

3 第七次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P192.22

试证明

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \cos 2xt \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proof. 这个题和实分析关系不大, 一种方法是记住 Gaussian 是 Fourier 变换的不动点 (会差一个系数, 看你背哪个定义), 另一种方法是分部积分解 ODE. 这里展示第二种方法. 令

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{2itx} \, dx.$$

对某个 t , 取 $2|x|e^{-x^2}$ 为导数的控制函数, 然后 DCT 得到积分号下求导. 又由分部积分,

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_{\mathbb{R}} 2ixe^{-x^2} e^{2itx} \, dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} (e^{-x^2})' e^{2itx} \, dx = -2tJ(t). \end{aligned}$$

这里边界项为零. 因此 $J(t) = J(0)e^{-t^2} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$. 取实部并注意虚部是奇函数积分, 得

$$2 \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xt \, dx = \sqrt{\pi}e^{-t^2}.$$

□

Problem 3.2 P192.23

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(x) \, dx \leq \int_E f_{k+1}(x) \, dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. 这题的条件和之前一个作业题一样. 先证单调性, 在

$$A_k = \{x : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$$

用第一个条件, 可得 $f_k(x)$ 关于 k 递增.

令 $F(x) = \lim_k f_k(x)$. 对任一可测集 E , 由 MCT 作用于 $f_k - f_1 \geq 0$ 可得

$$\int_E (F - f_1) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_k - f_1) \, dx = \int_E (f - f_1) \, dx.$$

因而对任一可测集 E 都有

$$\int_E (F - f) \, dx = 0.$$

于是 $F = f$ a.e. 这就证明了 $f_k \rightarrow f$ a.e.

□

Problem 3.3 P192.24

设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \quad x \in E,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < +\infty.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 这个题就是广义 DCT, 之前习题课讲过. 这个技巧必须掌握! 考虑对 $g_k + f_k$ 和 $g_k - f_k$ 分别用 Fatou 引理即可. $\square$

Problem 3.4 P193.25

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D . 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

Proof. 由 Lebesgue 定理, 只要证明 D 是零测集. 记 D' 为 D 的极限点集, 那么 D' 可列, $D \setminus D'$ 中的每个点都是 D 的孤立点. 对每个 $x \in D \setminus D'$, 可取有理端点区间 (p_x, q_x) 使得

$$x \in (p_x, q_x), \quad (p_x, q_x) \cap D = \{x\}.$$

不同的 x 对应的有理端点区间不能相同, 所以 $D \setminus D'$ 至多可列. 因此 D 可列, 从而 $m(D) = 0$. $\square$

Problem 3.5 P193.26

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

Proof. 记

$$L(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h).$$

因为这个极限处处存在, f 在 x 处不连续当且仅当 $f(x) \neq L(x)$. 对 $n \geq 1$, 令

$$D_n = \{x \in [a, b] : |f(x) - L(x)| \geq 1/n\}.$$

下面说明 D_n 没有聚点. 若 $x_j \in D_n$, $x_j \rightarrow x_0$, 且 $x_j \neq x_0$, 由 $L(x_0)$ 的定义可知, 当 j 充分大时 $f(x_j)$ 接近 $L(x_0)$. 同时在 x_j 附近取足够小的去心邻域, 其中的函数值仍然接近 $L(x_0)$, 故 $L(x_j)$ 也接近 $L(x_0)$. 于是 $|f(x_j) - L(x_j)| < 1/n$, 矛盾.

因而每个 D_n 在紧区间 $[a, b]$ 中至多可数. 不连续点集

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

至多可数, 所以 $m(D) = 0$. 由 Lebesgue 定理, f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. $\square$

Problem 3.6 P193.27

设 $E \subset [0, 1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是

$$m(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0.$$

Proof. 在 $(0, 1)$ 内部, χ_E 的不连续点正好是 E 的边界点, 那么直接由 Lebesgue 定理就证完了. $\square$

Problem 3.7 P211.1

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L^1([a, b])$, 试问: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数吗?

Proof. 我们默认原函数逐点可导 (因为这个是完全数分的概念), 那么答案是不存在, 因为 Lebesgue 定理, 计算积分得到矛盾. $\square$

Problem 3.8 P211.2

设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$F'(x) > 0, \quad a \leq x \leq b.$$

试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数.

Proof. 本题有两种做法, 如果知道 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 的 precise representative (这说明 F 是绝对连续的), 那么直接用 N-L 公式即可. 具体为

$$H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t) dF(t).$$

任取 $c \in (a, b)$. 当 $x \neq c$ 时,

$$H(x) - H(c) = F(x)G(x) - F(c)G(c) - \int_c^x G(t) dF(t).$$

整理为

$$\frac{H(x) - H(c)}{x - c} = F(x) \frac{G(x) - G(c)}{x - c} - \frac{1}{x - c} \int_c^x (G(t) - G(c)) dF(t).$$

由连续性即可完成证明.

或者你知道 Stieltjes 积分, 那么 F 作为一个 NBV 函数, 可以实现为一个 Borel 测度, 也就是

$$F(x) - F(a) = \mu_F([a, x]).$$

那么只要证明 $\mu_F \ll m$. 利用 LRN 分解和密度定理, 对 $\mu_{F,s}$ -a.e. x , 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_F(x-r, x+r)}{2r} = F(x) < \infty.$$

这表明 $\mu_{F,s} = 0$, 那就完成了. $\square$

Problem 3.9 P241.2

设 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 试作 $[a, b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

Proof. 对每个 n , 定义

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \chi_{(x_n, b]}(x), & x_n < b, \\ \chi_{\{b\}}(x), & x_n = b. \end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi_n(x)$$

即可. $\square$

Problem 3.10 P241.3

设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的递增函数, $E \subset (a, b)$. 若对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $(a_i, b_i) \subset (a, b)$ ($i = 1, 2, \dots$), 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \quad \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \epsilon,$$

试证明

$$f'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

Proof. 这是 BV 函数 Lebesgue 定理的直接应用, 计算 E 上的积分后是显然的. □

Problem 3.11 P232.1

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续, 且有

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b],$$

则

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

Proof. 微积分基本定理, 这是显然的. □

Problem 3.12 P232.2

设 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上. 若有

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \quad x, y \in [a, b],$$

则

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

Proof. Lipschitz 蕴含绝对连续, 然后几乎处处可导, 按照定义求导就行. □

Problem 3.13 P232.3

设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[a, b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a, b]$ 上绝对连续.

Proof. 直接走定义可能会稍微麻烦, 我们可以考虑写成积分来做. 注意

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a).$$

积分有绝对连续性, 那么就做完了. □

Problem 3.14 P218.8

试证明 $f \in BV([a, b])$ 当且仅当存在 $[a, b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq F(x'') - F(x'), \quad a \leq x' < x'' \leq b.$$

Proof. 充分性是显然的, 因为变差能被 F 的变差控制, 而单增函数是有界变差的. 现在看必要性, 由 Jordan 分解, 有两个递增函数 f_1, f_2 满足

$$f = f_1 - f_2.$$

那么不难看出取控制函数为

$$F = f_1 + f_2$$

即可. □

Problem 3.15 P218.10

设 $f \in BV([a, b])$. 若有

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增.

Proof. 直接证明, 考虑 $a < x \leq y < b$, 那么有

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= V_a^b f \geq |f(b) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \\ &\geq |f(y) - f(x) - (f(b) - f(a))| + |f(y) - f(x)| \geq |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

这表明 $f(y) \geq f(x)$. □

Problem 3.16 P222.1

设 $E \subset [0, 1]$. 若存在 ℓ 满足 $0 < \ell < 1$, 使得对 $[0, 1]$ 中任意的子区间 $[a, b]$, 均有

$$m(E \cap [a, b]) \geq \ell(b - a),$$

试证明 $m(E) = 1$.

Proof. 这个题考虑示性函数 χ_E , 那么根据条件, 用 Lebesgue 微分定理, 那么

$$\chi_E \geq \ell \quad \text{a.e.}$$

这就是说 $m(E) = 1$. □

Problem 3.17 P222.2

对于 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问: $[0, 1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

Proof. $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. □

3.2 补充内容

这次的补充内容主要讲解一些习题, 帮助大家进行期末复习. 部分题目可能之前讲过类似的, 我想多讲几次对同学们也许有好处?

1. 收敛定理

这里讲三个方法, 一个是子列方法, 一个是比较函数, 还有一个是截断方法, 最后我们 recall 一下之前的一个经典题目.

Example 3.18 子列方法

(依测度收敛型的 Fatou 引理) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

Proof. 这里同学们还是要注意, 用 Fatou 的时候要保证函数是正的. 那么我们考虑 $\liminf$ 的定义, 首先找到子列 $\{f_{k_n}\}$, 使得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_{k_n} dx.$$

此时用 Riesz 定理, 我们对 $\{f_{k_n}\}$ 有几乎处处收敛的子列 $\{f_\ell\}$ (而且这个子列的极限正是 f), 那么就有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k dx = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_E f_\ell dx \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f dx.$$

□

Remark. 当然子列方法时常和反证法在一起使用, 同学们写作业的时候应该有所感受.

Example 3.19 比较函数方法

(广义 DCT) 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \quad x \in E,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < +\infty.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 这个地方的证明是考虑两个比较函数 $g_k - f_k$ 和 $g_k + f_k$ 分别用 Fatou 引理, 计算得到

$$\limsup_k \int f_k \leq \int f,$$

$$\liminf_k \int f_k \geq \int f.$$

那么就是

$$\lim_k \int f_k = \int f.$$

□

Remark. 从我改作业来看, 大部分同学已经领会到了这个方法. 唯一要注意的是, 对于上面第二个式子, 我们不能直接对 f_k 使用 Fatou 引理, 因为我们没有说 $f_k \geq 0$.

Example 3.20 截断方法

设 (X, μ) 是测度空间, $p > 1$, 且一族函数 $\{f_n\}$ 满足

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p} \leq C.$$

证明: 对任意 $M > 0$,

$$\sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \leq \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

从而

$$\sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \rightarrow 0, \quad M \rightarrow +\infty.$$

进一步, 如果 $\mu(X) < +\infty$, 则 $\{f_n\}$ 一致可积.

Proof. 在集合 $\{|f_n| > M\}$ 上, 有

$$|f_n| = |f_n|^p |f_n|^{1-p} \leq |f_n|^p M^{1-p}.$$

因此

$$\int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \leq M^{1-p} \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n|^p d\mu \leq M^{1-p} \|f_n\|_{L^p}^p \leq \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

令 $M \rightarrow +\infty$, 右边趋于 0, 这就给出了统一的尾部小性.

如果 $\mu(X) < +\infty$, 那么对任意可测集 E , 继续做截断:

$$\int_E |f_n| d\mu = \int_{E \cap \{|f_n| \leq M\}} |f_n| d\mu + \int_{E \cap \{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu.$$

于是

$$\int_E |f_n| d\mu \leq M\mu(E) + \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

先取 M 大, 使第二项小; 再取 $\mu(E)$ 小, 使第一项小. 这正是一致可积的定义. $\square$

Remark. 这个题某种意义上来说也不是什么截断方法, 截断方法是想说, 我们通过把尾部的一致小性丢掉, 得到了某种紧性, 而有紧性后我们自然大有可为. 这个题目中的有限测度部分部分传达了这一想法.

Example 3.21 Egorov 定理

设 $m(E) < \infty$. 设 $f_n \rightarrow 0$ a.e. in E , 并且存在 $p > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} \leq C.$$

证明

$$\|f_n\|_{L^1(E)} \rightarrow 0.$$

Proof. 对固定的 $\epsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset E$ 满足 $m(E \setminus A) < \epsilon$, 使得 $f_n \rightarrow 0$ on A , 然后我们直接拆积分

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| dx &= \int_A |f_n| dx + \int_{E \setminus A} |f_n| dx \\ &\leq m(A) \sup_A |f_n| + (m(E \setminus A))^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p. \quad (\text{用一致收敛和 Hölder 不等式}) \end{aligned}$$

然后前面用一致收敛到 0, 后面用 L^p 有界性加测度小性, 由于 ϵ 是任取的, 就完成了证明. $\square$

Remark. 这个题目之前讲过, 其实是实分析经典老题中为数不多要用 Egorov 的题目, 所以同学们题目做不出来的时候也不要乱用 Egorov, 实际上没有几个题要用这个东西.

2. 交换次序

对于交换次序来说, 我们总是会去尝试使用 Fubini 相关的定理, 不过这有时候需要一些观察. 同时同学们还要意识到 σ -有限也是 Fubini 的条件, 对一个不知名测度空间乱用定理可能无法得分.

Example 3.22 参数积分

设 $0 < a < b$. 证明

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}.$$

Proof. 这个题其实是数分题, 不过学了实分析会好写很多. 注意到

$$e^{-ax} - e^{-bx} = \int_a^b x e^{-tx} dt,$$

所以

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt.$$

现在被积函数非负, 可以直接用 Tonelli,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dt dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dx dt.$$

内层积分是

$$\int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t},$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

□

Example 3.23 余面积公式

设 $n \geq 2$. 利用余面积公式计算单位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 的面积, 即证明

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Proof. 这个题其实就是极坐标公式, 写成余面积公式只是想让大家去记一下这个定理的表述. 首先我们知道,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2} dx_j = \pi^{n/2}.$$

另一方面, 对函数 $u(x) = |x|$ 使用余面积公式 (逼真使用). 因为 $|\nabla u| = 1$ a.e., 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty \int_{\{|x|=t\}} e^{-t^2} d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt.$$

而

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{|x|=t\}) = t^{n-1} \sigma(S^{n-1}),$$

因此

$$\pi^{n/2} = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt.$$

最后换元 $s = t^2$, 有

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

代回去就得到

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

□

Example 3.24 平移相交

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ 可测, 且 $m(E_1), m(E_2) > 0$. 证明: 存在 $h \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

Proof. 不妨考虑有限测度, 因为我们的欧氏空间是 σ -有限的, 不然由

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_i \cap B_k(0))$$

可知存在可测集 $A_i \subset E_i$ 满足 $0 < m(A_i) < +\infty$.

现在考虑函数

$$F(h) = m(A_1 \cap (A_2 + h)).$$

用示性函数写出来就是

$$F(h) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \chi_{A_2}(x-h) dx.$$

因为被积函数非负, Tonelli 定理给出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(h) dh &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \chi_{A_2}(x-h) dx dh \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_2}(x-h) dh dx \\ &= m(A_1)m(A_2) > 0. \end{aligned}$$

所以 F 不可能处处为 0, 于是存在 $h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(A_1 \cap (A_2 + h)) > 0.$$

由于 $A_i \subset E_i$, 这就推出

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

□

Remark. 这个题是博资考和夏令营考试原题, 感觉大家还是要知道这个题目.

Example 3.25 弱 L^q 到强 L^p

设 $m(E) < +\infty$, f 可测. 假设存在 $q > 0$, $C > 0$, 使得对所有 $t \geq 1$,

$$m(\{|f| > t\}) \leq Ct^{-q}.$$

证明: 若 $0 < p < q$, 则

$$f \in L^p(E).$$

Proof. 这个题就是用分布函数来控制积分. 由 layer cake 公式,

$$\int_E |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt.$$

我们把右边拆成两段. 在 $0 < t < 1$ 上, 直接用 $m(\{|f| > t\}) \leq m(E)$, 得到

$$p \int_0^1 t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt \leq pm(E) \int_0^1 t^{p-1} dt = m(E).$$

而在 $t \geq 1$ 上, 由题设有

$$p \int_1^\infty t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt \leq pC \int_1^\infty t^{p-1-q} dt.$$

由于 $p < q$, 右边积分收敛. 因此

$$\int_E |f|^p dx < +\infty,$$

这就说明 $f \in L^p(E)$. □

Remark. 这个题目的是展示一下 Layer cake 公式的作用, 感觉大家还要记忆一下这个公式本身的证明.

3. 测度分解

测度分解通常来说是水题, 因为我们用 Hahn 分解和 Jordan 分解能解决大多数问题 (看之前的讲义), 这里补充一个不太平凡的题目, 来自有限正测度的 Fourier 变换, 可以在 Methods of Modern Mathematical Physics 的第二卷找到.

Example 3.26 构造测度

我们称函数 f 是正定的, 若其对任意 $N > 0$, $c_i \in \mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^N c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \geq 0.$$

可以证明, 若 ϕ 是非负可积函数, 那么有

$$\int f(x-y)\phi(x)\phi(y) dx dy \geq 0.$$

Proof. 一个错误的想法是, 将 ϕ 写成简单函数, 尝试后不难发现这样无法使用条件. 比较好的处理方式是, 将 ϕdx 理解为一个概率测度. 不考虑平凡情形, 我们设

$$\|\phi\|_1 = 1 \quad \phi(x) dx = d\nu(x).$$

那么 $d\nu$ 就是一个概率测度. 对于分布为 ν 的 i.i.d. X_i , 我们发现

$$\mathbb{E} \sum_{i,j} f(X_i - X_j) \geq 0.$$

展开, 我们注意到

$$\mathbb{E} f(X_i - X_i) = \int f(0) d\nu(x) \geq 0.$$

上面的 $f(0) \geq 0$ 是平凡的, 对条件考虑 $N = 1$ 即可. 我们还注意到

$$\mathbb{E} f(X_i - X_j) = \int f(x-y) d\nu(x) d\nu(y).$$

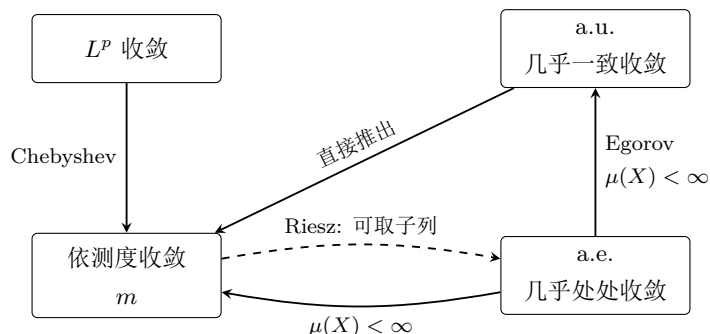
那么我们就得到了

$$0 \leq N\mathbb{E} f(0) + N(N-1) \int f(x-y) d\nu(x) d\nu(y).$$

两边除以 N^2 后令 $N \rightarrow \infty$ 就完成了证明. □

4. 收敛性

本来不想写这个内容, 但是还是放心不下.



反例:

- $m \not\Rightarrow L^p$ 用尖峰函数;
- $m \not\Rightarrow$ a.e. 用打字机序列;
- a.e. $\not\Rightarrow m$ 在无限测度空间中用 moving hump.

Example 3.27 Borel–Cantelli 引理

假设 $f \in L^2(0, +\infty)$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, +\infty).$$

Proof. 这个题似乎以前的答案里做法是直接写成级数然后在单位区间上积分, 但是这未免太技术性了. 我们实际上可以把这个题放回之前的 Borel–Cantelli 引理的框架里, a.e. 收敛理应用这个通用刻画.

观察题目, 我们知道其实只要考虑 $(0, 1]$ 区间. 那么我们现在固定 $\epsilon > 0$, 刻画里面的坏点. 令

$$A_n := \{x \in (0, 1] : |f_n(x)| > \epsilon\}, \quad \text{where } f_n(x) := f(x+n).$$

那么我们用 Chebyshev 不等式, 有

$$|A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

那么求和得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|f\|_2^2 < \infty.$$

那么在 $(0, 1]$ 上就证明了结论. 对每个 $(k, k+1]$ 同理, 最后取可数并即可. $\square$

Remark. 这个题是其实是往年题, 感觉作为例子还是很好的, 因为我记忆中这个题目大伙往往是直接写出级数然后交换次序做, 那个写法很简单但我总觉得不够自然. 如果有同学想用 Calderón–Zygmund 分解来做, 感觉是把两种不同的机制搞混了.

Example 3.28 振荡序列

若 $\lambda_n \rightarrow +\infty$, 则

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x) \text{ 存在}\right\}\right) = 0.$$

Proof. 设收敛集合为

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x) \text{ 存在} \right\}.$$

这个集合可测, 因为这是可测集的下限集. 定义

$$f = \chi_A \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x),$$

由上面的定义, 这个函数也是良定的.

对任意有限测度可测集 E , 由控制收敛定理和 Riemann–Lebesgue 引理,

$$\int_E f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} \sin(\lambda_n x) \, dx = 0.$$

因为这里 E 是任意的, 所以 $f = 0$ a.e.. 当然这里的信息还不够, χ_A 和振荡的信息耦合在一起了, 所以我们看 L^2 , 也就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} \sin^2(\lambda_n x) \, dx = \frac{1}{2} m(E \cap A).$$

但前面已经知道 $f = 0$ a.e., 所以左边也是 0, 从而

$$m(E \cap A) = 0.$$

最后令 $E = [-N, N]$, 再让 $N \rightarrow \infty$, 就得到 $m(A) = 0$. □

Remark. 这个是隔壁班的期中考试题, 讲这个题是因为 PPT 上的过程写的太乱了.

5. 微积分基本定理

这一节稍微补充一点常识, 因为 PPT 上有的结论没有证明. 我个人认为下面这个结论是可以直接用的, 除非要你证明这个东西.

Example 3.29 一维 Sobolev 代表元

设 $u \in W^{1,1}([a, b])$. 证明: 存在一个绝对连续函数 $\tilde{u} \in AC([a, b])$, 使得

$$u = \tilde{u}, \quad \text{a.e.}$$

并且

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x u'(t) \, dt.$$

进一步, 若原函数 u 本身连续, 则 $u = \tilde{u}$ 在每一点成立, 因此 $u \in AC([a, b])$.

Proof. 这个题就是一维 Sobolev 空间里的微积分基本定理. 令

$$v(x) = \int_a^x u'(t) \, dt.$$

那么 $v \in AC([a, b])$, 且 $v' = u'$ a.e.. 于是 $u - v$ 的弱导数为 0. 一维中弱导数为 0 的函数只能几乎处处为常数 (这个不是完全平凡的, 但如果你只考虑经典导数, 那就不存在任何问题), 因此存在常数 c , 使得

$$u(x) = c + v(x), \quad \text{a.e.}$$

现在定义

$$\tilde{u}(x) = c + \int_a^x u'(t) \, dt,$$

就得到 $\tilde{u} \in AC([a, b])$ 且 $u = \tilde{u}$ a.e.. 同时显然有

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x u'(t) \, dt.$$

最后, 如果 u 本身连续, 那么 $u - \tilde{u}$ 是连续函数, 且几乎处处为 0, 所以只能处处为 0. 这就说明 $u = \tilde{u}$ 在每一点成立. □

Example 3.30 一维 Sobolev 嵌入

设 $u \in W^{1,p}([a,b])$, 其中 $1 \leq p \leq \infty$. 证明 u 有绝对连续代表元, 并且当 $1 < p \leq \infty$ 时, 证明如下 Hölder 型估计:

若 $1 < p < \infty$, 则

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

若 $p = \infty$, 则

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Proof. 因为 $[a,b]$ 是有限区间, 所以 $L^p([a,b]) \subset L^1([a,b])$ 对 $1 \leq p \leq \infty$ 成立. 因此 $u \in W^{1,1}([a,b])$, 由上一个例题, u 有绝对连续代表元. 下面我们直接把这个代表元仍然记为 u .

对任意 $x, y \in [a,b]$, 不妨设 $x < y$. 由微积分基本定理,

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t) dt.$$

若 $1 < p < \infty$, 由 Hölder 不等式,

$$|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

若 $p = \infty$, 则直接估计

$$|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^\infty} |x - y|.$$

这就完成了证明. □

Remark. 这里必须要注意一个事, Cantor 函数不是 $W^{1,1}$ 函数, 千万不要搞错了! 这是因为 Cantor 函数的弱导数是 Cantor 测度 κ , 这是一个奇异连续测度, 不是 L^1 函数. 往年题里考虑的是经典导数, 所以和我们说的不是一个事情! 另一个值得注意的点是, 知道这两个结论后, 应该不难自行推导分部积分公式. 至于换元公式, 那个知道 Lebesgue 测度的仿射性质就行, 比这个容易.

Example 3.31 绝对连续逆函数

设 $f \in AC([a,b])$, 且存在常数 $c > 0$, 使得

$$f'(x) \geq c, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

证明:

1. f 严格递增;
2. $f^{-1} \in AC([f(a), f(b)])$;
3. 对 a.e. $y \in [f(a), f(b)]$, 有

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Proof. 对任意 $a \leq x < y \leq b$, 由微积分基本定理,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \geq c(y - x) > 0.$$

因此 f 严格递增. 又 f 连续, 所以 f 把 $[a,b]$ 一一映到 $[f(a), f(b)]$, 逆函数存在且连续.

令 $g = f^{-1}$. 上面的估计还给出

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{c}|u - v|, \quad u, v \in [f(a), f(b)].$$

所以 g 是 Lipschitz 函数, 特别地 $g \in AC([f(a), f(b)])$.

最后证明导数公式. 令 N 为 f 不可导的点以及 $f'(x) < c$ 的点的并. 由假设 $m(N) = 0$. 绝对连续函数把零测集映成零测集, 所以 $m(f(N)) = 0$ (这个同学们要会, 用微积分基本定理就行). 对 $y \notin f(N)$, 记 $x = g(y)$. 这时 f 在 x 处可导, 且 $f'(x) \geq c > 0$. 若 $h \rightarrow 0$, 令 $x_h = g(y + h)$, 则 $x_h \rightarrow x$, 且

$$\frac{g(y + h) - g(y)}{h} = \frac{x_h - x}{f(x_h) - f(x)} \rightarrow \frac{1}{f'(x)}.$$

于是对 a.e. $y \in [f(a), f(b)]$,

$$(f^{-1})'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

6. L^p 函数

这一部分感觉不需要专门讲什么题目, 用幂函数构造 L^p 空间互不包含太容易了, 而有限测度的包含关系概率论也讲过, 因此就放一个比较简单的题目在这里.

Example 3.32 L^p 范数趋向 L^∞ 范数

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $0 < m(E) < +\infty$, 且 $f \in L^\infty(E)$. 证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Proof. 记

$$M = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

先看上界. 因为 $|f| \leq M$ a.e., 所以

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} \leq M m(E)^{1/p}.$$

令 $p \rightarrow \infty$, 得到

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} \leq M.$$

反过来, 若 $M = 0$, 已经结束. 若 $M > 0$, 对任意 $0 < \epsilon < M$, 由本性上确界的定义,

$$A_\epsilon = \{x \in E : |f(x)| > M - \epsilon\}$$

有正测度. 因此

$$\|f\|_{L^p(E)} \geq \left(\int_{A_\epsilon} |f|^p dx \right)^{1/p} \geq (M - \epsilon) m(A_\epsilon)^{1/p}.$$

再令 $p \rightarrow \infty$, 得到

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} \geq M - \epsilon.$$

最后令 $\epsilon \rightarrow 0$, 上下界合在一起就得到结论.

□

7. BV 与 AC 函数

最后我们讲一下 BV 函数和 AC 函数的一些演算性质, 同学们记住简单的例子即可, 往年都没有考太复杂.

Example 3.33 Lipschitz 复合保持性质

设 $u \in BV([a, b])$, Φ 在 $u([a, b])$ 上 Lipschitz. 证明

$$\Phi \circ u \in BV([a, b]),$$

且

$$V(\Phi \circ u) \leq \text{Lip}(\Phi)V(u).$$

进一步证明: 若 $u \in AC([a, b])$, 则

$$\Phi \circ u \in AC([a, b]).$$

Proof. 对任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 直接估计

$$\sum_{i=1}^N |\Phi(u(x_i)) - \Phi(u(x_{i-1}))| \leq \text{Lip}(\Phi) \sum_{i=1}^N |u(x_i) - u(x_{i-1})|.$$

对所有分割取上确界, 就得到

$$V(\Phi \circ u) \leq \text{Lip}(\Phi)V(u) < \infty.$$

因此 $\Phi \circ u \in BV([a, b])$.

如果 $u \in AC([a, b])$, 那么对任意两两不交的小区 (α_j, β_j) ,

$$\sum_j |\Phi(u(\beta_j)) - \Phi(u(\alpha_j))| \leq \text{Lip}(\Phi) \sum_j |u(\beta_j) - u(\alpha_j)|.$$

由 u 的绝对连续性, 右边可以随 $\sum_j (\beta_j - \alpha_j)$ 一起变小, 所以 $\Phi \circ u$ 绝对连续. $\square$

Example 3.34 AC 复合不保持 BV

构造 $\Phi \in AC([0, 1])$ 与 $u \in AC([0, 1])$, 使得

$$\Phi \circ u \notin BV([0, 1]).$$

Proof. 取

$$\Phi(t) = \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

这是一个绝对连续函数. 下面构造一个很低的三角帐篷之和. 取两两不交的闭区间

$$I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset (0, 1),$$

只在 0 处可能聚集. 令 ψ_n 是在 I_n 上的帐篷函数: 在端点取 0, 在中点取 1, 分段线性, 在 I_n 外为 0. 于是

$$0 \leq \psi_n \leq 1, \quad V(\psi_n) = 2.$$

定义

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \psi_n(x).$$

简单计算发现这个函数落在 $W^{1,1} \cap C$ 中, 从而 $u \in AC([0, 1])$. 当然也有 $0 \leq u \leq 1$.

但是在每个 I_n 上,

$$\sqrt{u} = \frac{1}{n} \sqrt{\psi_n}.$$

它从 0 上升到 $1/n$, 再下降到 0, 因此

$$V_{I_n}(\sqrt{u}) = \frac{2}{n}.$$

所以

$$V(\Phi \circ u) = V(\sqrt{u}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty.$$

这就说明 $\Phi \circ u \notin BV([0, 1])$. □

Example 3.35 BV 函数的乘积

证明: 若 $f, g \in BV([a, b])$, 则

$$fg \in BV([a, b]),$$

并且

$$V(fg) \leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f).$$

Proof. BV 函数在闭区间上有界, 因此下面的范数都是有限的. 对任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^N |f(x_i)| |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &\quad + \sum_{i=1}^N |g(x_{i-1})| |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f). \end{aligned}$$

对分割取上确界, 就得到

$$V(fg) \leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f) < \infty.$$

因此 $fg \in BV([a, b])$. □

Example 3.36 必须知道的例子

设 $\alpha, \beta > 0$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明如下刻画:

$$f \in C^1([0, 1]) \iff \alpha > \beta + 1,$$

$$f \in \text{Lip}([0, 1]) \iff \alpha \geq \beta + 1,$$

$$f \in AC([0, 1]) \iff \alpha > \beta,$$

$$f \in BV([0, 1]) \iff \alpha > \beta.$$

Proof. 首先得把导数算出来, 在 $(0, 1]$ 上,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^{\beta}}.$$

而对于 $x = 0$, 从定义可知, 导数存在当且仅当

$$\alpha > 1,$$

且此时导数为 0.

先看 C^1 . 若 $\alpha > \beta + 1$, 那么上式两项都趋于 0, 而 $f'(0) = 0$, 所以 $f \in C^1([0, 1])$. 反过来, 若 $1 < \alpha \leq \beta + 1$, 取

$$x_n = (2\pi n)^{-1/\beta},$$

则 $\sin(1/x_n^\beta) = 0$, $\cos(1/x_n^\beta) = 1$, 从而

$$f'(x_n) = -\beta x_n^{\alpha-\beta-1}.$$

当 $\alpha < \beta + 1$ 时它无界, 当 $\alpha = \beta + 1$ 时它等于 $-\beta$, 都不可能让 f' 在 0 处连续. 因此 C^1 的条件正是 $\alpha > \beta + 1$.

再看 Lipschitz. 只要考虑 $\alpha = \beta + 1$. 代入导数发现确实逐点有界, 那么用中值定理即可说明. 相反的, 若 f Lipschitz, 那么导数有界, 此时考虑之前的序列, 则给出 $\alpha \geq \beta + 1$.

最后看 AC 和 BV . 第一项 $\alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x^\beta)$ 总是可积的, 真正的问题在第二项. 注意

$$\int_0^\eta x^{\alpha-\beta-1} \left| \cos \frac{1}{x^\beta} \right| dx = \frac{1}{\beta} \int_{\eta^{-\beta}}^\infty t^{-\alpha/\beta} |\cos t| dt.$$

右边收敛当且仅当 $\alpha/\beta > 1$, 即 $\alpha > \beta$. 所以

$$f' \in L^1(0, 1) \iff \alpha > \beta.$$

若 $\alpha > \beta$, 由

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

得到 $f \in AC([0, 1])$, 因而 $f \in BV([0, 1])$.

若 $\alpha \leq \beta$, 上面说明 $f' \notin L^1(0, 1)$. 因此 f 不可能绝对连续. 同时, 对任意 $\eta > 0$, f 在 $[\eta, 1]$ 上是 C^1 函数, 所以

$$V(f; [\eta, 1]) = \int_\eta^1 |f'(x)| dx.$$

令 $\eta \downarrow 0$, 右边发散, 所以 $f \notin BV([0, 1])$. 于是 AC 和 BV 的条件都是 $\alpha > \beta$. □