熟练使用 Carathéodory 条件, 很多外测度定义上讲不清楚的事情其实可以直接简化成集合计算, 失去直观性得到的就是论证的极大简化. 以及同学们别把 Carathéodory 条件和 Carathéodory 定理搞混了, 后者是指从外测度构造完备测度的定理. □

Problem 3.3 P78.5

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0 < \alpha < m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F , 使得 $m(F) = \alpha$.

Proof. 本题需要指出的是, 直接使用测度连续性构造出来的集合不一定是紧集, 应该先用内正则性收缩出紧集, 然后再用连续性. 首先内正则性, 得到紧集 $K \subset E$, 满足 $\alpha < m(K) < m(E)$. 构造正半轴上的函数 $f(x) = m(K \cap [-x, x])$. 这个函数是连续的, 因为

$$f(x + \delta) - f(x) = m(K \cap [-x - \delta, x + \delta]) - m(K \cap [-x, x]) = m(K \cap ([-x - \delta, x) \cup (x, x + \delta])) \leq 2\delta.$$

因此我们利用介值性, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $m(K \cap [-x_0, x_0]) = \alpha$. 现在令 $F = K \cap [-x_0, x_0]$, 那么 $m(F) = \alpha$. \square

Problem 3.4 P94.9

设 E_1, E_2, \dots, E_k 是 $[0, 1]$ 中的可测集, 且有

$$\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1,$$

试证明

$$m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0.$$

Proof. 一般来说并集比交集好处理一些 (因为定义里唯一非平凡内容就是并集), 因此我们考虑补集. 此时条件就变成了

$$1 > \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i^c) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right).$$

而这正好等价于题目结论. \square

Problem 3.5 P84.2

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, $B \subset \mathbb{R}^n$. 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Proof. 由 Carathéodory 条件, 有

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A).$$

上下相减即得结论. 其中第一个等式来自 B 用 A 拆分, 第二个等式来自 $A \cup B$ 用 A 拆分. \square

Problem 3.6 P95.12

$\{B_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 中递减可测集合列, $m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k$ ($k = 1, 2, \dots$), $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

Proof. 如果要模仿测度连续性的证明, 那拆集合的时候出现的不等号就会比较麻烦, 因此这里通过等测包给出一个更干净的证明. 设 H 是 A 的等测包, 那么

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \leq m(H \cap B) + m(H \setminus B) = m(H) = m^*(A).$$

这就说明 $H \cap B_k$ 是 E_k 的等测包. 从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(H \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(H \cap B) = m^*(E).$$

本题也有一个不用等测包的方法, 要利用 3.5. 不妨设 B_k 测度有限 (不然用不了连续性).

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(A \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (m^*(A) + m^*(B_k) - m^*(A \cup B_k)) \\ &\leq m^*(A) + m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) - m^*\left(A \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) = m^*\left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) = m^*(E). \end{aligned}$$

这样就给出了上界, 而下界是显然的, 从而完成了证明 (道理上就是用两次 Carathéodory 条件, 因此也可以不用 3.5).

Remark. 改作业的时候改到了海量不同证法, 其中参考 3.2 也是一种比较好的证法, 总之这道题本质还是去用 Carathéodory 条件去拆集合, 感觉用等测包反而不是一个很合适的办法 (所以同学们在参考往年答案的时候应该带着自己的思考). 同时这道题在改的时候发现很多同学不加证明/引用的使用了周民强书上的外测度的 Fatou 引理 (这个的证明思路就是用外正则性去扰动, 然后用测度的 Fatou 引理), 这种习惯不太好, 会给读者带来了不必要的负担, 考试的时候完全不建议这样写.

□

Problem 3.7 P95.13

$E \subset \mathbb{R}^n$, $H \supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H - E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

Proof. 取 E 的等测包 $H' \subset H$, 那么

$$m(H) = m(H') + \underbrace{m(H \setminus H')}_{\subset H \setminus E} = m(H') = m^*(E).$$

□

Problem 3.8 P95.14

试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2 , $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Proof. 其实本题是第一次习题课的补充内容. 根据条件, 存在一系列开集 $\{G_n\}_{n \geq 1}$, $G_n \supset E$, 使得

$$m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

令

$$G = \bigcap_{n \geq 1} G_n,$$

那么

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

故 $G - E$ 是零测集 (外测度为零), 故可测, 从而

$$E = G - (G - E)$$

也是可测. 另一方面, 由于 E, E^c 可测, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2 , $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 - E) < \frac{\epsilon}{2}, \quad m(G_2 - E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

从而

$$m(G_1 \cap G_2) = m((G_1 - E) \cup (G_2 - E^c)) < \epsilon.$$

□

(以上内容将不在习题课讲评, 同学们自行对照)

Problem 3.9 P107.1

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且

$$\{x \in E : f(x) > 0\}$$

是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

Proof. 直接按照定义来, 稍微做一下分类即可. 若 $a > 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f^2 > a^2\} \cap \{f > 0\}.$$

若 $a \leq 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f > 0\} \cup \{f^2 < a^2\}.$$

□

Problem 3.10 P109.6

设 $f \in C([a, b])$. 若有定义在 $[a, b]$ 上的函数 $g(x): g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

Proof. 当然不是, 考虑 $f = \chi_{[0,1]}$, 而 g 为 Dirichlet 函数, 那么 $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [0, 1]$, 但是 Dirichlet 函数不是几乎处处连续的.

Remark. 这个题说明, 零测集的扰动完全破坏了连续函数的刚性. 函数的刚性是一个可以感知到的性质, 一个好的例子是去对比连续泛函演算和 Borel 泛函演算的谱映照定理, 当刚性被破坏, 好的性质应该在什么意义下去考虑.

□

Problem 3.11 P126.2

设 $z = f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$$

是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 要证明可测性只要看像空间的基的原像是否可测, 这里 F 实际上可以看成 $F = f \circ h$, $h(x) = (g_1(x), g_2(x))$. 由于 f 是连续函数, 现在只要验证 h 是可测函数. \mathbb{R}^2 上的拓扑基是开矩体, 那么对任意开矩体 $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, 有

$$h^{-1}(R) = g_1^{-1}(\alpha, \beta) \cap g_2^{-1}(\gamma, \delta),$$

因为 g_1, g_2 都是可测的, 这个集合是可测的.

改作业改到用开圆盘论证的, 但是就应该写成 $\{(g_1(x) - a)^2 + (g_2(x) - b)^2 < r^2\}$ 是可测的, 不过似乎没人这样写. 用开集结构定理的方法不赖, 和用生成元是类似的.

□

Problem 3.12 P126.3

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 右导数就是右差商的极限, 因此实际上我们只要证明右连续函数是可测函数就可以了. 这里我们不假设同学们学过拓扑学 (因为用 Sorgenfrey 拓扑的 Lindelöf 性质就是显然的了). 现在我们考虑 $A = \{f > a\}$, 那么根据右连续性, 容易知

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + \delta_x) = A,$$

但是这样重叠太多了, 没有办法证明这里能挑出一个可数覆盖从而证明可测性, 因此这里我们需要给 $\delta_x > 0$ 加一些条件,

$$\delta_x := \sup\{\delta : f(x) > a, f(x + \delta) > a\}.$$

那么此时我们知道 $[x, x + \delta_x)$ 与 $[y, \delta_y)$ 要么有包含关系要么完全不交, 因此我们就能取出代表元作为覆盖, 而这个覆盖一定是可数的, 因为覆盖中的每一个元素都包含了有理数, 相当于天然得到了一个从代表元到 \mathbb{Q} 的嵌入, 因此是可数的, 那么我们就得到了可测性.

还有一种比较好的做法, 就是考虑阶梯函数逼近

$$\phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k + 1/2^n) \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n)}(x).$$

证明这个函数逐点收敛要注意

$$x \leq x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n} < x + \frac{1}{2^n}.$$

那么有

$$\phi_n(x) = f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Remark. 这里我把做题思路写出来了, 希望没有完全做出来的同学能好好看看这里的思路.

□

Problem 3.13 P119.1

设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E?$$

Proof. 首先要想到怎么把 a.e. 相等变成一个可以估计的测度问题, 也就是去考虑

$$m(\{|f - g| > \epsilon\}) \stackrel{?}{=} 0.$$

然后这里我们就要用集合的三角不等式,

$$\{|f - g| > \epsilon\} \subset \{|f - f_n| > \epsilon/2\} \cup \{|f_n - g| > \epsilon/2\}.$$

因此我们就做完了, 因为

$$\begin{aligned} m(\{|f - g| > \epsilon\}) &\stackrel{\forall n}{\leq} m(\{|f - f_n| > \epsilon/2\}) + m(\{|f_n - g| > \epsilon/2\}) \\ &\stackrel{\text{condition}}{\leq} \limsup_n m(\{|f - f_n| > \epsilon/2\}) + m(\{|f_n - g| > \epsilon/2\}) = 0. \end{aligned}$$

另一种做法是用 Riesz 定理, $f_n \rightarrow f$ a.e., 而又有子列 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e., 那么 $f = g$ a.e..

□

Problem 3.14 P119.4

试问: $f_n(x) = \cos^n x$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

Proof. 是的, 直观上看就是端点附近是 1, 然后其他地方都能收敛到 0, 因此我们直接证明 f_n 依测度收敛到 0. 按照如下计算即可.

$$m(\{|f_n| > \epsilon\}) \leq 2m([0, \arccos \epsilon^{1/n})) \rightarrow 0.$$

□

Problem 3.15 P127.12

设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

Proof. 其实也是集合的三角不等式, 因为

$$\{|f_n g_n| > \epsilon\} \subset \{|f_n| > \sqrt{\epsilon}\} \cup \{|g_n| > \sqrt{\epsilon}\}.$$

然后和3.13一样就行了. □

Problem 3.16 P109.7

设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

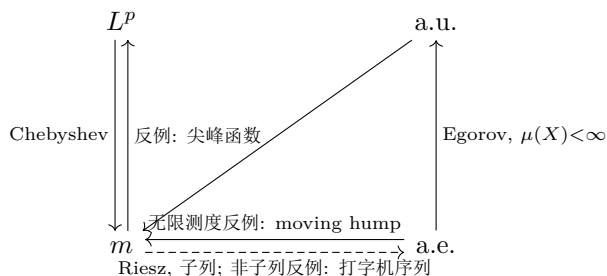
$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

Proof. 当然不存在, 因为可以考虑 $f = \chi_{[0, \infty]}$. 这时任何一个连续函数 g 在跳跃点 $x = 0$ 处都有邻域 U , 使得 g 在 U 上的扰动 $< 1/2$, 那么就给出一个正测集 $U \cap (-\infty, 0)$, 使得 $g \neq f$.

Remark. 不过同学们要意识到, 这里如果是允许一个小测度的误差, 那么是可以构造的, 方法是用 Lusin 定理 + Tietze 扩张. □

3.2 补充内容

1. 收敛性关系与例子



(助教画图能力有限, 将就看看吧, 一个画图工具链接点这里)

先回忆一下各种收敛性的定义和等价测度刻画.

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数.

1. 几乎处处收敛, a.e.

定义是

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0.$$

用集合语言刻画就是上限集测度为零, 这个推导见2.15下方, 也即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

2. 依测度收敛, in measure(注意不是convergence of measure)

定义就是测度刻画

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \rightarrow 0.$$

3. 几乎一致收敛, almost uniformly

这个定义来自 Egorov 定理, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在集合 $E \subset X$ 满足 $\mu(X \setminus E) < \epsilon$, 且

$$f_n \rightarrow f \quad \text{在 } E \text{ 上一致收敛.}$$

等价可以写成, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_k \mu \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j - f| \geq \epsilon\} \right) = 0.$$

从这里可以看出 a.u. 收敛蕴含依测度收敛.

4. L^p 收敛, $1 \leq p < \infty$

这个比较直接, 就是

$$\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

同学们一定不要记成 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, 这两个东西要互推需要加条件!

现在我们给出上述图中的三个反例.

1. 尖峰函数

这个就是说, 能量集中在一点. 令

$$f_n = n\chi_{[0,1/n]},$$

那么 $\|f_n\|_1 = 1$, 但是 f_n 依测度收敛到 0, 因为支集在缩小. 因此说明了反例.

2. 打字机序列

这个字面来看就是从左往右来回扫过. 令

$$f_{n,k} = \chi_{[(k-1)/2^n, k/2^n)},$$

其中 $1 \leq k < 2^n$. 不难看出这个序列依测度收敛到 0, 因为函数的支集在缩小. 但是函数在 $[0, 1)$ 上无处收敛, 因为每隔一段时间就要从 0 变成 1, 从而说明了反例.

3. moving hump

这个的意思是质量滑向无穷远, 接下来将指出, 这是一个弱收敛的标准模型, 同时一道经典考题 (来自泛函分析 II) 就是用的这里的构造思路.

令

$$f_n = \chi_{[n, n+1]},$$

那么函数列几乎处处收敛到 0, 但是无法控制的测度一直是 1, 因此说明了反例.

2. 如何使用收敛定理 (本部分由于课程顺序和时间关系, 不一定在习题课上讲, 但是希望同学们在备考时适当参考)

实分析大手子彦哥指出, 先用 DCT, DCT 用不了的用 Fatou, 再用不了就只能 Egorov, 再再用不了就得弱收敛或者这题有问题. 我觉得他说的对.

DCT 例题

以下默认考虑欧氏空间与 Lebesgue 测度

Example 3.17 高度

设 $f \in L^1(E)$. 证明

$$\int_E f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}} d\mu \rightarrow \int_E f(x) d\mu.$$

Proof. 令

$$f_n(x) ::= f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}}.$$

则对几乎处处的 $x \in E$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e. on } E.$$

同时

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|, \quad |f| \in L^1(E).$$

于是由控制收敛定理,

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu.$$

即

$$\int_E f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}} d\mu \rightarrow \int_E f(x) d\mu.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是有界函数.

Example 3.18 尾部

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 证明

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} d\mu \rightarrow 0.$$

Proof. 令

$$f_n(x) := |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f(x)|>n\}}.$$

对几乎处处的 $x \in E$, 因为 $|f(x)| < \infty$ a.e., 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbf{1}_{\{|x|>n\}} \rightarrow 0,$$

从而

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{a.e. on } E.$$

并且

$$0 \leq f_n(x) \leq |f(x)|, \quad |f| \in L^1(E).$$

由 DCT,

$$\int f_n d\mu \rightarrow 0.$$

即

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} d\mu \rightarrow 0.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是紧支函数.

Example 3.19 Fourier 变换

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明 F 在 \mathbb{R} 上连续.

Proof. 本题主要是要知道在欧氏空间证明连续性只需要证明序列连续性.

任取 $t_n \rightarrow t$. 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$e^{it_n x} \rightarrow e^{itx},$$

从而

$$f(x) e^{it_n x} \rightarrow f(x) e^{itx}.$$

又注意到

$$|f(x) e^{it_n x}| = |f(x)|.$$

由于 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 $|f|$ 可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{it_n x} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx.$$

即

$$F(t_n) \rightarrow F(t).$$

故 F 在 \mathbb{R} 上连续. □

Example 3.20 平移连续

设 $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 对 $h \in \mathbb{R}^d$, 记

$$\tau_h f(x) := f(x - h).$$

证明

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Proof. 这题的标准做法是: 先上好函数类上证明, 再用稠密性推广.

第零步: $C_c(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{dense}}{\subset} L^p$

这里我不想重复下一题的证明, 因此给出另一种证明思路. 可积函数可以被有界函数逼近, 因为 3.17. 然后这里用简单函数逼近, 但是还做不到连续性, 因此用一下 3.16 下的注记, 也就是用 Lusin+Tietze 就能得到一个连续函数. 最后算一下积分误差, 我们能注意到其实只对一个小测度集上做了扰动, 而因为我们提前说了有界性, 因此这个扰动是可以接受的, 从而完成了证明. 过程可以自己算一下, 这个结论一般不需要证明.

第一步: 先设 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

对每个固定的 $x \in \mathbb{R}^d$, 由连续性,

$$f(x - h) \rightarrow f(x) \quad (h \rightarrow 0).$$

因此

$$|f(x - h) - f(x)|^p \rightarrow 0 \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^d.$$

下面找支配函数. 因为 f 具有紧支撑, 所以当 $|h| \leq 1$ 时, 函数 $x \mapsto f(x - h)$ 的支撑都落在某个固定的大球 $B(0, R)$ 中. 又由于 f 连续且紧支撑, 因此有界, 设

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

于是当 $|h| \leq 1$ 时,

$$|f(x - h) - f(x)|^p \leq (2M)^p \mathbf{1}_{B(0, R)}(x),$$

而右边可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0.$$

第二步: 推广到一般 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

由 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 任给 $\epsilon > 0$, 可取 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 使得

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

于是

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h(f - g)\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

又因为平移保持 L^p 范数,

$$\|\tau_h(f - g)\|_p = \|f - g\|_p < \epsilon.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

由第一步知, 当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\|\tau_h g - g\|_p \rightarrow 0.$$

所以

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 得

$$\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0.$$

□

Example 3.21 光滑化

设 $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 满足 $\eta \geq 0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = 1.$$

定义

$$\eta^\epsilon(x) := \epsilon^{-d} \eta(x/\epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

1. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p < \infty$), 证明

$$\eta^\epsilon * f \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

2. 若 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且在点 x 处连续, 证明

$$(\eta^\epsilon * f)(x) \rightarrow f(x).$$

Proof. (1) 证明 L^p 收敛.

先积分换元, 把卷积写成

$$(\eta^\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) f(x - \epsilon y) dy.$$

于是

$$(\eta^\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) dy.$$

因此由 Minkowski 积分不等式,

$$\|\eta^\epsilon * f - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p dy.$$

对每个固定的 $y \in \mathbb{R}^d$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时有 $\epsilon y \rightarrow 0$, 由上一题的平移连续性,

$$\|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \rightarrow 0.$$

另一方面,

$$\|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \leq \|\tau_{\epsilon y} f\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p.$$

故

$$0 \leq \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \leq 2\|f\|_p \eta(y),$$

而 $2\|f\|_p \eta(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 于是对变量 y 应用 DCT, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p dy \rightarrow 0.$$

从而

$$\|\eta^\epsilon * f - f\|_p \rightarrow 0.$$

(2) 证明连续点处的点态收敛.

固定 x , 有

$$(\eta_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) f(x - \epsilon y) dy.$$

于是

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) dy.$$

因为 f 在 x 处连续, 所以对每个固定的 y , 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$f(x - \epsilon y) \rightarrow f(x).$$

因此

$$\eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) \rightarrow 0 \quad \text{for every } y \in \mathbb{R}^d.$$

又因为 $f \in L^\infty$, 设 $\|f\|_\infty \leq M$, 则

$$|\eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x))| \leq 2M \eta(y),$$

而 $2M \eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由 DCT,

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) \rightarrow 0.$$

即

$$(\eta_\epsilon * f)(x) \rightarrow f(x).$$

□

Remark. 这两个题往年考过类似的, 务必掌握, 至少掌握 L^1 版本的计算.

Fatou 例题

任爷曾说过, 这个 Fatou 引理就像我们科大的学生, 在校内看不出什么, 拿到社会上就变得很厉害. 同学们要相信自己的实力, 即使哪门课没学好, 或者早早放弃基数, 都不代表任何能力上的缺失, 不过是选择一条适合自己的路 (所以不要不知道选啥方向就选基数, 这很糟糕).

一般来说, Fatou 引理是天然的下半连续性, 在变分法中起到保持能量有界的作用. 等号不成立的一些例子是逃逸 ($\chi_{[n, n+1]}$) 或者消散 ($\frac{1}{n} \chi_{[0, n]}$) 再或者集中 ($n \chi_{[0, \frac{1}{n}]}$), 这能联想到一些深刻的分析内容, 但和我们的课程内容无关. 以上是题外话.

Example 3.22 函数列有比较关系

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有

$$f_n \geq h_n \quad \text{a.e.}$$

又设

$$f_n \rightarrow f \quad \text{a.e.}, \quad h_n \rightarrow h \quad \text{a.e.},$$

并且

$$\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu > -\infty.$$

证明

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Proof. 令

$$u_n := f_n - h_n.$$

则 $u_n \geq 0$ a.e., 且由 $f_n \rightarrow f$ 和 $h_n \rightarrow h$ a.e. 可得

$$u_n \rightarrow f - h \quad \text{a.e.}$$

由 Fatou 引理,

$$\int (f - h) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - h_n) d\mu.$$

于是

$$\int f d\mu - \int h d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu - \int h_n d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu - \int h d\mu.$$

也就是

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

□

Remark. 仿照这里的过程, 可以证明广义 DCT: 设 $f_n, g_n, f, g \in L^1$, 且 $f_n \rightarrow f$ a.e., $g_n \rightarrow g$ a.e., 且 $|f_n| \leq g_n, \int g_n \rightarrow \int g$, 那么 $\int f_n \rightarrow \int f$. 提示是对 $g_n + f_n \geq 0$ 和 $g_n - f_n \geq 0$ 分别使用 Fatou 引理.

Example 3.23 依测度收敛子序列

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有

$$f_n \geq h_n \quad \text{a.e.}$$

又设

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in measure}, \quad h_n \rightarrow h \quad \text{in measure},$$

并且

$$\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu > -\infty.$$

证明

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Proof. 设

$$L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

若 $L = +\infty$, 结论显然成立. 下设 $L < +\infty$.

任取满足

$$\int f_{n_k} d\mu \rightarrow L$$

的子列 $\{f_{n_k}\}$. 由于 $f_{n_k} \rightarrow f$ in measure, 由子列原则可取进一步子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$, 使得

$$f_{n_{k_j}} \rightarrow f \quad \text{a.e.}$$

再对对应的 $\{h_{n_{k_j}}\}$ 应用子列原则, 可再取进一步子列, 仍记为 $\{n_{k_j}\}$, 使得

$$h_{n_{k_j}} \rightarrow h \quad \text{a.e.}$$

于是沿着这条子子列, 已满足第 1 题的全部假设, 从而

$$\int f d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_{n_{k_j}} d\mu.$$

但右边恰好等于 L , 因为 $\int f_{n_k} d\mu \rightarrow L$, 这是我们之前选好的. 故

$$\int f d\mu \leq L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

证毕. □

上面两个题就是比较经典的 Fatou 引理例题了, 一个是构造正的比较函数, 一个是取子列, 考试中也基本是这些方法. 下面补充一个用广义 DCT 的题目.

Example 3.24 依范数收敛与范数收敛

设 $f_n \rightarrow f$ a.e., 且 $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$, 那么 $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Proof. 由条件, 有 $f_n \in L^1$, 那么 $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \in L^1$, 由广义 DCT, 就有

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

□

Egorov

一般来说用到 Egorov 定理的题目都是有点难度的题目了.

Example 3.25 高阶矩有界 + 逐点收敛得到一阶矩收敛

设 $m(E) < \infty$. 设 $f_n \rightarrow 0$ a.e. 于 E , 并且存在 $p > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} \leq C.$$

证明

$$\|f_n\|_{L^1(E)} \rightarrow 0.$$

Proof. 对固定的 $\epsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset E$ 满足 $m(E \setminus A) < \epsilon$, 使得 $f_n \rightarrow 0$ on A , 然后我们直接拆积分

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| dx &= \int_A |f_n| dx + \int_{E \setminus A} |f_n| \\ &\leq m(A) \sup_A |f_n| + (m(E \setminus A))^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p. \quad (\text{用一致收敛和 Hölder 不等式}) \end{aligned}$$

然后前面用一致收敛到 0, 后面用 L^p 有界性加测度小性, 由于 ϵ 是任取的, 就完成了证明. □

另一个很好的例子是有限测度空间中 L^1 有界 + 一致可积推出 L^1 弱紧性的证明, 其实一致可积就是值域的尾部小性, 也就是防止函数的能量集中到一点, 使得紧性缺失. 不过受限于课程内容就不展开讲了. 这个证明可参考 Evans 的 Measure Theory, Theorem 1.44.

3. 收敛性与例子

a.e. 收敛的题目在上次习题课讲了很多 (Borel-Cantelli 引理), 然后依测度收敛的题目主要是 3.23, 3.13 和 3.15, 因此这里主要讲 L^p 收敛相关的内容, 最后介绍一些弱收敛的内容. 其实如果不是做题, 感觉 L^p 收敛和弱收敛才是最常用的.

Example 3.26 范数极限

设 $1 \leq p < \infty$, 且 $f \in L^p \cap L^\infty$. 于是对每个 $q > p$, 都有 $f \in L^q$. 证明

$$\|f\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q.$$

Proof. 记

$$M := \|f\|_\infty.$$

先证上极限不超过 M . 对任意 $q > p$, 由 $|f| \leq M$ a.e., 得

$$|f|^q = |f|^{q-p}|f|^p \leq M^{q-p}|f|^p.$$

两边积分可得

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \leq M^{q-p} \int |f|^p = M^{q-p} \|f\|_p^p.$$

于是

$$\|f\|_q \leq M^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q}.$$

令 $q \rightarrow \infty$, 得

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \leq M.$$

再证下极限不小于 M . 任取 $\epsilon > 0$, 令

$$A_\epsilon := \{x : |f(x)| > M - \epsilon\}.$$

由于 M 是本性上确界, 所以 $\mu(A_\epsilon) > 0$. 因而对每个 $q > p$,

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \geq \int_{A_\epsilon} |f|^q \geq (M - \epsilon)^q \mu(A_\epsilon).$$

于是

$$\|f\|_q \geq (M - \epsilon) \mu(A_\epsilon)^{1/q}.$$

令 $q \rightarrow \infty$, 注意到 $\mu(A_\epsilon)^{1/q} \rightarrow 1$, 得

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \geq M - \epsilon.$$

再令 $\epsilon \downarrow 0$, 得

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \geq M.$$

综合上下极限, 即得

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q = M = \|f\|_\infty.$$

□

Example 3.27 Vitali 收敛定理

设 $1 \leq p < \infty$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(X)$. 证明: $\{f_n\}$ 在 L^p 范数下是 Cauchy 列的充要条件是下面三条同时成立:

1. $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 即对每个 $\eta > 0$,

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

2. $\{|f_n|^p\}$ 一致可积. 也就是说, 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_n \int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

3. 对每个 $\epsilon > 0$, 存在可测集 $E \subset X$, 使得 $\mu(E) < \infty$, 且

$$\int_{E^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon \quad \text{for } \forall n.$$

Proof. 分必要性和充分性两部分.

必要性. 设 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列.

(i) 证明 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的.

任取 $\eta > 0$. 由 Chebyshev 不等式,

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta^p} \int |f_n - f_m|^p d\mu = \frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{\eta^p}.$$

由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 右边当 $m, n \rightarrow \infty$ 时趋于 0. 故 (i) 成立.

(ii) 证明 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积.

这个的思路是用 Cauchy 列和积分的绝对连续性, 讲后面的序列粘起来. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

又因为 $|f_N|^p \in L^1$, 所以存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta_0$, 就有

$$\int_A |f_N|^p d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是对 $n \geq N$, 若 $\mu(A) < \delta_0$, 则

$$\int_A |f_n|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_A |f_n - f_N|^p d\mu + 2^{p-1} \int_A |f_N|^p d\mu < 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} + 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \dots, N-1$, 因为每个 $|f_n|^p \in L^1$, 可分别取 $\delta_n > 0$, 使得 $\mu(A) < \delta_n$ 时

$$\int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

令

$$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}\},$$

则只要 $\mu(A) < \delta$, 对所有 n 都有

$$\int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

故 (ii) 成立.

(iii) 证明有限测度截断条件.

这个思路和上面一步思路类似, 尾序列都用第 N 项粘住, 有限项随便处理就行. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

因为 $|f_N|^p \in L^1$, 存在可测集 $E_0 \subset X$, 使得

$$\mu(E_0) < \infty, \quad \int_{E_0^c} |f_N|^p d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是当 $n \geq N$ 时,

$$\int_{E_0^c} |f_n|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_n - f_N|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_N|^p d\mu < \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \dots, N-1$, 可分别取可测集 $E_n \subset X$, 使得

$$\mu(E_n) < \infty, \quad \int_{E_n^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

令

$$E := E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{N-1}.$$

则 $\mu(E) < \infty$, 且由于 $E^c \subset E_0^c$ 以及 $E^c \subset E_n^c$, 对所有 n 都有

$$\int_{E^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

故 (iii) 成立.

充分性. 现设 (i), (ii), (iii) 都成立. 证明 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. 我们的思路是, 将积分按机制拆分, 主部 E 的估计可以用依测度收敛拆成大误差和小误差, 小误差直接算, 大误差放到一致可积里, 然后主部外 E^c 基本可以丢掉, 那么就做完了.

任取 $\epsilon > 0$. 我们要证明当 m, n 充分大时,

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

由 (iii), 可取可测集 $E \subset X$, 使得

$$\mu(E) < \infty, \quad \int_{E^c} |f_k|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p} \quad \text{对所有 } k.$$

再取 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

由 (ii), 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_k \int_A |f_k|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

由 (i), 因为 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $m, n \geq N$ 时,

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}) < \delta.$$

记

$$A_{mn} := \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}.$$

现在把积分分成三部分:

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu + \int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu + \int_{E^c} |f_n - f_m|^p d\mu.$$

对第一部分, 因为在 $E \setminus A_{mn}$ 上有 $|f_n - f_m| < \lambda$, 所以

$$\int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu \leq \lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第二部分, 由 $|a - b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_n|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_m|^p d\mu.$$

由于 $\mu(A_{mn}) < \delta$, 由 (ii) 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}, \quad \int_{A_{mn}} |f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

故

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第三部分, 同样由 $|a - b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, 得

$$\int_{E^c} |f_n - f_m|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{E^c} |f_n|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{E^c} |f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

三部分相加可得, 当 $m, n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_X |f_n - f_m|^p d\mu < \epsilon^p.$$

因此

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

故 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. □

最后, 我们来通过弱收敛, 加强我们对收敛性的理解. 其实这样说是原因的, 因为弱收敛中有三种标准机制, 使其区别于强收敛 (一般称 L^p 收敛为强收敛).

Definition 3.28 收敛性

设 X 是赋范线性空间, $x_n, x \in X$.

强收敛. 称 x_n 强收敛到 x , 记作

$$x_n \rightarrow x,$$

如果

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

弱收敛. 称 x_n 弱收敛到 x , 记作

$$x_n \rightharpoonup x,$$

如果对每个连续线性泛函 $f \in X^*$, 都有

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Remark. 这里可以想的简单一些, 就考虑 $(L^p)^* = L^{p'}$, 这里 $1 \leq p < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 承认这个事情, 对于理解下面的内容够用了.

强收敛一定推出弱收敛. 因为若 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, 则对任意 $f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

但是反过来一般不成立. 这种现象只会在无限维空间中出现. 在有限维空间里, 弱收敛与强收敛是等价的.

从直观上看, 强收敛要求“整体上靠近”, 而弱收敛只要求“在测试意义下逼近”. 因此, 如果一个序列能够通过某种方式躲过这些测试, 就可能出现“弱收敛但不强收敛”.

这种躲避有三种典型方式:

振荡, 逃逸, 集中.

下面分别讨论.

模型一: 振荡

考虑 $L^2(0, 2\pi)$ 中的函数列

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

首先,

$$\|u_n\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi,$$

因此 $\|u_n\|_{L^2}$ 恒定不变, 所以 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, u_n 却弱收敛到 0. 直观上说, $\sin(nx)$ 的频率越来越高, 正负振荡越来越快, 积分后测试函数被抵消了. 当然严格来讲就是 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(0, 2\pi).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把“不收敛的部分”藏在越来越细的振荡里.

模型二: 逃逸

考虑 $L^p(\mathbb{R})$, 其中 $1 < p < \infty$. 取一个固定函数 $\phi \in L^p(\mathbb{R})$, 定义

$$u_n(x) = \phi(x - n).$$

由于平移不改变 L^p 范数, 有

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

因此 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 图像整体向右平移, 越来越远离原点附近. 对任意固定的测试函数 φ , u_n 与 φ 的重叠越来越少, 所以

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0.$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列让质量逃逸到无穷远.

模型三: 集中

考虑 $L^p(0, 1)$, 其中 $1 < p < \infty$, 定义

$$u_n(x) = n^{1/p} \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x).$$

直接计算可得

$$\|u_n\|_{L^p(0, 1)}^p = \int_0^{1/n} n dx = 1,$$

因此

$$\|u_n\|_{L^p(0, 1)} = 1.$$

于是 u_n 不可能强收敛到 0.

另一方面, u_n 的支集越来越小, 全部质量都集中到 $x = 0$ 附近越来越窄的区域. 对任意固定测试函数 $\varphi \in L^{p'}(0, 1)$, 有

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(0, 1).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把质量压缩到越来越小的尺度中. 从线性观测的角度看, 这种集中仍然可能不可见.

接下来讲一个弱收敛的例子, 其实约等于 Riemann-Lebesgue 引理.

在 ℓ^2 中考虑标准基

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

其中第 n 个分量为 1, 其余分量为 0.

显然

$$\|e_n\|_{\ell^2} = 1,$$

所以 e_n 不可能强收敛到 0.

但是, 对任意 $y = (y_k) \in \ell^2$, 有

$$\langle e_n, y \rangle = y_n \rightarrow 0,$$

因为 $y \in \ell^2$ 有 $y_k \rightarrow 0$. 因此

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^2.$$

这个例子可以看作“滑行无穷远”的抽象版本. 它不是在实线上向右平移, 而是在坐标方向上跑向越来越远的位置.

前面的例子表明, 在很多无限维空间里, 弱收敛比强收敛弱得多. 但是 ℓ^1 是一个非常特殊的空间. 我们将证明如下结果.

Example 3.29 饺子醋

ℓ^1 中弱收敛等价于强收敛.

我们先来套典型机制, 看看为什么不能弱而不强. 首先作为离散序列空间, 本身就不能像 L^2 中通过振荡和集中来实现弱而不强, 而对于逃逸来说, ℓ^1 的对偶空间是 ℓ^∞ 空间, 这个空间太大了, 在里面考虑测试序列 $(\frac{1}{\text{sgn}(a_1)}, \dots, \frac{1}{\text{sgn}(a_n)}, \dots)$, 能让所有质量都无所遁形, 因此我们很有理由去相信这个结果是对的.

我们的证明就是去造测试序列, 抓取想要逃逸的质量, 从而实现强收敛.

Proof. 先说一下我们的构造策略: 因为有弱收敛, 所以我们当然能压制住某项后的所有序列 $x_{n \geq N}$, 使得他们的质量集中在尾巴 $\{x_{n \geq N} (i \gg 1)\}$ 上, 然后我们就归纳的构造我们的测试函数, 一步一步抓取更大范围的质量.

反设

$$x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^1,$$

但

$$\|x_n\|_{\ell^1} \not\rightarrow 0.$$

那么通过取子列, 不妨仍设存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|x_n\|_{\ell^1} \geq 5\delta, \quad \forall n \geq 1.$$

这里的 5δ 是纯技术设定, 只是为了后续分配质量方便一些.

把 x_n 写成

$$x_n = (x_n(i))_{i \geq 1}.$$

由于每个坐标映射

$$x \mapsto x(i)$$

都是 ℓ^1 上的连续线性泛函, 由 $x_n \rightarrow 0$ 可知, 对每个固定的 $i \geq 1$, 都有

$$x_n(i) \rightarrow 0.$$

下面归纳地构造严格递增序列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k \geq 1}$, 使得

$$\sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta, \quad (1)$$

以及

$$\sum_{i=1}^{i_k} |x_{n_{k+1}}(i)| < \delta. \quad (2)$$

构造过程如下.

先取 $n_1 = 1$. 由于 $x_{n_1} \in \ell^1$, 可取 i_1 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| < \delta.$$

这就得到了 (1) 在 $k = 1$ 时的结论.

接着, 由于对每个 $1 \leq i \leq i_1$ 都有 $x_n(i) \rightarrow 0$, 故可取 $n_2 > n_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

再由 $x_{n_2} \in \ell^1$, 可取 $i_2 > i_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

如此归纳下去, 就得到严格递增序列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k \geq 1}$ 满足 (1) 与 (2).

现在定义 $y = (y(i))_{i \geq 1} \in \ell^\infty$ 如下. 令 $i_0 = 0$, 并在每个块

$$i_{k-1} + 1 \leq i \leq i_k$$

上定义

$$y(i) = \overline{\operatorname{sgn}(x_{n_k}(i))}, \quad k \geq 1.$$

其中约定

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

于是显然 $|y(i)| \leq 1$, 从而

$$\|y\|_{\ell^\infty} \leq 1,$$

故 $y \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$.

在开始下面的估计前, 还是画个图展示一下我们要怎么证明.

$$3\delta, i_k + 1 \xrightarrow{\text{gliding hump}} i_{k+1}$$

$$\delta \text{ ————— } i_k$$

$$\delta, i_{k+1} + 1 \text{ ————— }$$

意会一下即可.

接下来估计 $y(x_{n_k})$. 对任意 $k \geq 1$, 有

$$y(x_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x_{n_k}(i).$$

把求和拆成三段,

$$\{1, \dots, i_{k-1}\}, \quad \{i_{k-1} + 1, \dots, i_k\}, \quad \{i_k + 1, i_k + 2, \dots\}.$$

由于在中间这一段上 $y(i) = \overline{\text{sgn}(x_{n_k}(i))}$, 所以

$$\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} y(i)x_{n_k}(i) = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)|.$$

从而

$$\begin{aligned} |y(x_{n_k})| &\geq \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| \\ &= \|x_{n_k}\|_{\ell^1} - 2 \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - 2 \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)|. \end{aligned}$$

由构造可知, 当 $k \geq 2$ 时,

$$\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| < \delta, \quad \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta,$$

再结合 $\|x_{n_k}\|_{\ell^1} \geq 5\delta$, 得

$$|y(x_{n_k})| > 5\delta - 2\delta - 2\delta = \delta.$$

而当 $k = 1$ 时, 由 $i_0 = 0$ 以及 (1), 同样有

$$|y(x_{n_1})| \geq \sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_1}(i)| - \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| = \|x_{n_1}\|_{\ell^1} - 2 \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| > 5\delta - 2\delta = 3\delta > \delta.$$

因此对每个 $k \geq 1$, 都有

$$|y(x_{n_k})| > \delta.$$

这就矛盾了. 因为 $y \in (\ell^1)^*$, 而 $x_n \rightarrow 0$, 必有

$$y(x_n) \rightarrow 0,$$

从而其任意子列也应趋于 0, 不可能满足

$$|y(x_{n_k})| > \delta, \quad \forall k \geq 1.$$

矛盾说明反设不成立, 所以

$$\|x_n\|_{\ell^1} \rightarrow 0.$$

于是

$$x_n \rightharpoonup x \implies \|x_n - x\|_{\ell^1} \rightarrow 0.$$

这就证明了 ℓ^1 中弱收敛与强收敛等价. □