4 第四次习题课讲义

4.1 作业答案

Problem 4.1 P119 5

若 $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n\to\infty} m\big(\{x \in E :\ |f_n(x)| > 0\}\big) = 0?$$

Proof. 考虑 $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,1]}$, 可见结论错误. □

Problem 4.2 P119 6

设 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x) \ge f_{k+1}(x), \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

Proof. 有单调性, 子列当然能控制整体. 用 Riesz 定理就行了. □

Problem 4.3 P123 1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，试问：是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$，使得

$$m\big(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > 0\}\big) = 0?$$

Proof. 当然不行, 这个题的道理和3.16是一样的, 考虑 $\chi_{[0,\infty]}$ 即可. □

Problem 4.4 P123 2

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测，试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

Proof. 思路是 Lusin 定理和 Weierstrass 逼近定理. 利用 Lusin 定理, 可以找到一列连续函数几乎处处收敛到 f. 一个比较好说清楚的写法是, 直接用 Lusin 定理, 然后相当于得到了依测度收敛序列, 用 Riesz 定理就得到几乎处处收敛子列. 然后用 Weierstrass 定理, 写过程用放缩就行, 比如

$$\lim_n |f(x) - p_n(x)| \le \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + \liminf_n |f_n(x) - p_n(x)| \le \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + ||f_n - p_n||_\infty.$$

但是这里还有最后一个问题, 就是 Lusin 定理在使用的时候, 要假定函数是几乎处处有限的. 因此在构造连续函数逼近时, 第一步应该将 f 改造成 $\frac{f}{1+|f|}$, 然后先逼近, 再拉回即可. 这里反函数是 $\frac{x}{1-|x|}$. 用广义实值化的 tan 和 arctan 也是一样的. □

Remark. 改作业的时候发现只有极少数同学注意到这一点, 所以我直接放过去了, 但是同学们还是注意细节.

4.2 2025mid

Problem 4.5 2025-1

谈谈你对 Lebesgue 可测集合的认识: 定义, 与开集, Borel 集的关系。

Proof.
- (1') 外测度定义.
- (3') Carathéodory 条件.
- (3') $m(U \setminus E) < \epsilon$.
- (3') Borel 集 ± 零测集.

□

Problem 4.6 2025-2

谈谈你对 Lebesgue 可测函数的认识: 定义, 与特征函数, 连续函数的关系, 以及关于极限运算是否封闭。

Proof.
- (1') f 广义实值.
- (4') E 可测 (1'), $\{x \in E : f(x) > t\}$ 可测.
- (2') $\mathcal{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle$, $A \subset E$ 可测.
- (2') Lusin 定理.
- (2') 封闭性.

□

Remark. 这两个题比较莫名其妙, 注明的分值仅代表 25 年评分标准. 不过还是要注意, 至少要把题目提到的词解释一下.

Problem 4.7 2025-3

计算集合族

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} : m(A) = 0\}$$

的势。

Proof. 结论是

$$|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

上界显然成立, 因为 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 所以

$$|\mathcal{F}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

下界取标准 Cantor 集 C. 因为

$$m(C) = 0,$$

Lebesgue 测度是完备的, 所以 C 的任意子集都是零测集. 因而

$$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{F}.$$

又因为 $|C| = \mathfrak{c}$, 所以

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

故

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\mathfrak{c}}.$$

综上,

$$|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

□

Problem 4.8 2025-4

设 C 是 $[0,1]$ 区间三等分 Cantor 集. 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in C, \\ (-2)^{-n}, & x \text{ 落在构造过程中第} n \text{ 次舍去的长为} 3^{-n} \text{ 的区间}. \end{cases}$$

计算

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Proof. 在 25 年的评分标准中, 说明函数可测占 2 分.

因为 $m(C)=0$, 所以 C 上取值为 $+\infty$ 不影响积分.

第 n 次删去的区间共有

$$2^{n-1}$$

个, 每个长度为

$$3^{-n},$$

且在这些区间上

$$|f(x)| = 2^{-n}.$$

故第 n 层的贡献为

$$2^{n-1}\cdot 3^{-n}\cdot 2^{-n} = \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

于是

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{4}.$$

□

Problem 4.9 2025-5

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx.$$

Proof. 首先要知道这里的逐点极限是

$$\lim_n (1+\frac{x}{n})^{-n} = e^{-x}.$$

(必须知道这个, 而且不需要证明这个.)

然后用 MCT/DCT(用单调性就行, 这是数分结论) 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

不会算这个积分的话可能会比较凄凉, 不过过程应该是不用写的. □

Problem 4.10 2025-6

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是非负的 Lebesgue 可积函数. 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x\in[0,1]: f(x)\geq k\})<\infty.$$

Proof. 由分布函数,

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\infty} m(\{x: f(x)\geq t\})\,dt.$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} m(\{x: f(x)\geq t\})\,dt\geq\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x: f(x)\geq k+1\}).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\{x: f(x)\geq k\})<\infty.$$

再加上

$$m(\{x: f(x)\geq 0\})\leq 1,$$

便得

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x: f(x)\geq k\})<\infty.$$

□

Problem 4.11 2025-7

设 f_n 是 $[0,1]$ 上的单调增加的非负可测函数, 且

$$f_n(x)\to f(x)\quad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

证明: 存在 $[0,1]$ 上的单调增加的非负简单可测函数 g_n, 使得对任意 x,

$$g_n(x)\leq f_n(x),$$

且

$$g_n(x)\to f(x)\quad \text{a.e.}$$

Remark. 这个题考试的时候修改过表述, 这里的表述可能容易误解. 反正意思是 $f_n\nearrow f$, 要造 $g_n\nearrow f$.

Proof. 证明来自 PPT13 关于 MCT 的证明. 第一步是写出 ϕ_{ij} 的构造, 这个不写整道题就是零分 (因为我拿了零分).

$$\phi_{ij}=\sum_{k=0}^{2^{2^j}-1} k2^{-j}\chi_{f^{-1}(k2^{-j},(k+1)2^{-n}]}+2^n\chi_{f^{-1}(2^j,\infty]}.$$

然后取对角线序列

$$g_n=\max(\phi_{11},\cdots,\phi_{nn}).$$

最后的逐点收敛证明用 ϵ-room 技巧, 考虑 $f-\epsilon$, 有

$$f(x)-\epsilon\leq\phi_{mk}(x)\leq f_m(x)\leq f(x).$$

这里 $m<k$, m 充分大. 因为这里是在做逐点收敛, 因此这样论证就够了. □

Problem 4.12 2025-8

是否存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得其不连续点是: (1) 有理数集 $\mathbb{Q}$. (2) 无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 证明结论或举反例。

Proof. (1) 存在. 取 Riemann 函数 (数学分析 A1 里有):

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ \gcd(p,q)=1,\ q>0.\end{cases}$$

它在每个无理点连续, 在每个有理点不连续. 故其不连续点集恰为 $\mathbb{Q}$.

(2) 不存在. 首先要指出, 连续函数的连续点集是一个 G_δ 集, 因为连续点集能写成

$$\bigcap_k\{\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}.$$

这里要说明 $\{\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}$ 是开集 (用连续的定义就行), 这在 25 年改卷中占 4 分. 接着要说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集, 用反证法, 此时无理数是 F_σ 集, 因为有理数的稠密性, 这里的闭集都是无处稠密的. 再并上可数的有理点, 就得到 $\mathbb{R}$ 是无处稠密集的并, 与 Baire 纲矛盾. □

Problem 4.13 2025-9

设 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一列可测函数, 且存在 $g\in L^1(\mathbb{R})$ 使得对任意 n 都有

$$|f_n(x)|\le g(x)\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

现假设 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛到 f. 证明:

$$(1)\ f_n,f\in L^1(\mathbb{R}).\qquad (2)\ \|f_n-f\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0.$$

Proof. (1) 对每个 n, 由

$$|f_n|\le g\in L^1$$

立刻得到 $f_n\in L^1$.

再证 $f\in L^1$. 因为 $f_n\to f$ 依测度, 可取子列 f_{n_k} 使得

$$f_{n_k}\to f\quad \text{a.e.}$$

由

$$|f_{n_k}|\le g\quad \text{a.e.}$$

取极限得

$$|f|\le g\quad \text{a.e.}$$

故 $f\in L^1(\mathbb{R})$.

(2) 首先注意到任意子列 $\{f_{n_k}\}$. 由依测度收敛, 可再取子子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$ 使得

$$f_{n_{k_j}}\to f\quad \text{a.e.}$$

并且

$$|f_{n_{k_j}}-f|\le|f_{n_{k_j}}|+|f|\le 2g\in L^1.$$

由控制收敛定理,

$$\|f_{n_{k_j}}-f\|_{L^1}\to 0.$$

若原序列不满足

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0,$$

则存在 $\varepsilon > 0$ 和子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1} \geq \varepsilon, \qquad \forall k.$$

但上面已证明该子列有一个子子列在 L^1 中收敛到 f, 矛盾.

因此

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0.$$

□

Remark. 这个题就是上次习题课所讲的子列方法, 实际上做起来是平凡的. 小故事是, 去年小测了这个题, 考试考的也是这个题, 周民强书上有这个题, 但是证法不是这个, 只留下一句 “下述证法虽繁, 但习之也不无益处” 的抽象注记 (见书 P157). 最后这题得分率似乎很低, 感觉很有喜剧色彩.

4.3 2024mid

Problem 4.14 2024-1

叙述 $[a, b]$ 中 Lebesgue 可测函数的定义, 并解释为何在 Lebesgue 积分论中必须引入可测函数的概念。

Proof. 定义: 函数 $f : [a, b] \to [-\infty, +\infty]$ 称为 Lebesgue 可测, 如果对任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in [a, b] : f(x) > t\}$$

是 Lebesgue 可测集. 等价地, 对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$, 原像

$$f^{-1}(U)$$

都是可测集.

评分标准的意思是, 你应该准确指出考虑的 σ-代数 (值域上考虑 Borel σ-代数, 定义域考虑 Lebesgue σ-代数), 不应该笼统或者错误地说考虑什么可测集.

言之有理即可, 比如说, 积分是通过简单函数逼近构造的, 必须有可测函数的定义才能让积分良定.

□

Problem 4.15 2024-2

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 是单调增加的连续函数, 而且既是单射又是满射, 则 $[a, b]$ 中任意 Lebesgue 可测子集在 f 映照下的原像必是 Lebesgue 可测集。

Proof. 该说法错误.

下面给出反例. 设 F 为标准 Cantor 函数, 定义

$$T(x) = \frac{x + F(x)}{2}, \qquad x \in [0, 1].$$

则 T 是严格递增连续双射, 从而是 $[0, 1]$ 上的单调增加连续同胚. 记

$$h := T^{-1}.$$

由 Cantor 函数的标准性质, $T(C)$ 具有正测度, 其中 C 为标准 Cantor 集. 取一个不可测集

$$A \subset T(C).$$

令

$$E := h(A) = T^{-1}(A).$$

因为 $E \subset C$ 且 C 零测, 所以 E 是 Lebesgue 可测集.

但是

$$h^{-1}(E) = A,$$

而 A 不可测. 因此, 即便 h 是单调增加连续双射, 也存在可测集 E 使得其原像 $h^{-1}(E)$ 不可测.

故原命题为假.

□

Problem 4.16 2024-3

假设 $k \in \mathbb{N}$, $a_1^k, \ldots, a_n^k, b_k \in \mathbb{R}$, 且

$$(a_1^k)^2 + \cdots + (a_n^k)^2 = 1.$$

定义

$$E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1^k x_1 + \cdots + a_n^k x_n = b_k\}.$$

证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

Proof. 每个 E_k 都是一个仿射超平面. 因为

$$(a_1^k, \dots, a_n^k) \neq 0,$$

所以 E_k 是真超平面, 特别地其 n 维 Lebesgue 测度为 0.

由次可加性, 可数并仍为零测, 故

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

而

$$m(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

当然也可以用 Baire 纲定理证明, 但要记清楚条件. 超平面是无处稠密集 (他是闭的, 而且余一维, 不可能有内点), 然后 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间, 用 Baire 纲就结束了. □

Problem 4.17 2024-4

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

由 Lebesgue 可积函数的定义出发, 证明该函数在 $\mathbb{R}$ 上不是 Lebesgue 可积函数。

Proof. 首先注意审题, 从定义出发就是要你写出定义. 25 年的第一题第二题也是这个道理.

Lebesgue 非负可测函数的积分定义为

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi\,dx : 0 \leq \varphi \leq f,\ \varphi \text{ 为简单可测函数}\right\}.$$

可积是指上述为有限值. Lebesgue 可积函数定义为 $f = f^+ - f^-$, f^+, f^- 都可积.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义简单函数

$$\varphi_n(x) = n^2 \chi_{(0,1/n)}(x).$$

显然 $0 \leq \varphi_n \leq f$, 因为当 $x \in (0, 1/n)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq n^2.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx \geq n, \qquad \forall n.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx = +\infty.$$

所以 f 不是 Lebesgue 可积函数. □

Problem 4.18 2024-5

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是非负有界可测函数, 证明

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \inf_{f\le\psi}\int_{[a,b]}\psi(x)\,dx,$$

其中 $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 取遍非负简单可测函数。

Proof. 这个题是要反向定义积分, 有界性保证了这个题是对的, 所以肯定会用到这个条件.

一方面, 若 ψ 是非负简单可测函数且 $f\le\psi$, 则由积分的单调性,

$$\int f \le \int \psi.$$

因此

$$\int f \le \inf_{f\le\psi}\int\psi.$$

另一方面, 由于 f 非负有界可测, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$\psi_n(x) = 2^{-n}\left\lceil 2^n f(x)\right\rceil.$$

则 ψ_n 是非负简单可测函数, 满足

$$f(x)\le\psi_n(x)\le f(x)+2^{-n}.$$

故

$$0\le\int\psi_n-\int f\le 2^{-n}(b-a)\to 0.$$

从而

$$\inf_{f\le\psi}\int\psi\le\int\psi_n\to\int f.$$

结合前面的反向不等式, 得

$$\int f = \inf_{f\le\psi}\int\psi.$$

□

Problem 4.19 2024-6

考虑函数列

$$\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \ldots, f_{n,1}, f_{n,2}, \ldots, f_{n,n}, \ldots\},$$

其中

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[(j-1)/n,\ j/n)}(x), \qquad j=1,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}.$$

说明该函数列是否在下列意义下收敛: 以测度收敛, 逐点收敛, 几乎处处收敛, 几乎一致收敛, 以及 L^1 收敛。

Proof. 这个题给出的序列是上次习题课所讲的打字机序列.

(1) 支集缩小, 当然依测度收敛到 0.

(2) 每次都是有限时间依次遍历 $[0,1)$, 每一点都不是逐点收敛.

(3) 不几乎处处收敛, 见 (2).

(4) 不几乎一致收敛, 不然有几乎处处收敛.

(5) 在 L^1 中收敛到 0. 若 $u_k = f_{n,j}$, 则

$$\|u_k\|_{L^1} = \int_0^1 f_{n,j}(x)\,dx = \frac{1}{n} \to 0.$$

故 $u_k \to 0$ 在 L^1 中成立. □

Problem 4.20 2024-7

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集合, 而且 E 是闭集, $m(E) = 1$, 则 E 必有内点。

Proof. 该说法错误.

考虑 Cantor-like set. 它是闭集, 没有内点, 同时其可以构造成任意给定的正测度, 特别可构造成

$$m(E) = 1.$$

于是 E 闭且 $m(E) = 1$, 但 $\mathrm{int}(E) = \varnothing$. □

Problem 4.21 2024-8

假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有限测度可测集. 函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \int_E \chi_{x+E}(y)\,dy.$$

证明 f 在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处连续。

Proof. 这题就是上次习题课所讲的平移连续性 (当然你用的时候应该证明, 上次习题课的证明其实非常简单3.20).

当然也可以不用平移连续性来写, 首先重写 $f(x)$ 如下. 用内正则性, 考虑紧集 $K \subset E$ 并且 $m(E \setminus K) < \epsilon$.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\chi_{x+E}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\chi_E(y-x)\,dy.$$

于是

$$f(0) = \int \chi_E(y)^2\,dy = m(E).$$

并且

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| &= \left|\int \chi_E(y)\big(\chi_E(y-x) - \chi_E(y)\big)\,\mathrm{d}y\right| \le \int |\chi_E(y-x) - \chi_E(y)|\,\mathrm{d}y \\
&= \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)|\,\mathrm{d}y + \int |\chi_K(y-x)|\,\mathrm{d}y + \int |\chi_K(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le 2\epsilon + \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

当 $|x| < \delta$, 我们有控制函数

$$|\chi_K(y-x) - \chi_K(y)| \le 2|\chi_{K+B(0,\delta)}(y)|.$$

因为 K 紧, 右端显然可积. 用控制收敛就有

$$\limsup_{x\to 0} |f(x) - f(0)| \le 2\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性就证明了连续性. □

Problem 4.22 2024-9

假设 $g:[0,1]\to[0,1]$ 是 Lebesgue 可测函数, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 并且 $f(0)\le f(1)$. 证明下列极限存在且属于区间 $[f(0),f(1)]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\big((g(x))^n\big)\,dx.$$

Proof. 因为 $0\le g(x)\le 1$, 所以对每个 x,

$$(g(x))^n\to\begin{cases}0, & g(x)<1,\\ 1, & g(x)=1.\end{cases}$$

故

$$f((g(x))^n)\to\begin{cases}f(0), & g(x)<1,\\ f(1), & g(x)=1.\end{cases}$$

记

$$A:=\{x\in[0,1]:g(x)=1\}.$$

则点态极限为

$$h(x)=f(0)\chi_{[0,1]\setminus A}(x)+f(1)\chi_A(x).$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 故有界, 从而

$$|f((g(x))^n)|\le\max_{t\in[0,1]}|f(t)|.$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f((g(x))^n)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx=f(0)(1-m(A))+f(1)m(A).$$

因为 $0\le m(A)\le 1$, 该值是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的凸组合, 所以属于区间 $[f(0),f(1)]$. □

Problem 4.23 2024-10

设 $\alpha>0$. 函数 $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$G(x)=\int_0^\infty e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\,dt.$$

证明: G 良好定义, 且 $G\in C^\infty(0,+\infty)$.

Proof. 先证良好定义. 固定 $x>0$.

当 $t\to\infty$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\le e^{-xt}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha}),$$

右边可积.

当 $t\to 0^+$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\le e^{-x/t}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha}),$$

而 $e^{-x/t}$ 比任意幂都衰减得更快, 故在 0 附近也可积. 所以 $G(x)$ 良好定义.

下面证可无限次求导. 固定紧区间

$$K=[a,b]\subset(0,\infty).$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 形式求导得

$$G^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^\infty (t + t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) \, dt.$$

只需证明可在积分号内逐次求导. 当 $x \in K$ 时,

$$(t + t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) \le (t + t^{-1})^k e^{-a(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}).$$

右边在 $(0, \infty)$ 上可积: 在 ∞ 处由 e^{-at} 控制, 在 0 处由 $e^{-a/t}$ 控制.

故由控制收敛定理, 可在积分号内任意次求导, 从而

$$G \in C^\infty(0, \infty).$$

$\square$

4.4 2023mid

Problem 4.24 2023-1

具体写出 Lusin 定理与 Egorov 定理, 无需给出证明.

Proof. Lusin 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f : E \to \mathbb{R}$ 为 a.e. 有限的可测函数等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集集 $F \subset E$, 使得

$$m(E \setminus F) < \varepsilon,$$

并且 $f|_F$ 连续.

Egorov 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $m(E) < \infty$, $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ 可测, 且

$$f_n \to f \quad \text{a.e. on } E.$$

等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $A \subset E$, 使得

$$m(E \setminus A) < \varepsilon,$$

并且 $f_n \to f$ 在 A 上一致收敛. □

Remark. 这两个定理的表述应该不唯一, 如果考到类似的题, 写出非平凡一侧就行了 (Littlewood 三原理中的方向). Lusin 定理可以写有限测度的版本, 感觉那个更常见, 当然结论中的闭集变成了紧集.

Problem 4.25 2023-2

写出 Borel-Cantelli 引理并证明.

Proof. 设 E_n 可测, 且 $\sum_n m(E_n) < \infty$, 那么

$$m(\limsup_n E_n) = 0.$$

直接计算就行

$$m(\limsup_n E_n) \le m(\bigcup_{n=N} E_n) \le \sum_{n=N} m(E_n) \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

□

Problem 4.26 2023-3

利用 Borel-Cantelli 引理证明 Egorov 定理.

Proof. 设 $m(E) < \infty$, 且 $f_n \to f$ a.e. 于 E. 任取 $\varepsilon > 0$.

对每个 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$E_{n,k} := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

由于 $f_n(x) \to f(x)$ a.e., 对几乎处处的 x, 对固定 k 都只有有限多个 n 使得 $x \in E_{n,k}$. 因而

$$m\Big(\limsup_{n\to\infty} E_{n,k}\Big) = 0.$$

所以可取整数 N_k, 使得

$$m\Big(\bigcup_{n\ge N_k} E_{n,k}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令

$$A := E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N_k} E_{n,k}.$$

则

$$m(E \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

现在证在 A 上一致收敛. 任取 $\delta > 0$, 取 k 使得 $2^{-k} < \delta$. 若 $n \geq N_k$, 则由 A 的定义知

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k} < \delta, \qquad \forall x \in A.$$

故 $f_n \to f$ 在 A 上一致收敛. 这就是 Egorov 定理. □

Remark. 其实我没感觉到哪里用了 B-C 引理, 可能在几乎处处收敛的等价刻画中用到了, 没啥感觉.

Problem 4.27 2023-4

设 $\{f_n\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列. 证明 $\{f_n\}$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是作业原题. 收敛点集可写成

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m,n \geq N} \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

对固定的 k, m, n, 集合

$$A_{k,m,n} := \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

是闭集, 因为 $f_m - f_n$ 在闭集 F 上连续.

所以

$$\bigcap_{m,n \geq N} A_{k,m,n}$$

仍是闭集, 再对 N 作可数并得到 F_σ 集, 最后对 k 作可数交, 得到 $F_{\sigma\delta}$ 集.

故收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$. □

Problem 4.28 2023-5

K 是课上构造的不可测集. 证明 K 的任意可测子集均是零测集.

Proof. 设 $A \subset K$ 可测. 若 $m(A) > 0$, 则由 Steinhaus 定理,

$$A - A$$

包含 0 的某个开邻域. 特别地, $A - A$ 包含某个非零有理数 q.

于是存在 $x, y \in A$ 使得

$$x - y = q \in \mathbb{Q}.$$

但 $A \subset K$, 而 K 是模 $\mathbb{Q}$ 的代表元集合, 故同一等价类中只能取一个点. 于是必有 $x = y$, 从而 $q = 0$, 矛盾.

所以 $m(A) = 0$. □

Remark. 这个是往年习题课讲过的题目. ~~但是 Steinhaus 定理我没怎么用过, 所以也就没讲.~~

Problem 4.29 2023-6

举例说明依测度收敛不一定几乎处处收敛.

Proof. 考虑打字机序列,

$$f_{n,k}(x) = \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}(x).$$

写太多次就不写了. □

Problem 4.30 2023-7

写出 Cantor 函数的具体表达式, 并利用 Cantor 函数构造 $[0,1]$ 上的一个同胚, 使得某个可测集的原像不是可测集.

Proof.

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}\right) \xlongequal{x_n=0,2} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

现在定义

$$T(x) := \frac{x + F(x)}{2}, \qquad x \in [0,1].$$

之前说过了这个是一个同胚, 并且 $m(T(C)) = \frac{1}{2}$. 这时因为 $m(T([0,1] \setminus C)) = \frac{1}{2}$(非 C 上的点关于 F 局部常值, 然后被线性部分压缩). 令 $h := T^{-1}$, 取 $N \subset T(C)$ 不可测, 那么 $E = h(N)$ 零测, 但是 $h^{-1}(E) = N$ 不可测. □

Problem 4.31 2023-8

证明单调函数是可测函数.

Proof. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单调不减. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合

$$E_a := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$$

必是一个开区间, 闭区间, 半开区间, 空集或全体 $\mathbb{R}$ 中的一种, 总之它是 Borel 集. □

Problem 4.32 2023-9

函数列 $\{f_i\}$ 依测度 Cauchy, 证明它依测度收敛.

Proof. 依测度 Cauchy 的定义是: 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

取递增子列 n_k, 使得

$$\mu\left(\left\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > \epsilon\right\}\right) < 2^{-k}.$$

由 Borel-Cantelli 引理, 有 $f_{n_k} \to f$ a.e., 特别地, $f_{n_k} \to f$ 依测度.

现在证明整个序列 $f_n \to f$ 依测度. 任取 $\varepsilon > 0$. 由依测度 Cauchy 性, 可取 K 使得当 $n \geq n_K$ 时,

$$\mu\left(\left\{|f_n - f_{n_K}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \eta.$$

再由 $f_{n_K} \to f$ 依测度, 对充分大的 K 还可使

$$\mu\left(\left\{|f_{n_K} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \eta.$$

于是对 $n \geq n_K$,

$$\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset \left\{|f_n - f_{n_K}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|f_{n_K} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

故

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) < 2\eta.$$

由 η 任意, 得 $f_n \to f$ 依测度. □

Problem 4.33 2023-10

证明 $\mathbb{R}$ 上可测函数构成的集合的势为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Proof. 先证下界. 取标准 Cantor 集 C. 因为 $m(C) = 0$, 所以 C 的任意子集都 Lebesgue 可测. 而 C 的子集个数为

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

每个可测集 E 给出一个可测特征函数 χ_E, 故可测函数总数至少为 $2^{\mathfrak{c}}$.

再证上界. 一个实值可测函数 f 由所有集合

$$\{x : f(x) > q\}, \qquad q \in \mathbb{Q}$$

唯一确定. Lebesgue 可测集的总数不超过 $2^{\mathfrak{c}}$, 因为它们都是 $\mathbb{R}$ 的子集. 因而可测函数总数不超过

$$(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

综上, $\mathbb{R}$ 上可测函数全体的势恰为

$$2^{\mathfrak{c}}.$$

□

4.5 2022mid

Problem 4.34 2022-1

设 A, B 是两个集合. 若 $|A| \le |B|$ 且 $|B| \le |A|$, 证明 $|A| = |B|$.

Proof. Cantor-Bernstein 定理, ~~感觉还是没必要想它.~~ 想看解答的自己看 PPT, 这个我讲不明白. □

Problem 4.35 2022-2

Lebesgue 零测集是否一定是 Borel 集. 说明理由.

Proof. 不一定.

设 C 为标准 Cantor 集. 则 $m(C) = 0$, 因而 C 的任意子集都是 Lebesgue 可测且零测. 但是 C 的子集总数为

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

另一方面, $\mathbb{R}$ 中 Borel 集的总数只有 $\mathfrak{c}$. 因此不可能 C 的每个子集都是 Borel 集. 于是存在零测集不是 Borel 集.

这个题也有别的论证办法, 就是之前 Cantor 函数同胚那个题, 那里把不可测集打到了零测集, 这个零测集一定不是 Borel 集, 不然拉回后还是可测的. □

Problem 4.36 2022-3

假设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$, 证明

$$\limsup_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x) = \chi_{\limsup_{k\to\infty} E_k}(x).$$

Proof.

$$\limsup_k \chi_{E_k}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{E_k\}\ \text{i.o.} \Leftrightarrow x \in \limsup_k E_k \Leftrightarrow \chi_{\limsup_k E_k}(x) = 1.$$

□

Problem 4.37 2022-4

设 C 是标准 Cantor 集. 函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义如下: 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$; 当 x 落在第 n 次去掉的长为 3^{-n} 的区间时, $f(x) = 1/n$. 利用特征函数的加法, 乘法, 极限运算表示函数 f, 并说明 f 是否可测.

Proof. 记 D_n 为 Cantor 构造中第 n 次删去的区间之并. 则 D_n 是有限个开区间的并, 从而是 Borel 集. 且这些 D_n 两两不交, 并满足

$$[0,1] = C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x).$$

因为每个 χ_{D_n} 可测, 有限和可测, 极限也可测, 故 f 可测.

更具体地, 令

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x),$$

则 f_N 可测且

$$f_N(x) \to f(x).$$

故 f 可测. □

Problem 4.38 2022-5

构造一个 Lebesgue 不可测集, 并证明它不可测.

Proof. 进行一个背诵 (无慈悲). 取 $[0,1]$ 上关于等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

的一个代表元集合 V.

若 V 可测, 对每个有理数 $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, 令

$$V_q = (V + q).$$

则不同的 q 对应的 V_q 两两不交, 且

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + q) \subset [-1,2].$$

由平移不变性, 若 V 可测, 则每个 $V + q$ 可测且测度与 V 相同.

若 $m(V) = 0$, 则可数并仍为零测, 不可能覆盖 $[0,1]$. 若 $m(V) > 0$, 则

$$\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V_q) = +\infty,$$

而这些集合都包含在有限测度集 $[-1,2]$ 中, 矛盾.

故 V 不可测. □

Problem 4.39 2022-6

设 $A \subset \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. 若对任意开区间 (a,b), 均存在开区间列 I_n, 使得

$$A \cap (a,b) \subset \bigcup_n I_n, \qquad \sum_n m(I_n) < \alpha(b-a).$$

求证 $m(A) = 0$.

Proof. 反设 $m(A) > 0$, 且不妨设 $m(A) < \infty$. 由外正则性, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset A$, 使得

$$m(G) < m(A) + \varepsilon.$$

把 G 写成互不相交开区间之并

$$G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

对每个 (a_j, b_j), 由题设, 存在开区间列 $\{I_{j,k}\}_{k \geq 1}$ 使得

$$A \cap (a_j, b_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{j,k}) < \alpha(b_j - a_j).$$

于是

$$A \subset \bigcup_{j,k} I_{j,k},$$

从而

$$m(A) \leq \sum_{j,k} m(I_{j,k}) < \alpha \sum_j (b_j - a_j) = \alpha m(G) < \alpha(m(A) + \varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得

$$m(A) \leq \alpha m(A).$$

因 $0 < \alpha < 1$, 只能有 $m(A) = 0$, 矛盾.

写完解答发现 A 可测, 那直接用标准的密度定理就完事了. □

Problem 4.40 2022-7

设 $\{\varphi_k\}$ 是全体有理系数多项式列, $\varphi_0 = 0$, $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. 证明: 对 $[a, b]$ 上的可测函数 f, 存在加括号的方法使得

$$f = (f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots \quad \text{a.e.}$$

Proof. 由作业题4.4可知, 任意可测函数 f 都可以用一列有理系数多项式 φ_{n_j} 在 a.e. 意义下逼近, 即存在严格递增整数列 n_j, 使得

$$\varphi_{n_j}(x) \to f(x) \quad \text{a.e.}$$

现在按这些指标加括号:

$$(f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots.$$

由于 $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, 每一块都望远镜相消:

$$f_{n_{j-1}+1} + \cdots + f_{n_j} = \varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}.$$

于是前 N 块的和为

$$\sum_{j=1}^{N} (\varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}) = \varphi_{n_N}.$$

令 $N \to \infty$, 得

$$\varphi_{n_N}(x) \to f(x) \quad \text{a.e.}$$

所以上述加括号后的级数 a.e. 收敛到 f. □

Problem 4.41 2022-8

令 f 是 $[0, 1]$ 上的光滑非线性函数, $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$. 证明

$$m(\Gamma + \Gamma) > 0.$$

其中

$$\Gamma + \Gamma := \{u + v : u, v \in \Gamma\}.$$

Proof. 定义

$$F : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(s, t) = (s + t,\ f(s) + f(t)).$$

则

$$F([0, 1]^2) = \Gamma + \Gamma.$$

其 Jacobian 矩阵为

$$DF(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(s) & f'(t) \end{pmatrix},$$

故

$$\det DF(s, t) = f'(t) - f'(s).$$

因为 f 非线性, 所以 f' 不是常数. 因而存在 s_0, t_0 使得

$$f'(t_0) \neq f'(s_0),$$

即

$$\det DF(s_0, t_0) \neq 0.$$

由反函数定理, 存在 (s_0, t_0) 的邻域 U, 使得 $F(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 特别地,

$$F(U) \subset \Gamma + \Gamma$$

且 $F(U)$ 非空开, 因而其 Lebesgue 测度正:

$$m(\Gamma + \Gamma) \geq m(F(U)) > 0.$$

□

Remark. 这个为什么是实分析考题呢?

Problem 4.42 2022-9

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

且在一个正测集上有界. 证明 f 是线性函数.

Proof. 这个是 PPT 原题. 如果学过泛函, 应该可以意识到这里就是要做原点连续性, 那就是去蹭 Steinhaus 定理.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, $m(E) > 0$, 且存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in E.$$

由 Steinhaus 定理, $E - E$ 含有 0 的某个邻域 $(-\delta, \delta)$.

任取 $h \in (-\delta, \delta)$, 可写成 $h = x - y$, 其中 $x, y \in E$. 故

$$|f(h)| = |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq f(y)| \leq 2M.$$

所以 f 在 0 的某个邻域内有界.

下面证连续性. 任取 $\varepsilon > 0$, 选 n 大使得 $2M/n < \varepsilon$. 若 $|x| < \delta/n$, 则 $|nx| < \delta$, 从而

$$|f(x)| = \frac{1}{n}|f(nx)| \leq \frac{2M}{n} < \varepsilon.$$

故 f 在 0 连续, 从而由可加性知 f 在每点连续.

连续可加函数必为线性函数. 令 $c = f(1)$, 则对有理数 q 有

$$f(q) = cq.$$

由连续性推广到全体实数, 得

$$f(x) = cx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Problem 4.43 2022-10

证明局部 Lipschitz 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 将零测集映成零测集.

Proof. 去年习题课讲过这个题, 往年题有所以之前没讲. 思路其实很清楚, 局部性可以紧化, 然后 Lipschitz 相当于容许线性拉伸, 但是零测集就是小方体覆盖, 小方体拉伸还是小的.

设 $N \subset \mathbb{R}$ 是零测集. 对每个整数 m, 在紧区间

$$K_m = [m, m + 1]$$

上, f 是 Lipschitz 的, 设 Lipschitz 常数为 L_m.

令

$$N_m := N \cap K_m.$$

因为 N_m 零测, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取开区间列 $\{I_{m,j}\}_{j\geq 1}$ 覆盖 N_m, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}(1+L_m)}.$$

由于 f 在 K_m 上是 L_m-Lipschitz, 每个 $f(I_{m,j} \cap K_m)$ 的长度至多为 $L_m|I_{m,j}|$(用直径的定义想想, 高维就是用直径来处理的). 因而

$$m(f(N_m)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(f(I_{m,j} \cap K_m)) \leq L_m \sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}}.$$

于是

$$m(f(N)) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} m(f(N_m)) < \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}} \leq 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 任意, 得 $m(f(N)) = 0$. □

4.6 2021mid

Problem 4.44 2021-1

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集的定义.

Proof. (同 25mid14.5)

设 m^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为 Lebesgue 可测集, 如果对任意 $A \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

这就是 Carathéodory 可测性判据.

等价地, E 可测当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得

$$m^*(G \setminus E) < \varepsilon.$$

再等价地, 任一 Lebesgue 可测集都可写成

$$E = B \cup N,$$

其中 B 是 Borel 集, N 是零测集的子集. 因而所有 Borel 集都 Lebesgue 可测, 且 Lebesgue 可测集族是 Borel σ-代数的完备化. □

Problem 4.45 2021-2

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中的 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理, 并用 Fatou 引理证明 Lebesgue 控制收敛定理.

Proof. 上次习题课讲过了. 注意有一侧不能直接用 Fatou 引理, 都应该用比较函数来做.

Fatou 引理: 若 $f_n \geq 0$ 可测, 则

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Lebesgue 控制收敛定理: 若 $f_n \to f$ a.e., 且存在可积函数 g 使得

$$|f_n| \leq g \quad \text{a.e. for all } n,$$

则 f 可积, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx.$$

下面用 Fatou 引理证明控制收敛定理.

由 $|f_n| \leq g$ 和 $f_n \to f$ a.e., 得 $|f| \leq g$ a.e., 因而 f 可积.

对非负函数列 $g + f_n$, 由 Fatou 引理得

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n).$$

因为 $\liminf (g + f_n) = g + f$, 所以

$$\int g + \int f \leq \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

即

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

再对非负函数列 $g-f_n$ 用 Fatou 引理,

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g-f_n) \le \liminf_{n\to\infty}\int (g-f_n).$$

由于 $\liminf(g-f_n)=g-f$, 得

$$\int g - \int f \le \int g - \limsup_{n\to\infty}\int f_n,$$

即

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n \le \int f.$$

合并两式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

最后, 由 $|f_n-f|\to 0$ a.e. 且 $|f_n-f|\le 2g$, 再对 $|f_n-f|$ 应用上面已经证明的积分收敛结论, 得

$$\int |f_n-f|\,dx \to 0.$$

证毕. □

Problem 4.46 2021-3

设 $E\subset\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测的, 且 $m(E)<\infty$. 记 $L(E,\mathbb{R})$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数模去 a.e. 相等得到的等价类. 对任意 $f,g\in L(E,\mathbb{R})$, 定义

$$d(f,g)=\int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,dx.$$

证明: $f_n,f\in L(E,\mathbb{R})$, 则 f_n 依测度收敛到 f 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0.$$

Proof. 记

$$\phi(t)=\frac{t}{1+t},\qquad t\ge 0.$$

则 ϕ 单调增加, 且 $0\le\phi(t)\le 1$. 此时我们有 $\{|f_n-f|>\epsilon\}=\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\}$.

先证必要性, 其实是拆积分.

$$\begin{aligned} d(f_n,f)&=\int_E \phi(|f_n-f|)=\int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)+\int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)\le\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)\\ &\le m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\})+m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)\le\phi(\epsilon)\})\phi(\epsilon)\\ &\le m(E\cap\{|f_n-f|>\epsilon\})+m(E)\phi(\epsilon).\end{aligned}$$

再证充分性, 其实是直接放缩.

$$d(f_n,f)=\int_E\phi(|f_n-f|)\ge\int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)\ge\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)\ge\frac{\epsilon}{1+\epsilon}m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)\ge\phi(\epsilon)\}).$$

□

Problem 4.47 2021-4

f 为 $(0,1)$ 上可积的实值函数, 且满足 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=A\in\mathbb{R}$. 证明:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)x^n\,dx=0,\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n\,dx=A.$$

Proof. (a) 因为对 $x \in (0,1)$, 有 $x^n \to 0$, 且

$$|f(x)x^n| \le |f(x)| \in L^1(0,1),$$

由控制收敛定理,

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx \to 0.$$

(b) 写成

$$n\int_0^1 f(x)x^n\,dx = n\int_0^1 (f(x)-A)x^n\,dx + A\,n\int_0^1 x^n\,dx.$$

而

$$A\,n\int_0^1 x^n\,dx = A\frac{n}{n+1} \to A.$$

故只需证

$$n\int_0^1 (f(x)-A)x^n\,dx \to 0.$$

任取 $\varepsilon > 0$. 由 $f(x) \to A$ 当 $x \to 1^-$, 存在 $\delta \in (0,1)$, 使得当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时,

$$|f(x)-A| < \varepsilon.$$

于是

$$n\left|\int_0^1 (f-A)x^n\,dx\right| \le n\int_0^{1-\delta} |f-A|x^n\,dx + n\int_{1-\delta}^1 |f-A|x^n\,dx.$$

对第一项, 因为 $x^n \le (1-\delta)^n$,

$$n\int_0^{1-\delta} |f-A|x^n\,dx \le n(1-\delta)^n \int_0^{1-\delta} |f-A|\,dx \to 0.$$

对第二项,

$$n\int_{1-\delta}^1 |f-A|x^n\,dx \le \varepsilon\,n\int_{1-\delta}^1 x^n\,dx \le \varepsilon\,n\int_0^1 x^n\,dx = \varepsilon\frac{n}{n+1} \le \varepsilon.$$

先令 $n \to \infty$, 再令 $\varepsilon \to 0$, 得所求.

故

$$n\int_0^1 f(x)x^n\,dx \to A.$$

□

Problem 4.48 2021-5

用换元 $x = \alpha t$ 计算

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}}.$$

Proof. 令 $x = \alpha t$, 则

$$I_\alpha := \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}} = \int_0^1 \frac{\alpha\,dt}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos\alpha}}.$$

对固定 $t \in [0,1)$, 用 $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, 得

$$\cos(\alpha t) - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2}(1-t^2) + o(\alpha^2).$$

故

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos\alpha}} \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

下面给出一个可积控制. 注意

$$\cos(\alpha t)-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha(1+t)}{2}\sin\frac{\alpha(1-t)}{2}.$$

当 α 充分小时, 两个正弦的自变量都落在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 由 $\sin u\geq\frac{2}{\pi}u$, 得

$$\cos(\alpha t)-\cos\alpha\geq 2\cdot\frac{\alpha(1+t)}{\pi}\cdot\frac{\alpha(1-t)}{\pi}=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}(1-t^2).$$

因此

$$0\leq\frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t)-\cos\alpha}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

而 $(1-t^2)^{-1/2}$ 在 $(0,1)$ 上可积, 故由控制收敛定理,

$$\lim_{\alpha\to0^+}I_\alpha=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Problem 4.49 2021-6

记 $\mathbb{Q}=\{r_n\}$ 为所有有理数. 定义 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{4^k|x-r_k|}, & x\notin\mathbb{Q},\\ +\infty, & x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

证明

$$m(\{x\in\mathbb{R}:f(x)>1\})<\infty.$$

Proof. 感觉很像去年期末的题目, 不过去年期末好像是不等式的放缩机制和紧性论证, 和这个题不太一样. 这个题可能有点不好想, 但是不妨先想想这个级数什么时候还能被控制, 应该会想到 $\sum_{k=0}\frac{1}{2^k}=1$. 那我们可以去比较一下我们有的东西和这个级数的区别, 就得到如下做法.

设

$$E:=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>1\}.$$

若对某个 x 有

$$|x-r_k|\geq2^{-k},\qquad\forall k\geq1,$$

则

$$\frac{1}{4^k|x-r_k|}\leq\frac{1}{4^k\cdot2^{-k}}=\frac{1}{2^k}.$$

于是

$$f(x)\leq\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{2^k}=1.$$

所以若 $f(x)>1$, 则必存在某个 k 使得

$$|x-r_k|<2^{-k}.$$

因此

$$E\subset\bigcup_{k=1}^\infty\left(r_k-2^{-k},r_k+2^{-k}\right).$$

从而

$$m(E)\leq\sum_{k=1}^\infty2^{1-k}=2<\infty.$$

证毕. □

Problem 4.50 2021-7

设 G 为 $\mathbb{R}$ 的加法真子群, 且 G 是 Lebesgue 可测的. 用 Steinhaus 定理证明 $m(G)=0$.

Proof. 加法群结构和之前那个线性函数的题目4.42是不是有点像, 其实做法也是类似的.

反证. 若 $m(G)>0$, 则由 Steinhaus 定理, 集合

$$G-G=\{x-y: x,y\in G\}$$

包含 0 的某个开邻域. 但因为 G 是加法子群, 有

$$G-G=G.$$

故 G 含有某个开区间 $(-\delta,\delta)$.

于是对任意 $x\in\mathbb{R}$, 取整数 n 充分大使得 $x/n\in(-\delta,\delta)\subset G$. 由子群性质,

$$x=n\cdot(x/n)\in G.$$

这说明 $G=\mathbb{R}$, 与 G 为真子群矛盾.

故只能有 $m(G)=0$. 证毕. □