1 第五次习题课讲义

1.1 作业答案

Problem 1.1 P189.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足

$$\int_E f(x)\,dx = 0,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 实分析经典问题, 用反证法也是一样的. 下面直接做.

$$E = \bigcap_n E_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \cup \underbrace{N}_{\text{null set}}.$$

那么有

$$0 = \int_E f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} m(E_n) \Rightarrow m(E_n) = 0 \Rightarrow m(E) = 0.$$

□

Remark. 为啥有同学用简单函数逼近来做呢, 不觉得麻烦吗?

Problem 1.2 P143.9

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) \leq f(x) \quad (x \in E; k = 1, 2, \cdots),$$

则对于 E 的任一可测子集 e, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_e f_k(x)\,dx = \int_e f(x)\,dx.$$

Proof. "用不了 DCT 就试试 Fatou."

$$\int_e f dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_k \int_e f_k\,\mathrm{d}x \leq \limsup_k \int_e f_k\,\mathrm{d}x \leq \int_e f\,\mathrm{d}x.$$

为什么还有人用 DCT 做, 我已急哭. □

Problem 1.3 P149.3

若 $f \in L(E)$, 则

$$m\big(\{x \in E:\ |f(x)| > k\}\big) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \to \infty).$$

Proof. 这个就是 Chebyshev 不等式,

$$m(\{|f| > k\}) \leq \int_{|f|>k} \frac{|f|}{k}\,\mathrm{d}x \leq \frac{||f||_1}{k} = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{as } k \to \infty.$$

□

Remark. 有同学似乎担心用到 Fubini, 但是我们这里不是证明分布函数 (那个当然要 Fubini), 只要证明 Chebyshev 不等式就行了, 概率论中叫 Markov 不等式.

Problem 1.4 P159.4

设 $f \in L(E)$, 记

$$E_k = \{x \in E :\ |f(x)| < 1/k\},$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|\, dx = 0.$$

Proof. 直接用 DCT 就行,

$$\lim_k \int_{E_k} |f|\,\mathrm{d}x = \lim_k \int |f|\chi_{E_k}\,\mathrm{d}x \xlongequal{|f|\chi_{E_k}\le|f|} \int |f|\chi_{\{|f|=0\}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Problem 1.5 P190.9

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E \subset [0,1]$, $m(E) = t$, 有

$$\int_{[0,t]} f(x)\, dx \le \int_E f(x)\, dx.$$

Proof. 直观上是显然的, 但是要写清楚需要具体算一算. 记 $[0,t] = A$,

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[0,t]} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(x)(\chi_E - \chi_A)\,\mathrm{d}x \\
&= \int f(x)(\chi_{E\setminus A} - \chi_{A\setminus E})\,\mathrm{d}x \\
&\ge [f(\inf(E\setminus A)) - f(\sup(A\setminus E))]m(E\setminus A) \ge 0.
\end{aligned}$$

□

Problem 1.6 P159.3

设 $f \in L^1((0,+\infty))$, 试证明函数

$$g(x) = \int_{[0,\infty)} \frac{f(t)}{x+t}\, dt$$

在 $(0,+\infty)$ 上连续.

Proof. 注意细节, 首先积分本身良定 (这个最好提一下). 只要证明内闭连续即可, 然后对 $x > 0$, 考虑 $x_n \to x$, 当 n 充分大, 用 $\frac{2|f(t)|}{x}$ 当控制函数用 DCT 即可. □

Problem 1.7 P160.6

设 $f_k \in L^1(E)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < +\infty$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx.$$

Proof. 这是数分题. 将积分如下放缩即可

$$\left| \int_E (f - f_n) \right| \le m(E) \sup_x |f_n(x) - f(x)|.$$

□

Problem 1.8 P190.10

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明

$$\lim_{|y|\to\infty} \int_{E+\{y\}} |f(x)|\, dx = 0.$$

Proof. 用 $|f|$ 做控制函数即可. □

Problem 1.9 P190.12

设 $f \in L(\mathbb{R})$, $a > 0$, 试证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + n\right)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S \in L^1([0,a])$.

Proof. 经典交换次序题, 往年考过类似方法. 首先将级数在 $[0,a]$ 上积分, 用 MCT 交换次序.

$$\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|f\left(\frac{x}{a} + n\right)\right| \mathrm{d}x \overset{\text{换元}}{=\!=\!=} a||f||_{L^1} < \infty.$$

这就说明级数几乎处处有限 (也就是几乎处处绝对收敛). 良好定义后, 看出级数周期性是显然的. □

Problem 1.10 P191.13

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $p > 0$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 感觉是实分析特色习题, 先去考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} f(nx).$$

良定性就像1.9一样, 去积分交换次序.

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} f(nx)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-p} f(nx)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{换元}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+p)} ||f||_{L^1} < \infty.$$

然后用级数收敛的性质就做完了.

不少同学先积分再用 B-C 引理, 这个当然没问题, 而且其实是比较自然的想法, 但是这样做似乎无法让大家记住~~(背诵)~~求和这个技巧? 大家复习往年题可能就知道是什么了. □

Problem 1.11 P191.14

设 $x^s f(x)$, $x^t f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积, 其中 $s<t$, 试证明积分

$$\int_{[0,+\infty)} x^u f(x)\,dx, \quad u \in (s,t)$$

存在且是 $u \in (s,t)$ 的连续函数.

Proof. 这类权重问题可以想想谁在哪是主导项, 我们不难设计出控制函数

$$x^s|f(x)|\chi_{x<1} + x^t|f(x)|\chi_{x\geq 1}.$$

然后用 DCT, 存在性和连续性就都出来了. □

Problem 1.12 P191.15

设 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的正值可测函数. 若存在常数 c, 使得

$$\int_{[0,1]} (f(x))^n\,dx = c \quad (n = 1,2,\cdots),$$

试证明存在可测集 $E \subset (0,1)$, 使得 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$. 再问: 若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

Proof. 首先证明 $f \leq 1$ a.e., 这个就是标准的拆测度证明 (参考1.1), 考虑 $E_k \coloneqq \{f \geq 1 + \frac{1}{k}\}$, 代入条件对 n 取极限就知道 E_k 零测, 再对 k 取极限就得到了上界.

现在再来处理下界, 拆成 $\{f<1\}$ 和 $\{f=1\}$ 就行, 代入条件取极限得到 $c = m(\{f=1\})$, 然后令 $n=1$ 说明另一块几乎处处为零. 也就是说, $f(x) = \chi_{\{f=1\}}$.

至于不是非负的情况, 考虑 f^2 说明 $f^2 = \chi_E$, 然后令 $n=1,2$ 拆开来就行了, 结论是一样的. □

Problem 1.13 P191.16

设 $f \in L^1([0,1])$, 试证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} n \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) dx = 0$$

$(\ln(1+x^2) \leq x,\ x \geq 0)$.

Proof. 把提示里的不等式带进去用 DCT 就行, 几乎处处收敛到零是显然的 (因为可积函数几乎处处有限). □

Problem 1.14 P191.17

设 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, $f \in L^1(E_k)$ $(k=1,2,\cdots)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Proof. 注意到 $f\chi_{E_k} \to f\chi_E$, 用 $|f|\chi_{E_1}$ 控制就行. □

Problem 1.15 P191.18

设 $f \in L^1(E)$, 且 $f(x) > 0$ $(x \in E)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f(x))^{1/k}\,dx = m(E).$$

Proof. 可积函数几乎处处有限, 将 f 拆成

$$f = f\chi_{\{f\geq 1\}} + \chi_{\{f<1\}}$$

后分开使用 MCT 即可. □

Problem 1.16 P191.19

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,dx,$$

试证明对 $[0,1]$ 的任一可测子集 E, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Proof. 题目有误! 若加上 f 可积, 那么用标准的子列方法. 反证, 存在 E 使得子列 f_{n_k} 没有积分收敛, 那么考虑子子列 (用原本的下标), 有

$$\int f = \lim_n \int f_n \geq \liminf_n \int_E f_n + \liminf_n \int_{E^c} f_n \overset{\text{Fatou}}{\geq} \liminf_n \int_E f_n + \int_{E^c} f$$

$$\Rightarrow \int_E f \geq \liminf_n \int_E f_n \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f.$$

这样就导出了矛盾, 可以想想 $\liminf$ 的等价定义. 这里体现我们在用 f 可积性的地方是, 我们将 E^c 上的积分减掉了, 如果 f 不可积, 这一步是不对的. 当然也可以用期中考试参考答案的写法, 这里只是给大家提供不同的书写方式.

如果造反例, 我们考虑让函数整体质量爆破, 且在局部有依测度收敛但不 L^1 收敛的机制, 比如我们考虑

$$f_n = \frac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},1]} + n\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}.$$

那么在 $E(\frac{1}{2},1)$ 上结论就不对了. 我想这样就把这道题的两面都讲清楚了. □

Problem 1.17 P192.20

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) = 0$. 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}\,dx \leq M \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx = 0.$$

Proof. 考虑控制函数 $F(x) = \sup_k f_k$, 这是可积的, 用条件 +MCT 即可. 然后 DCT, 结束了. □

Problem 1.18 P192.21

(依测度收敛型的 Fatou 引理) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x)\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,dx.$$

Proof. 书上题目打错了. 做法是子列方法, 取出 $\liminf$ 子列, 然后用 Riesz+Fatou 即可. 之前习题课讲过. □

Remark. 简单的题目答案就简写了, 如果需要及时反馈, 也可以给出完整过程.

Problem 1.19 P189.3

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E$,

$$m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

使得极限

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

Proof. 也许有同学想用 Egorov 来做, 但是这个定理有一个问题在于, 你无法控制丢掉的集合的位置 (期中考试就有同学犯过这个错误, Egorov 一般只能给到一个测度估计, 不能直接给出更多的刻画), 因此还是用 Fatou 引理来做. 用 Fatou 引理需要几乎处处收敛来过渡, 而这里本质上是一个依测度收敛的条件 (算是这个题的本质观察), 所以这本质还是一个子列方法的问题, 那就是一个简单问题了. 用 Borel-Cantelli 引理 (或者你看出来依测度收敛), 那么有子列

$$\chi_{E_{n_k}} \to \chi_E \quad \text{a.e.}$$

然后用 Fatou 引理

$$\int f = \int \liminf f\chi_{E_{n_k}} \le \lim \int_{E_{n_k}} f < \infty.$$

这就证完了. □

Problem 1.20 P189.4

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数, 令

$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

若 $F \in L^1(\mathbb{R})$, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0.$$

Proof. 不要用 Fubini 定理, 这里 F 非负单增, 可积必须有 $F \equiv 0$, 那么 $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, 也就是 $\int f = 0$. □

Problem 1.21 P190.5

设 $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列. 若对任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_E f_k(x)\,dx \le \int_E f_{k+1}(x)\,dx,$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,dx = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx.$$

Proof. 这个实际上可以证明这个序列是几乎处处增的, 令 $E_k = \{f_k > f_{k+1}\}$, 那么

$$\int_{E_k} f_k \overset{\text{条件}}{\leq} \int_{E_k} f_{k+1} \overset{E_k}{<} \int_{E_k} f_k.$$

那么 $m(E_k) = 0.$, 然后零测集的可数并也是零测的, 最后用 MCT 即可. □

Problem 1.22 P190.8

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)|\,dx = 0,$$

试证明存在可测集 E, 使得

$$f(x) = \chi_E(x), \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. L^1 收敛推出依测度收敛, 用 Riesz 定理就说明子列 $\{\chi_{E_{n_k}}\}$ 几乎处处收敛到 f, 那就说明 f 几乎处处为 0 或 1. 令 $E = f^{-1}(1)$ 即可. □

Problem 1.23 P184.1

设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积, 试证明

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Proof. 这就是 Fubini 定理, 左边积分是在 $0 \leq y \leq x \leq 1$ 上, 右边积分也在 $0 \leq y \leq x \leq 1$ 上, 就证完了. 当然改写成 $\chi_{\{y\leq x\}}$ 也是一样的. □

Problem 1.24 P184.2

设 A, B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} m\left((A - \{x\}) \cap B\right)\,dx = m(A)\cdot m(B).$$

Proof. 这里的记号有点乱, 应该是指集合 $A - x$, 也就是平移, 而不是 setminus. 注意, 集合的交集可以用示性函数相乘刻画, 因此我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A-x}(y)\chi_B(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{Fubini}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A-x}(y)\chi_B(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(A)\int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(y)\,\mathrm{d}y = m(A)m(B).$$

□

Problem 1.25 P193.29

假设 $f(x), g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数并且 $m(E) < +\infty$, 若 $f(x)+g(y)$ 在 $E\times E$ 上可积, 试证明 $f(x), g(x)$ 都是 E 上的可积函数.

Proof. 由可积性, $f(x)$ 和 $g(y)$ 是几乎处处有限的, 用 slides 的 Fubini 定理, 就有对几乎处处的 y, $f(x)+g(y) \in L^1(E_y)$, 也就是 f 可积. 另一个同理. □

Problem 1.26 P193.30

计算下列积分:

$$\text{(i)} \quad \int_{x>0}\int_{y>0} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}; \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$$

Proof. 先算第一个积分, 先对 x 积分 (因为这个显然可积), 积分变为

$$\int_{x>0} \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(1+y)} \xlongequal{y=t^2} \pi\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

由第一个积分已经算出

$$J = \int_{x>0}\int_{y>0} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

先对 y 积分. 当 $x \neq 1$ 时, 裂项计算积分,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{\ln x^2}{x^2-1}.$$

所以

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2}{x^2-1}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{J}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$\square$

Problem 1.27 P193.31

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 若函数

$$F(x) = \int_E f(x-t)\,dt$$

在 $\mathbb{R}$ 上可积, 试证明 $f \in L^1$.

Proof. 直接积分,

$$\int F\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\int_E f(x-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_E\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = m(E)||f||_1 < \infty.$$

那么 $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

1.2 补充内容

1. 测度分解的例题 (为了简化描述, 以下三个例题考虑的测度都是有限测度)

Example 1.28 积分的 Hahn 分解

设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的正测度, $f \in L^1(\mu)$. 定义

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{M}.$$

证明

$$P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}, \qquad N = \{x \in X : f(x) < 0\}$$

给出 ν 的 Hahn 分解, 并且

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \qquad \nu^-(E) = \int_E f^- \, d\mu, \qquad |\nu|(E) = \int_E |f| \, d\mu.$$

Proof. 若 $A \subset P$, 则 $f \geq 0$ 于 A 上, 所以

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \geq 0.$$

若 $A \subset N$, 则 $f < 0$ 于 A 上, 所以

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \leq 0.$$

因此 (P, N) 是 ν 的 Hahn 分解. 令

$$\alpha(E) = \int_E f^+ \, d\mu, \qquad \beta(E) = \int_E f^- \, d\mu.$$

则 α, β 是正测度, 并且

$$\nu = \alpha - \beta.$$

又因为 f^+ 与 f^- 的支撑不相交, 所以 $\alpha \perp \beta$. 由 Jordan 分解的唯一性, 得到

$$\nu^+ = \alpha, \qquad \nu^- = \beta.$$

于是

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-,$$

即

$$|\nu|(E) = \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$

□

Remark. 这个题不会讲, 只是提供一个例子理解 Hahn 分解和 Jordan 分解.

Example 1.29 测度分解的应用

设 ν 是符号测度, 并且

$$\nu = \lambda - \eta,$$

其中 λ, η 是正测度. 证明

$$\lambda \geq \nu^+, \qquad \eta \geq \nu^-.$$

从而

$$|\nu| \leq \lambda + \eta.$$

进一步证明：若 $\lambda \perp \eta$, 则
$$\lambda = \nu^+, \qquad \eta = \nu^-.$$

Proof. 取 ν 的 Hahn 分解 $X = P \cup N$. 由 Jordan 分解的构造,
$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \qquad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$
因为 $\nu = \lambda - \eta$, 所以
$$\nu^+(E) = \lambda(E \cap P) - \eta(E \cap P) \le \lambda(E \cap P) \le \lambda(E).$$
因此 $\nu^+ \le \lambda$. 同理,
$$\nu^-(E) = \eta(E \cap N) - \lambda(E \cap N) \le \eta(E \cap N) \le \eta(E),$$
所以 $\nu^- \le \eta$. 于是
$$|\nu| = \nu^+ + \nu^- \le \lambda + \eta.$$

若进一步 $\lambda \perp \eta$, 则存在 $A \in \mathcal{M}$, 使得
$$\lambda(A^c) = 0, \qquad \eta(A) = 0.$$
于是当 $E \subset A$ 时,
$$\nu(E) = \lambda(E) \ge 0;$$
当 $E \subset A^c$ 时,
$$\nu(E) = -\eta(E) \le 0.$$
因此 (A, A^c) 是 ν 的 Hahn 分解. 于是
$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E),$$
并且
$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap A^c) = \eta(E \cap A^c) = \eta(E).$$
故
$$\lambda = \nu^+, \qquad \eta = \nu^-.$$

$\square$

Remark. 这个例子也很简单, 希望大家能记住 Jordan 分解是怎么来的. 同时注意, Hahn 分解不唯一, 但是能构造出唯一的 Jordan 分解.

Example 1.30 三角不等式

设 ν 是符号测度, ρ 是正测度. 证明以下两条件等价：
$$|\nu(E)| \le \rho(E), \qquad \forall E \in \mathcal{M},$$
和
$$|\nu| \le \rho.$$
并用此证明：若 ν_1, ν_2 是符号测度, 则
$$|\nu_1 + \nu_2| \le |\nu_1| + |\nu_2|.$$

Proof. 若 $|\nu| \le \rho$, 则对任意 $E \in \mathcal{M}$,

$$|\nu(E)| \le |\nu|(E) \le \rho(E).$$

反过来, 假设对任意 $E \in \mathcal{M}$ 都有

$$|\nu(E)| \le \rho(E).$$

用 Hahn 分解, $E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$, 那么

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \nu(E \cap P) - \nu(E \cap N) \le \rho(E \cap P) + \rho(E \cap N) = \rho(E).$$

故 $|\nu| \le \rho$. 现在令

$$\rho = |\nu_1| + |\nu_2|.$$

对任意 $E \in \mathcal{M}$,

$$|(\nu_1 + \nu_2)(E)| \le |\nu_1(E)| + |\nu_2(E)| \le |\nu_1|(E) + |\nu_2|(E) = \rho(E).$$

由刚才证明的等价性可得

$$|\nu_1 + \nu_2| \le \rho = |\nu_1| + |\nu_2|.$$

□

Remark. 这个例子是想让大家学会用分解定理处理全变差测度, 以后可能会学到不同的变差刻画, 但至少在这门课, 这样做是很简洁的.

2. Riesz 表示定理与 BV 函数刻画

这个部分介绍一下高维的 BV 函数, 目的是借此给出一些测度分解的例子. 事实上实分析是一个比较软的课程, 没有太多具体的计算, 也没有太多例子. 但数学学习是离不开例子的, 因此这里通过引入一些新概念, 给大家展示一些具体的东西. 没看懂没关系, 有点印象就很好了.

Definition 1.31 BV 函数

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $u \in L^1(\Omega)$. 定义

$$|Du|(\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x : \varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^n),\ |\varphi(x)| \le 1\right\}.$$

若 $|Du|(\Omega) < +\infty$, 则称 $u \in BV(\Omega)$.

若 u 足够光滑, 分部积分给出

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x.$$

所以这个定义不是凭空来的: 它是在问 "弱导数" 能不能被一个有限 Radon 测度控制住. 弱导数的定义上个学期讲过, 简单来说就是把导数丢到测试函数上, 这里不是考虑 Sobolev 函数, 所以也不用要求 L^1_{loc}.

Theorem 1.32 BV 的 Riesz 表示刻画

设 $u \in L^1(\Omega)$. 则 $u \in BV(\Omega)$ 当且仅当存在一个 $\mathbb{R}^n$-值有限 Radon 测度 Du 使得

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi \cdot dDu, \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

此时 $Du = (D_1 u, \cdots, D_n u)$ 正是 u 的分布意义导数, 而 $|Du|$ 是向量测度 Du 的全变差测度.

Proof. 证明实际上是 Riesz 表示的直接应用, 把如下泛函

$$\varphi \mapsto \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x$$

看成定义在测试向量场上的线性泛函. BV 条件正好说明这个泛函对 $\|\varphi\|_\infty$ 有界, 所以可以用 Riesz 表示定理把它写成 Radon 测度.

若 $u \in BV(\Omega)$, 定义

$$T(\varphi) = \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x.$$

由 $|Du|(\Omega)$ 的定义,

$$|T(\varphi)| \le |Du|(\Omega)\|\varphi\|_\infty.$$

因此 T 有界. 由 Riesz 表示定理 (这里跳过一个密度论证, 因为 Riesz 表示要求 C_c, 但是这里只有 C_c^1, 不过没什么关系), 存在一个 $\mathbb{R}^n$-值有限 Radon 测度 Du, 使得

$$T(\varphi) = -\int_\Omega \varphi \cdot dDu.$$

这正是

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi \cdot dDu.$$

反过来, 若这样的测度 Du 已经存在, 则对任意 $|\varphi| \le 1$,

$$\left|\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega \varphi \cdot dDu\right| \le |Du|(\Omega).$$

所以定义中的上确界有限, 即 $u \in BV(\Omega)$. □

现在把 Du 看成一个 Radon 测度, 就可以直接使用测度分解定理. 相对于 Lebesgue 测度作 LRN 分解,

$$Du = D_a u + D_s u, \qquad D_a u \ll dx, \qquad D_s u \perp dx.$$

由 Radon–Nikodym 定理, 存在 $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 使得

$$D_a u = \nabla u \, dx.$$

于是

$$Du = \nabla u \, dx + D_s u.$$

这里 $D_s u$ 就是导数里的奇异部分. 它可能是原子, 也可能是没有原子的奇异连续测度. 其实 LRN 分解应该有三个部分, 但是我忘了在哪本书上看到了, 感兴趣的同学自己搜吧.

Example 1.33 绝对连续部分

设 $u \in W^{1,1}(\Omega)$. 证明

$$Du = \nabla u \, dx, \qquad |Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| \,\mathrm{d}x.$$

Proof. 直观来看, Sobolev 弱导数本来就是 L^1 函数, 所以它给出的测度一定关于 Lebesgue 测度绝对连续. 这个其实就说明了, $W^{1,1}(\Omega) \subset BV$(这个在后面的 PPT 里是有的).

对任意 $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 弱导数定义给出

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x.$$

因此 $Du = \nabla u\, dx$. 进一步, 若 $|\varphi| \le 1$, 则

$$\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \varphi \, \mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x,$$

所以 $|Du|(\Omega) \le \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x$. 反向不等式可取

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)| + \epsilon}$$

再用 C_c^1 向量场逼近得到 (要保证定义良好). 令 $\epsilon \to 0$, 得

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x.$$

□

Example 1.34 跳跃给出的原子测度

设 $a < b$, $u = \chi_{(a,b)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 证明

$$Du = \delta_a - \delta_b, \qquad |Du| = \delta_a + \delta_b.$$

Proof. 这个例子其实比较简单, 因为我上个学期就讲过, Heaviside 函数 (在原点跳跃一次) 的弱导数是 δ, 这个就是分部积分的结果.

对任意 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$,

$$\int_\mathbb{R} u\varphi' \, \mathrm{d}x = \int_a^b \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a).$$

另一方面, BV 的积分分部公式为

$$\int_\mathbb{R} u\varphi' \, \mathrm{d}x = -\int_\mathbb{R} \varphi \, dDu.$$

对比知 $Du = \delta_a - \delta_b$. 由 Jordan 分解,

$$|Du| = |\delta_a - \delta_b| = \delta_a + \delta_b.$$

□

Example 1.35 Cantor 函数给出的奇异连续测度

令 $C(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, κ 为 Cantor 测度. 考虑同胚 $T(x) = \frac{1}{2}(x + C(x))$, 证明

$$m(T(C)) = \frac{1}{2}.$$

Proof. 这个是我们的一个经典例子, 之前的讲法是非常的意识流, 现在就能用比较严谨的语言来讲明白这件事. 在计算之前我们先提一下这个 Cantor 测度, 这个东西的存在不是偶然, 因为在之前的例子我们可以看到, 导数实际上刻画了测度的绝对连续部分, 然后跳跃是原子部分, 那么 Cantor 函数作为一个导数几乎处处为零且没有跳跃的函数, 他的导数必然作为奇异连续测度存在, 因此 κ 的存在是自然的, 具体定义用分部积分写出来就行了.

那么现在对 T 求导, 由导数的线性性, 导数为

$$DT = \frac{1}{2}(\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}\kappa).$$

求测度就是去积分, 而我们知道 $\mathrm{d}\kappa \perp \mathrm{d}x$, 那么

$$m(T(C)) = \frac{1}{2}\int_C \mathrm{d}\kappa + \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

□

最后, 我们引入 coarea 公式, 为后面的重排不等式做铺垫. 证明受限于前置内容有所省略, 好在这不是很本质的内容, 知道就行了.

Definition 1.36 有限周长集

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 且 $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, 则称 E 是有限周长集, 并定义

$$P(E) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n).$$

Example 1.37 光滑区域的周长测度

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界 C^1 区域, 外法向为 ν_E. 证明

$$D\chi_E = -\nu_E\, \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\partial E}, \qquad P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E).$$

这里的边界条件可以弱化到 Lipschitz, 不过要用 Rademacher 定理说明边界法向几乎处处存在, 省事就简化到 C^1.

Proof. 对任意 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x = \int_E \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

而 BV 的分部积分公式写成

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div}\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot dD\chi_E.$$

比较两式可得

$$D\chi_E = -\nu_E\, \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\partial E}.$$

由于 $|\nu_E| = 1$, 其全变差为

$$|D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1}\lfloor_{\partial E}.$$

因此 $P(E) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$. □

在这个基础上, 我们有 coarea 公式:

$$|Du|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\};\Omega)\,\mathrm{d}t.$$

所以 BV 函数的总变差可以理解为所有上水平集边界面积的积分. 这正是后面对称重排不等式背后的几何原因.

3. 对称重排不等式与变分案例

本节展示对称重排不等式在变分问题中的一个应用. 或许对称重排已经是比较古老的数学内容 (上世纪中叶), 但这不代表这个工具已经过时. 实际上在很多变分问题中, 对称性是自动出现的, 此时用重排不等式来刻画极小化子的性质是自然的.

Definition 1.38 集合的对称重排

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $|A| < +\infty$. 定义 A 的对称重排为以原点为中心、与 A 等测度的开球:

$$A^{\#} = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_n |x|^n < |A|\},$$

其中 $\omega_n = |B_1(0)|$. 显然

$$|A^{\#}| = |A|.$$

Definition 1.39 函数的对称递减重排

设 $f \geq 0$ 可测, 且对任意 $t > 0$, 上水平集 $\{f > t\}$ 都有有限测度. 定义

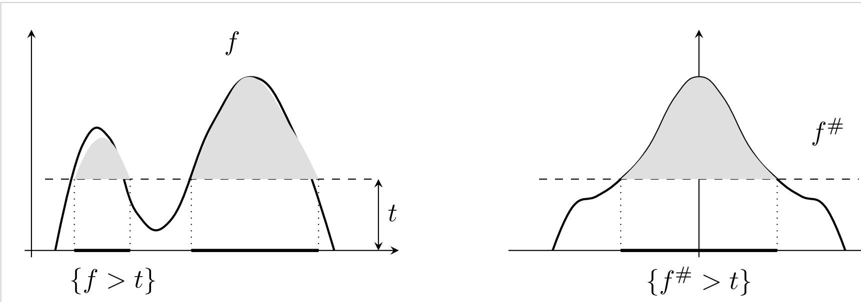
$$f^{\#}(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{y:f(y)>t\}^{\#}}(x)\,\mathrm{d}t.$$

也就是说, 对 f 的每一个上水平集先做集合的对称重排, 然后再把这些重排后的水平集叠起来.
等价地, 若

$$\lambda_f(t) = |\{x : f(x) > t\}|, \qquad f^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \lambda_f(t) \leq s\},$$

则

$$f^{\#}(x) = f^*(\omega_n |x|^n).$$



对称递减重排把每个上水平集换成等测度的中心球, 所以 $\{f > t\}$ 与 $\{f^{\#} > t\}$ 测度相同.

Proposition 1.40 对称递减重排的基本性质

设 $f, g \geq 0$ 可测, 且上水平集测度有限. 则:

1. 能量不变:
$$|\{f^{\#} > t\}| = |\{f > t\}|, \qquad t > 0,$$
从而对 $1 \leq p < +\infty$,
$$\|f^{\#}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

2. 保序性: 若 $f \leq g$, 则 $f^{\#} \leq g^{\#}$.

3. L^p 压缩性: 对 $1 \leq p \leq +\infty$, 有
$$\|f^{\#} - g^{\#}\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}.$$

Proof. 这里的第三点证明中我们只证明 L^1 和 L^2 的情况, 其中 L^2 的情况要用到1.41.

先证明等分布. 由定义,

$$|\{f^{\#} > t\}| = \lambda_f(t) = |\{f > t\}|.$$

再由 layer-cake 公式, 对 $p \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p\,\mathrm{d}x = p\int_0^{\infty} t^{p-1}|\{f > t\}|\,\mathrm{d}t.$$

把 f 换成 $f^{\#}$, 并用刚才证明的等分布性, 得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^{\#})^p\,\mathrm{d}x = p\int_0^{\infty} t^{p-1}|\{f^{\#} > t\}|\,\mathrm{d}t = p\int_0^{\infty} t^{p-1}|\{f > t\}|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} f^p\,\mathrm{d}x.$$

所以 $\|f^{\#}\|_p = \|f\|_p$.

若 $f \le g$, 则对每个 $t > 0$,

$$\{f > t\} \subset \{g > t\}.$$

于是

$$\lambda_f(t) \le \lambda_g(t),$$

从而

$$\chi_{\{f>t\}^\#}(x) \le \chi_{\{g>t\}^\#}(x).$$

对 t 积分得到 $f^\#(x) \le g^\#(x)$.

下面证明 L^1 压缩性. 对任意 $a, b \ge 0$,

$$|a - b| = \int_0^\infty |\chi_{\{a>t\}} - \chi_{\{b>t\}}| \,\mathrm{d}t.$$

用 Tonelli 定理,

$$\|f - g\|_1 = \int_0^\infty |\{f > t\} \triangle \{g > t\}| \,\mathrm{d}t.$$

对重排后的函数也有

$$\|f^\# - g^\#\|_1 = \int_0^\infty |\{f^\# > t\} \triangle \{g^\# > t\}| \,\mathrm{d}t.$$

而 $\{f^\# > t\}$ 和 $\{g^\# > t\}$ 都是同心球, 因此

$$|\{f^\# > t\} \triangle \{g^\# > t\}| = \big||\{f^\# > t\}| - |\{g^\# > t\}|\big|.$$

由等分布性,

$$\big||\{f^\# > t\}| - |\{g^\# > t\}|\big| = \big||\{f > t\}| - |\{g > t\}|\big| \le |\{f > t\} \triangle \{g > t\}|.$$

对 t 积分即得

$$\|f^\# - g^\#\|_1 \le \|f - g\|_1.$$

最后证明 L^2 的情形. 由 Hardy–Littlewood 不等式,

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \,\mathrm{d}x.$$

又由 L^2 范数保持,

$$\begin{aligned} \|f^\# - g^\#\|_2^2 &= \|f^\#\|_2^2 + \|g^\#\|_2^2 - 2\int f^\# g^\# \,\mathrm{d}x \\ &\le \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\int fg \,\mathrm{d}x = \|f - g\|_2^2. \end{aligned}$$

一般 L^p 压缩性可由同样的 layer-cake 思路推广到凸函数 $\Phi(a, b) = |a - b|^p$, 常称为 Hardy–Littlewood–Pólya 重排不等式. □

Theorem 1.41 Hardy–Littlewood 重排不等式

若 $f, g \ge 0$ 可测, 则在积分有意义时,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} f^\#(x) g^\#(x) \,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若 $V(x)$ 是径向递减的非负函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x) f(x) \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} V(x) f^\#(x) \,\mathrm{d}x.$$

Proof. 涉及函数重排, 我们首先要处理水平集的示性函数, 这个想法完全来自定义.

先看集合. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 可测且测度有限, $A^\#, B^\#$ 是与它们等测度的同心球. 则

$$|A \cap B| \le \min\{|A|, |B|\} = |A^\# \cap B^\#|.$$

这里最后一个等号是因为两个球同心, 小球包含在大球里.

对一般 $f, g \ge 0$, 由 layer-cake 公式,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>s\}}(x)\, ds, \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{g>t\}}(x)\, dt.$$

于是由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} fg \,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \int_0^\infty |\{f>s\} \cap \{g>t\}|\, dsdt \\ &\le \int_0^\infty \int_0^\infty |\{f>s\}^\# \cap \{g>t\}^\#|\, dsdt.\end{aligned}$$

又由重排的等分布性,

$$\{f>s\}^\# = \{f^\# > s\}, \qquad \{g>t\}^\# = \{g^\# > t\}.$$

再用一次 Tonelli 定理,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\{f^\# > s\} \cap \{g^\# > t\}|\, dsdt = \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \,\mathrm{d}x.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \,\mathrm{d}x.$$

若 V 是径向递减的非负函数, 则 $V^\# = V$. 在上式中取 $g = V$, 就得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} Vf \,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} Vf^\# \,\mathrm{d}x.$$

□

Theorem 1.42 Pólya–Szegő 不等式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有限测度开集, $\Omega^\#$ 是与 Ω 等测度的中心球. 若 $u \in H_0^1(\Omega)$, 则 $u^\# \in H_0^1(\Omega^\#)$, 且

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Proof. 这个证明需要使用余面积公式

$$\int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega \cap \{u=t\}} f(x) \frac{1}{|\nabla u|} \,\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

对于余面积公式, 同学们把他想象成扭曲的 Fubini 定理 (先在水平集上积分, 然后沿着水平集法向积分) 就行, 感觉直觉比其证明重要十倍甚至九倍, ~~这样学不会冯飞~~.

先设 $u \in C_c^1(\Omega)$, $u \ge 0$, 且几乎所有水平集都是正则的. 记

$$E_t = \{x : u(x) > t\}, \qquad A(t) = |E_t|.$$

由余面积公式,

$$-A'(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|}\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

对几乎处处的 t 成立. 同时

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, d\mathcal{H}^{n-1} \,\mathrm{d}t.$$

对每个这样的 t, Cauchy 不等式给出

$$P(E_t)^2 = \left(\int_{\{u=t\}} 1\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^2 \le \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, d\mathcal{H}^{n-1}\right)\left(\int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|}\, d\mathcal{H}^{n-1}\right).$$

因此

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u|\, d\mathcal{H}^{n-1} \ge \frac{P(E_t)^2}{-A'(t)}.$$

另一方面, $u^{\#}$ 的上水平集 $E_t^{\#} = \{u^{\#} > t\}$ 是球, 且 $|E_t^{\#}| = |E_t| = A(t)$. 对径向递减函数 $u^{\#}$, 上面的不等式取等号, 于是

$$\int_{\Omega^{\#}} |\nabla u^{\#}|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{P(E_t^{\#})^2}{-A'(t)}\,\mathrm{d}t.$$

由等周不等式,

$$P(E_t^{\#}) \le P(E_t).$$

所以

$$\int_{\Omega^{\#}} |\nabla u^{\#}|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_0^\infty \frac{P(E_t)^2}{-A'(t)}\,\mathrm{d}t \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

一般的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 可由 C_c^1 函数逼近得到, 这用到之前证明的重排的 L^2 压缩性. □

Theorem 1.43 Faber–Krahn 不等式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有限测度开集, $\Omega^{\#}$ 是与 Ω 等测度的中心球. 定义

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega),\, u\neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x}{\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x}.$$

那么有

$$\lambda_1(\Omega) \ge \lambda_1(\Omega^{\#}).$$

Proof. 取任意 $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 对 $|u|$ 作球对称递减重排. 等分布性给出

$$\int_{\Omega^{\#}} (u^{\#})^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x,$$

Pólya–Szegő 给出

$$\int_{\Omega^{\#}} |\nabla u^{\#}|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

因此 Rayleigh 商下降, 取下确界得

$$\lambda_1(\Omega) \ge \lambda_1(\Omega^{\#}).$$

也就是说, 同体积区域中球的第一 Dirichlet 特征值最小. □

这个就是椭圆特征值的等周不等式, 可以用来处理一些椭圆特征值问题, 比如彦老师 PDE2 讲义的问题 1.4.3, 当然那道题不应该这样做, 这个做法是因为 25 年的版本中的 hint 有些误导性.

下面给一个椭圆变分问题中的简单应用. 一般来说, 椭圆主特征值变分的极小化子的性质需要用到极值原理进行刻画, 学过上学期 PDE1 的同学应该有一定印象. 这里我们给出一个不同的处理方式, 思路来源于一个熟知的椭圆结论, "区域大小严格增加, 主特征值严格减少". 当然这个证明一般依赖极值原理, 是用极小化子加上比较原理来证明的 (这是上个学期的 PDE 作业), 我们这里的处理将展示完全不同的想法. 每个人的数学风格是不同的, 希望同学们可以在阅读不同证明的过程中逐渐形成自己的风格.

Example 1.44 奇性椭圆变分问题中的非负极小子~~(又一碟饺子醋)~~

令 $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $0 < \mu < 1/4$. 对 $w \in H_0^1(B)$ 定义

$$I[w] = \int_B |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x - \mu \int_B \frac{w^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x,$$

并设

$$\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(B) : \|w\|_{L^2(B)} = 1\}, \qquad \lambda_1(\mu) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

假设 $u \in \mathcal{A}$ 是极小子且 $u \geq 0$, 证明 $u > 0$.

$$I[u^{\#}] \leq I[u].$$

因此只要极小子存在, 就可以在非负函数中寻找极小子; 若需要, 还可以在非负径向递减函数中寻找.

这里的 $\mu < \frac{1}{4}$ 是来自 Hardy 不等式的最佳常数, 同学们把这个想成椭圆性能压制奇性就行.

Proof. 令 $u^{\#}$ 为 u 的球对称递减重排. 等分布性给出

$$\|u^{\#}\|_2 = \|u\|_2 = 1.$$

由 Pólya–Szegő 不等式,

$$\int_B |\nabla u^{\#}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_B |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x.$$

另一方面, $V(x) = |x|^{-2}$ 是径向递减的非负函数. 对 $f = u^2$ 使用 Hardy–Littlewood 重排不等式,

$$\int_B \frac{(u^{\#})^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \geq \int_B \frac{u^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x.$$

注意势能项前面是负号, 于是

$$I[u^{\#}] \leq I[u].$$

现在, 如果有 $|\{u = 0\}| \neq 0$, 那么就能找到球 B_r, 使得 $|B_r| = |\{u \neq 0\}|$, 那么就有

$$I[u] \geq I[u^{\#}] \xlongequal{\text{scaling, } u_r = \frac{1}{r} u^{\#}(x/r)} r^{-2} I[u_r] > I[u_r].$$

这就和极小化子矛盾了.

上面最后的处理意思是, 极小化子 u 如果有正测度为零, 那么我们就能用对称重排把他压缩到一个更小的球 B_r 上, 然后然后球的特征值比较是很容易的, 我们通过 scaling(这个 scaling 保持 L^2 能量) 将此时对称化后的极小化子放到球 B_1 上, 发现能量变小了 (集合大, 特征值小, 能量泛函最低点就是我们的特征值), 那就和之前的极小性矛盾了. $\square$