2 第六次习题课讲义

2.1 作业答案

Problem 2.1 P162.7

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, 且有 $E\subset(0,+\infty)$,

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

则

$$\int_E f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\neq 1.$$

Proof. 反证, 若等号成立, 那么

$$0=\int_E f(x)(1-\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

但 $f(x)(1-\cos x)\geq 0$, 所以 $f(x)(1-\cos x)=0$ a.e. 于 E. 注意 $\{x>0:\cos x=1\}$ 至多可数, 故 $1-\cos x>0$ a.e. 于 E, 从而 $f=0$ a.e. 于 E, 这就和 $\int_E f=1$ 矛盾. □

Problem 2.2 P162.8

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f_n\in L^1(\mathbb{R})$ $(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n^2}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

则

$$f_n(x)\to f(x),\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

Proof. 之前的习题课讲过 L^p 收敛推出 a.e. 收敛的证明, 这里是一样的道理. 对任意 $\epsilon>0$, 令

$$E_n^\epsilon=\{|f_n-f|>\epsilon\},$$

那么由 Chebyshev 不等式,

$$\sum_n m(E_n^\epsilon)\leq\frac{1}{\epsilon}\sum_n\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\epsilon}\sum_n\frac{1}{n^2}<\infty.$$

因此 $m(\limsup_n E_n^\epsilon)=0$. 这就证明了几乎处处收敛. □

Problem 2.3 P163.9

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n|<\ln n$ $(n=2,3,\cdots)$, 则

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^\infty a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

Proof. 这种问题一般是先取绝对值用 Tonelli, 说明这个积分是良定的, 然后再用 Fubini, 这个过程是标准的. 那么

$$\int_2^{+\infty}\sum_{n=2}^\infty|a_n|n^{-x}\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=2}^\infty(\ln n)\int_2^{+\infty}n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty n^{-2}<\infty.$$

所以可以逐项积分, 于是

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^\infty a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty a_n\int_2^{+\infty}n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^\infty\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

□

Problem 2.4 P163.10

设定义在 $E \times \mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足:

1. 对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ 是 E 上的可测函数;
2. 对每一个 $x \in E$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g \in L^1(E)$, 使得对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 有

$$|f(x,y)| \le g(x), \qquad \text{a.e. } x \in E,$$

则函数

$$F(y) = \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

Proof. 用 DCT. 任取 $y_k \to y$, 由关于 y 的连续性可知

$$f(x,y_k) \to f(x,y), \qquad x \in E.$$

同时由题设有统一控制 $|f(x,y_k)| \le g(x) \in L^1(E)$. 因此

$$F(y_k) = \int_E f(x,y_k)\,\mathrm{d}x \to \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = F(y).$$

由序列刻画连续性, F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. □

Problem 2.5 P192.32

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

若有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

试证明 $F \in L(\mathbb{R})$.

Proof. 由总积分为零, 当 $x > 0$ 时有 $F(x) = -\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. 因此

$$\int_0^{+\infty} |F(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

另一方面,

$$\int_{-\infty}^{0} |F(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (-t)|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

右端之和正是 $||xf||_{L^1}$, 故 $F \in L^1(\mathbb{R})$. □

Problem 2.6 P192.33

求

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx)\,\mathrm{d}x$$

的值.

Proof. 对 $x > 0$, $\arctan(nx) \to \frac{\pi}{2}$, 且

$$|\cos x \arctan(nx)| \leq \frac{\pi}{2} \cos x \in L^1 \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由 DCT,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

□

Problem 2.7 P192.34

设 $f \in L^1((0,a))$,

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \qquad (a > x > 0),$$

试证明 $g \in L^1((0,a))$, 且有

$$\int_0^a g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Proof. 还是标准的, 先证明可积性, 由 Tonelli 定理,

$$\int_0^a |g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^a \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = ||f||_{L^1(0,a)} < \infty.$$

于是可以用 Fubini 定理交换次序:

$$\int_0^a g(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(t)}{t} \int_0^t \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^a f(t) \, \mathrm{d}t.$$

□

2.2 补充内容

1. Hardy–Littlewood 极大函数

课上没有用极大函数这个内容来讲微分定理, 感觉是一种遗憾. 因此在这里补充这个内容. 注意, 这不是进阶内容, 而是标准的.

Definition 2.8 Hardy–Littlewood 极大函数

设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 定义 Hardy–Littlewood 极大函数

$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中上确界取遍所有包含 x 的球 $B \subset \mathbb{R}^d$.

这里采用的是非中心球版本. 一般看到的其他定义也是等价的, 因此不做赘述. HL 极大算子不是一个线性算子, 而是满足次线性性:

$$(f+g)^* \le f^* + g^*, \qquad (af)^* = |a| f^*.$$

这来自 sup 的三角不等式. 同时由定义立刻有

$$||f^*||_{L^\infty} \le ||f||_{L^\infty}.$$

其实次线性性不是很坏的事情, 因为我们有 Marcinkiewicz 插值定理, 恰好能处理次线性性算子的估计, 当然这里不会讲这个工具.

接下来我们用有限版的 Vitali 覆盖定理证明我们的 HL 极大函数 weak (1,1) 估计. 在证明之后, 我们将简单解释一下超水平集的意义, 一个可能的更好听的名字是尾概率.

Theorem 2.9 Hardy–Littlewood 极大函数的 weak (1,1) 估计

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$, 则

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \lambda\}) \le \frac{C_d}{\lambda} ||f||_{L^1}.$$

Proof. 记

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \lambda\}.$$

先取紧集 $K \subset E_\lambda$. 对每个 $x \in K$, 按定义可取球 $B_x \ni x$, 使得

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\,\mathrm{d}y > \lambda.$$

对这族球使用上面的 Vitali 覆盖引理, 得到两两不交的 $B_1, \cdots, B_N$, 且

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N 3B_j.$$

因而

$$m(K) \le \sum_{j=1}^N m(3B_j) = 3^d \sum_{j=1}^N m(B_j).$$

又因为每个 B_j 上的 $|f|$ 平均值都大于 λ,

$$m(B_j) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_j} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

由于 B_j 两两不交,

$$m(K) \leq \frac{3^d}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} \int_{B_j} |f(y)| \, \mathrm{d}y \leq \frac{3^d}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

最后对所有紧集 $K \subset E_\lambda$ 取上确界, 由 Lebesgue 测度的内正则性得到结论. □

Remark. 这里如果让同学们证明 E_λ 可测, 同学们不需要用很麻烦的办法. 因为这个 E_λ 实际上是一个开集, 用内点验证即可.

现在我们来讲讲这个尾概率的意义. 这里我们用的记号是

$$\lambda_f(t) = m(|f| > t).$$

一般空间上这个也不是概率, 不过我们就用这个词. 下面列举一些观念性的东西和一些小例子, 让大家简单感受一下超水平集的意义.

1. L^p 范数是尾分布的加权平均, layer-cake 公式给出

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) \, \mathrm{d}t.$$

   此时看 Chebyshev 不等式, 实际上在说, 当 L^p 可积, 超水平集应该有对应的衰减性.

2. 定义 $L^{p,\infty}$ 空间,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \, m\{|f| > \lambda\}^{1/p}.$$

   这个空间更大, 比如我们可以考虑

$$|x|^{-n/p} \notin L^p_{\mathrm{loc}}, \qquad |x|^{-n/p} \in L^{p,\infty}_{\mathrm{loc}}.$$

   这实际说明我们捕捉了一类临界奇性现象.

3. 尾概率能刻画集中 (concentration) 现象. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的序列

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n/p} \mathbf{1}_{B_\epsilon}(x).$$

   则

$$\|f_\epsilon\|_{L^p}^p = \epsilon^{-n} |B_\epsilon| \sim 1.$$

   而对于尾概率,

$$m\{|f_\epsilon| > \lambda\} = \begin{cases} |B_\epsilon|, & 0 < \lambda < \epsilon^{-n/p}, \\ 0, & \lambda > \epsilon^{-n/p}. \end{cases}$$

   在 PDE 中, 一个能量有限序列的弱收敛可能会多出一个因为集中产生的缺陷测度 (defect measure), 此时尾概率估计刻画了这里的结构.

4. 可以用超水平集, 将局部有界性转化为 "高的超水平集在有限时间后消失", 而我们又能用能量估计刻画超水平集的大小 (想想 Chebyshev 不等式), 这就是说, 我们居然能用能量估计导出逐点估计. 这算是 De Giorgi-Moser 迭代背后的内容.

5. De Gorigi-Moser 迭代, Calderón-Zygmund 奇异积分理论, 算子的端点估计, Lorentz 空间等都涉及这个概念.

6. 当然, 这个工具也有局限性. 回忆之前讲的弱收敛三种机制 (amplitude direction, physical-space direction, frequency direction), 前两个姑且能用超水平集相关的内容刻画, 最后一种机制实际被完全掩盖了, 比如在 L^2 空间中考虑 $u_n = \phi \, \mathrm{e}^{inx}$, 这里的弱收敛机制完全无法被超水平集和极大函数捕捉.

2. 用极大函数证明 Lebesgue 微分定理

Theorem 2.10 Lebesgue 微分定理

若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

更强地,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = 0$$

对几乎处处的 x 成立.

Proof. 先证明 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 的情形. 记

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

固定 $\alpha > 0$, 考虑坏集合

$$\Omega_\alpha = \left\{ x : \limsup_{r\to 0} A_r(|f-f(x)|)(x) > \alpha \right\}.$$

这里 $A_r(|f-f(x)|)(x)$ 的意思是

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y.$$

取 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 令 $h = f - g$. 因为 g 连续, 对每个 x 都有

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y)-g(x)|\,\mathrm{d}y = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} A_r(|f-f(x)|)(x) &\le \limsup_{r\to 0} A_r|h|(x) + |h(x)| \\ &\le h^*(x) + |h(x)|.\end{aligned}$$

因此

$$\Omega_\alpha \subset \{x : h^*(x) > \alpha/2\} \cup \{x : |h(x)| > \alpha/2\}.$$

由 weak (1,1) 估计和 Chebyshev 不等式,

$$m(\Omega_\alpha) \le \frac{C_d}{\alpha} ||h||_{L^1}.$$

现在使用 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 可以让 $||h||_1 = ||f-g||_1$ 任意小, 所以 $m(\Omega_\alpha) = 0$.

对 $\alpha = 1, 1/2, 1/3, \cdots$ 取并集, 得到

$$\limsup_{r\to 0} A_r(|f-f(x)|)(x) = 0$$

对几乎处处的 x 成立. 这就证明了较强形式, 普通的平均值收敛由三角不等式立刻推出.

L^1_{loc} 的情况其实类似, 因为微分定理本身也只是局部性质, 乘一个截断即可. □

Remark. 证明中一个比较好懂的写法应该是, A_r 是线性算子, f^* 是这个算子的极限. 为了引入小性, 我们可以把 $A_r(f)$ 写成

$$A_r(f) = A_r(f-g) + A_r(g) - g + g - f.$$

如果知道 LDT, 要证明第二个结论, 一般的证法是考虑考虑有理数 q, 然后去估计

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,\mathrm{d}y + |f(x)-q| = 2|f(x)-q| \quad \text{a.e.}$$

3. 卷积型极大函数

介绍过 HL 极大函数后, 我们来介绍另一种极大函数, 我们称之为卷积型极大函数. 在具体讲解前, 我们简单说明他的地位. 对于 HL 极大函数, 从定义来看, 他丢失了抵消 (cancellation) 上的信息, 只保留了比较粗糙的尺度信息 (可以想想为什么). 但当我们想要获得更精细的估计时, 我们必然不能把本身振荡相消的部分随意丢掉, 因此我们去考虑卷积极大函数, 抓住抵消结构, 这也是调和分析的入口之一.

现在定义卷积型极大函数

$$M_\Phi(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} |(f * \Phi_\epsilon)(x)|.$$

这里 $\Phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\Phi(x/\epsilon)$, $\int \Phi \, \mathrm{d}x = 1$. 这里不妨假设 $\Phi \in \mathcal{S}$, 低正则性也可以用, 但为了做推广 (这里不会讲怎么做) 还是考虑好核.

Theorem 2.11 卷积型极大函数的点态控制

$$M_\Phi(f) \lesssim f^*(x)$$

对所有局部可积的 f 成立.

Proof. 固定 $\epsilon > 0$. 由绝对值估计,

$$|(f * \Phi_\epsilon)(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| \, |f(x-y)| \, \mathrm{d}y.$$

把积分区域分成 $B(0,\epsilon)$ 和二进环带

$$A_k(\epsilon) = \{y : 2^k\epsilon \le |y| < 2^{k+1}\epsilon\}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

在 $B(0,\epsilon)$ 上,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\epsilon)} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| \, |f(x-y)| \, \mathrm{d}y &\le \epsilon^{-d} \sup_{|z|<1} |\Phi(z)| \int_{B(x,\epsilon)} |f(u)| \, du \\ &\le C_d \sup_{|z|<1} |\Phi(z)| \, f^*(x).\end{aligned}$$

对第 k 个二进环带, 有

$$|\Phi(y/\epsilon)| \le \sup_{2^k \le |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)|.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{A_k(\epsilon)} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| \, |f(x-y)| \, \mathrm{d}y &\le \epsilon^{-d} \sup_{2^k \le |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)| \int_{|u-x|<2^{k+1}\epsilon} |f(u)| \, du \\ &\le C_d 2^{kd} \sup_{2^k \le |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)| \, f^*(x).\end{aligned}$$

把低频球和所有二进壳加起来, 得到

$$|(f * \Phi_\epsilon)(x)| \le C_d [\Phi]_{\mathrm{dyad}} f^*(x).$$

最后对 $\epsilon > 0$ 取上确界即可. □

Remark. 不难看出这个 Φ 其实要求不高, 只要

$$|\Phi(x)| \lesssim (1+|x|)^{-d-\delta}$$

即可. 个人感觉这个要求还挺常见的.

4. Hardy 不等式

介绍极大函数后, 接下来这个不等式感觉是用的最多的, 而且证明也完全只用到本科实分析, 因此放到这里讲.

Theorem 2.12 Hardy inequality

若 $1 < p \le \infty$, 则

$$||f^*||_{L^p} \le A_p ||f||_{L^p}.$$

Proof. $p = \infty$ 已经由定义证明过. 下面设 $1 < p < \infty$.

固定 $\lambda > 0$, 分解

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1 = f\chi_{\{|f| > \lambda/2\}}, \qquad f_2 = f\chi_{\{|f| \le \lambda/2\}}.$$

因为 $||f_2||_\infty \le \lambda/2$, 所以 $f_2^* \le \lambda/2$. 因而若 $f^*(x) > \lambda$, 由次线性必有 $f_1^*(x) > \lambda/2$. weak (1,1) 给出

$$m(\{f^* > \lambda\}) \le m(\{f_1^* > \lambda/2\}) \le \frac{C_d}{\lambda} \int_{\{|f| > \lambda/2\}} |f(y)| \, \mathrm{d}y.$$

用分布函数公式,

$$||f^*||_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{f^* > \lambda\}) \, d\lambda.$$

代入上面的分布估计, 再用 Tonelli 定理交换积分次序:

$$\begin{aligned} ||f^*||_p^p &\le C_{p,d} \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{|f(y)| > \lambda/2\}} |f(y)| \, \mathrm{d}y \, d\lambda \\ &= C_{p,d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_0^{2|f(y)|} \lambda^{p-2} \, d\lambda \, dy \\ &\le C_{p,d} ||f||_p^p. \end{aligned}$$

取 p 次方根即得结论. □

5. 停时论证与 Calderón–Zygmund 分解

最后介绍一下 CZ 分解这个工具, 其实本质是想给同学们展示一下停时论证这个东西, 但是只找到了这个相对简单的例子.

Theorem 2.13 Calderon–Zygmund 分解

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$, 那么有如下分解

$$f = g + b,$$

满足:

1. $|g| \lesssim \lambda$
2. b 支撑在两两不交的方体 $\{Q_k\}$ 上, 且 $\int_{Q_k} b = 0$.
3. $E = \bigcup Q_k$, $m(E) \lesssim \frac{1}{\lambda} ||f||_1$.

Proof. 用停时论证, 因为函数 L^1, 考虑

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \le \lambda$$

总能对充分大的二进方体族成立. 现在开始停时, 要么这个不等式一直成立, 要么在有限时间后找到子方体 Q', 使得

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f > \lambda.$$

对于这样的子方体, 有如下基本几何观察

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f \le 2^d \lambda.$$

现在把所有停时给出的方体求并, 得到集合 E, 在集合 E 上, 由定义, 有

$$f^* > \lambda.$$

那么用 weak (1,1) 估计, 给出

$$m(E) \leq |\{f^* > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1.$$

现在我们构造 g 和 b,

$$g = f\chi_{E^c} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j} \quad b = (f - f_{Q_j})\chi_{Q_j}.$$

很明显我们可以分块来看, 用 LDT, 可见 $|g| \leq \lambda$, b 支撑在 Q_j 上且有抵消性质. 同时我们根据构造不难看出 g 和 b 都是 L^1 的. □

上课看情况决定讲不讲 Stieltjes 积分, 暂时不写了, 要是讲了会在期末合集里发出来的.