

9 第八次习题课讲义

9.1 作业答案

Problem 9.1 P232.4

设 $f \in BV([0, 1])$. 若对任给 $\epsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\epsilon, 1]$ 上绝对连续, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对连续.

Proof. 这个题的一个看法是, 我们考虑这个函数对应的导数, 绝对连续说明导数是好的, 那么 BV 就说明奇异部分只在 $x = 0$, 而此时函数连续, 那么就没有奇性.

具体来说, 因为 $f \in BV([0, 1])$ 且在 0 处连续, 通过 Jordan 分解等方式可以看出,

$$V_0^\delta(f) \rightarrow 0, \quad \delta \downarrow 0.$$

现在任取 $\eta > 0$. 先取 $\delta_0 > 0$, 使得

$$V_0^{\delta_0}(f) < \frac{\eta}{2}.$$

又因为 f 在 $[\delta_0, 1]$ 上绝对连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得任意有限个两两不交区间 $(a_k, b_k) \subset [\delta_0, 1]$ 满足

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta_1$$

时, 有

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\eta}{2}.$$

现在对 $[0, 1]$ 中任意有限个两两不交区间作分割: 落在 $[0, \delta_0]$ 中的部分总贡献不超过 $V_0^{\delta_0}(f)$, 落在 $[\delta_0, 1]$ 中的部分由上面的绝对连续性控制. 取总长度 $\delta < \min(\delta_0, \delta_1)$, 就得到

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \eta.$$

这正是 f 在 $[0, 1]$ 上绝对连续. □

Problem 9.2 P242.4

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

是 $[0, a]$ 上的有界变差函数.

Proof. 题目原本要证明边值为零, 但这个东西一方面没有道理 (比如你考虑常值函数), 一方面也没有意义 (因为跳跃函数也是 BV 的), 所以我们把这个删去.

由 Jordan 分解, 可写

$$f = f_1 - f_2,$$

其中 f_1, f_2 都是 $[0, a]$ 上的递增函数. 因此只需要证明: 若 f 递增, 则

$$A_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0$$

是有界变差函数.

对递增 f , 平均函数 A_f 在 $(0, a]$ 上递增. 事实上若 $0 < x < y$, 则

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$$

(这个之前作业应该证明过)

那么实际上就有

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{y} \int_0^y f(t) dt.$$

于是 A_f 在 $(0, a]$ 上单调, 在 0 处至多有一个跳跃, 所以 $A_f \in BV([0, a])$. 对 f_1, f_2 分别应用这一结论, 得到 $F = A_{f_1} - A_{f_2} \in BV([0, a])$. $\square$

Problem 9.3 P242.5

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数列, 且有

$$V_a^b(f_k) \leq M, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

试证明 $f \in BV([a, b])$, 且满足 $V_a^b(f) \leq M$.

Proof. 这是 BV 函数的下半连续性, 因为这里是一维的, 所以这个结论甚至是平凡的. 任取分划

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

由逐点收敛,

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |f_k(x_i) - f_k(x_{i-1})| \leq M.$$

对所有分划取上确界, 就得到 $V_a^b(f) \leq M$, 特别地 $f \in BV([a, b])$. $\square$

Problem 9.4 P250.3

设 $m(E) < +\infty$, $f(x)$ 是 E 上可测函数, $0 < p_0 < +\infty$, 则

$$\lim_{p \uparrow p_0} \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)|^{p_0} dx.$$

Proof. 我感觉这个题是之前某个作业题.

把区域分成

$$E_1 = \{|f| \geq 1\}, \quad E_2 = \{|f| < 1\}.$$

在 E_1 上, 当 $p \uparrow p_0$ 时, $|f|^p \uparrow |f|^{p_0}$, 由 MCT 得到

$$\int_{E_1} |f|^p dx \rightarrow \int_{E_1} |f|^{p_0} dx.$$

在 E_2 上, 有 $|f|^p \rightarrow |f|^{p_0}$, 且 $|f|^p \leq 1$. 因为 $m(E) < +\infty$, 由 DCT 得到

$$\int_{E_2} |f|^p dx \rightarrow \int_{E_2} |f|^{p_0} dx.$$

两部分相加即得结论. $\square$

Problem 9.5 P253.5

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数, 且有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

试证明

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Proof. $q = \infty$ 是显然的, 现在令

$$P = \frac{p}{r}, \quad Q = \frac{q}{r}.$$

由条件可知 $P, Q > 1$ 且

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1.$$

对 $|f|^r$ 和 $|g|^r$ 使用 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \int_E |fg|^r dx &= \int_E |f|^r |g|^r dx \\ &\leq \left(\int_E |f|^{rP} dx \right)^{1/P} \left(\int_E |g|^{rQ} dx \right)^{1/Q} \\ &= \|f\|_p^r \|g\|_q^r. \end{aligned}$$

两边开 r 次方即可. □

Problem 9.6 P289.1

设 $f \in L^\infty(E)$, $w(x) > 0$, 且

$$\int_E w(x) dx = 1,$$

试证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Proof. 带权不等式, 不过和权也没什么关系, 证明是标准的.

记 $M = \|f\|_\infty$. 上界是直接的:

$$\left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p} \leq \left(M^p \int_E w dx \right)^{1/p} = M.$$

反过来, 任取 $\epsilon > 0$, 由本性上确界的定义,

$$A_\epsilon = \{|f| > M - \epsilon\}$$

有正测度. 又因为 $w > 0$ a.e., 所以

$$\int_{A_\epsilon} w dx > 0.$$

因而

$$\left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p} \geq (M - \epsilon) \left(\int_{A_\epsilon} w dx \right)^{1/p}.$$

令 $p \rightarrow \infty$, 得到下极限不小于 $M - \epsilon$. 再令 $\epsilon \downarrow 0$, 结论成立. □

Problem 9.7 P289.2

设 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L^2(E)$, 有

$$\|gf\|_2 \leq M\|f\|_2,$$

试证明 $|g(x)| \leq M$, a.e. $x \in E$.

Proof. 反证. 若结论不成立, 则存在 $k \geq 1$, 使得

$$A_k = \left\{ |g| > M + \frac{1}{k} \right\}$$

有正测度. 因为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 σ 有限的, 可取可测集 $B \subset A_k$ 满足

$$0 < m(B) < +\infty.$$

令 $f = \chi_B$, 则 $f \in L^2(E)$. 由题设,

$$\|g\chi_B\|_2 \leq M\|\chi_B\|_2.$$

但另一方面,

$$\|g\chi_B\|_2 \geq \left(M + \frac{1}{k}\right) \|\chi_B\|_2,$$

矛盾. 因此 $|g| \leq M$ a.e.

□

Problem 9.8 P289.4

设 $f \in L^2([0, 1])$, 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}} dt, \quad 0 < x < 1.$$

试证明

$$\left(\int_0^1 g^2(x) dx \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2} \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Proof. 这个题稍微有点意思, 是 Schur 估计. 可能有同学期待证明 g 的良好性, 但我们实际上没法做出好的逐点估计, 还是要把 L^2 搞出来. 记

$$K(x, t) = \frac{1}{|x-t|^{1/2}}.$$

对任意 $x \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^1 K(x, t) dt = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} \leq 2\sqrt{2},$$

同理对任意 $t \in [0, 1]$ 也有

$$\int_0^1 K(x, t) dx \leq 2\sqrt{2}.$$

由 Cauchy 不等式,

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 K(x, t) dt \right) \left(\int_0^1 K(x, t) |f(t)|^2 dt \right) \leq 2\sqrt{2} \int_0^1 K(x, t) |f(t)|^2 dt.$$

再对 x 积分并交换积分次序,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(x)|^2 dx &\leq 2\sqrt{2} \int_0^1 |f(t)|^2 \left(\int_0^1 K(x, t) dx \right) dt \\ &\leq 8 \int_0^1 |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

两边开方即得结论.

□

Problem 9.9 P289.5

试证明下列两个不等式不能同时成立:

$$\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx \leq \frac{4}{9},$$

$$\int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \leq \frac{1}{9}.$$

Proof. 若二者同时成立, 则由 Minkowski 不等式,

$$\|\sin x - \cos x\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|f - \sin x\|_2 + \|f - \cos x\|_2 \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

但直接计算

$$\|\sin x - \cos x\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 dx = \pi,$$

从而 $\|\sin x - \cos x\|_2 = \sqrt{\pi} > 1$, 矛盾. □

Problem 9.10 P290.8

设 $f, g \in L^3(E)$, 且有

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_E f^2(x)g(x) dx = 1,$$

试证明

$$g(x) = |f(x)|, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

Proof. 由 Hölder 不等式,

$$1 = \int_E f^2 g dx \leq \int_E |f|^2 |g| dx \leq \| |f|^2 \|_{3/2} \|g\|_3 = \|f\|_3^2 \|g\|_3 = 1.$$

因此上面两处不等式都是等号. 第一处等号说明在 $\{f \neq 0\}$ 上有 $g \geq 0$ a.e.

第二处是 Hölder 等号情形, 故存在常数 $c \geq 0$, 使得

$$|f|^3 = c|g|^3, \quad \text{a.e.}$$

由 $\|f\|_3 = \|g\|_3 = 1$ 可知 $c = 1$, 所以 $|g| = |f|$ a.e. 结合 $g \geq 0$ a.e. 于 $\{f \neq 0\}$, 并注意 $\{f = 0\}$ 上也有 $g = 0$ a.e., 得到 $g = |f|$ a.e. □

Problem 9.11 P290.15

设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f, g \in L^2(E)$, 有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

Proof. 看起来是默认实值函数.

那么记

$$S_N = \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

因为 $\{\varphi_k\}$ 是完全标准正交系, Fourier 部分和 S_N 在 $L^2(E)$ 中收敛到 f . 于是

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

这就是所需等式. □

9.2 2025fin

Problem 9.12 2025-1

证明下列等价:

1. $f \in \text{Lip}[a, b]$, 且 Lipschitz 常数为 M ;
2. $f \in AC[a, b]$, 而且 $|f'(x)| \leq M$, a.e. $x \in [a, b]$.

Proof. 这就是作业题. 首先所有人都应该知道 $\text{Lip} \subset AC$ 这个事实. 那么上推下是平凡的, 下推上是 NL 公式. $\square$

Problem 9.13 2025-2

假设 $f \in L^2(0, +\infty)$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, +\infty).$$

Proof. 这个题上次习题课讲了, 我 copy 一下过程.

我们知道其实只要考虑 $(0, 1]$ 区间. 那么我们现在固定 $\epsilon > 0$, 刻画里面的坏点. 令

$$A_n := \{x \in (0, 1] : |f_n(x)| > \epsilon\}, \quad \text{where } f_n(x) := f(x+n).$$

那么我们用 Chebyshev 不等式, 有

$$|A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

那么求和得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|f\|_2^2 < \infty.$$

那么在 $(0, 1]$ 上就证明了结论. 对每个 $(k, k+1]$ 同理, 最后取可数并即可. $\square$

Problem 9.14 2025-3

假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx, \quad \forall g \in L^\infty[0, 1].$$

证明: f 是凸函数.

Proof. 这个题上课应该讲过. 任取 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, 1]$, 令

$$g(s) = \begin{cases} x, & 0 \leq s \leq t, \\ y, & t < s \leq 1. \end{cases}$$

则 $g \in L^\infty[0, 1]$, 代入题设得到

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

这正是凸函数的定义. $\square$

Problem 9.15 2025-4

下列命题是否正确? 证明或举反例:

1. 假设 $f, g \in AC[a, b]$, 则 $f(x)g(x) \in AC[a, b]$;
2. 假设 $f, g \in AC[a, b]$, 而且 $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$, 则 $f(g(x)) \in AC[a, b]$.

Proof. 第一问是正确的. 因为绝对连续函数在紧区间上有界, 且

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{a.e.}$$

右边属于 $L^1[a, b]$, 再用 Newton-Leibniz 公式即可得到 $fg \in AC[a, b]$.

第二问是错误的 (之前给过一个反例, 这里找的更简单). 在 $[0, 1]$ 上取

$$f(x) = \sqrt{x},$$

以及

$$g(0) = 0, \quad g(x) = x^{3/2} \sin^2 \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

显然 $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. 直接计算可知

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \sin^2 \frac{1}{x} - 2x^{-1/2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \in L^1(0, 1),$$

所以 $g \in AC[0, 1]$. 另一方面 $f \in AC[0, 1]$, 但

$$f(g(x)) = x^{3/4} \left| \sin \frac{1}{x} \right|.$$

考虑零点 $x_n = (n\pi)^{-1}$ 和峰点 $y_n = (n\pi + \pi/2)^{-1}$, 计算变差, 注意到

$$2y_n^{3/4} \gtrsim n^{-3/4}.$$

求和发散, 所以 $f \circ g \notin BV[0, 1]$, 不可能绝对连续. □

Problem 9.16 2025-5

设 μ 是 σ -有限测度, ν 是有限测度, 而且

$$\nu \ll \mu, \quad \nu \perp \mu.$$

证明: $\nu = 0$.

Proof. 第一行的条件和题目本身没关系. 由 $\nu \perp \mu$, 存在可测集 A , 使得

$$\mu(A) = 0, \quad \nu(X \setminus A) = 0.$$

又因为 $\nu \ll \mu$, 所以 $\nu(A) = 0$. 因而

$$\nu(X) = \nu(A) + \nu(X \setminus A) = 0,$$

即 $\nu = 0$. □

Problem 9.17 2025-6

设 μ 是自然数集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上的计数测度. 假设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y + 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \neq \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x).$$

说明该结果与 Fubini 定理为何不冲突.

Proof. 计数测度下积分就是求和. 固定 y 时,

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x, y) = 1 - 1 = 0,$$

所以

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0.$$

固定 x 时, 若 $x = 1$, 则

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(1, y) = 1;$$

若 $x \geq 2$, 则

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(x, y) = 1 - 1 = 0.$$

因而

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x) = 1.$$

两个累次积分确实不相等.

这和 Fubini 定理不冲突, 因为

$$\sum_{x, y} |f(x, y)| = +\infty,$$

也就是 $f \notin L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Fubini 的绝对可积条件根本没有满足. □

Problem 9.18 2025-7

假设 $f \in AC[a, b]$, 证明: f 将零测集映为零测集.

Proof. 这是绝对连续函数的 Lusin N 性质. 设 $E \subset [a, b]$ 且 $m(E) = 0$. 因为 $f \in AC[a, b]$, 有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad f' \in L^1[a, b].$$

任取 $\epsilon > 0$. 由积分的绝对连续性, 可取开集 $G \supset E$, 使得

$$\int_G |f'(t)| dt < \epsilon.$$

将 G 写成至多可数个两两不交开区间的并:

$$G = \bigcup_k (a_k, b_k).$$

对每个分量,

$$m(f((a_k, b_k))) \leq V(f; (a_k, b_k)) \leq \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt.$$

因此

$$m^*(f(E)) \leq \sum_k m(f((a_k, b_k))) \leq \int_G |f'(t)| dt < \epsilon.$$

令 $\epsilon \downarrow 0$, 得到 $m(f(E)) = 0$. □

Problem 9.19 2025-8

假设 $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$, 记

$$I_n = \left(r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}\right).$$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}(x) \in L^2[0, 1] \setminus R[0, 1].$$

这里 $R[0, 1]$ 通常指 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数类.

Proof. 记

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}(x).$$

先证明 $F \in L^2[0, 1]$. 由单调收敛定理,

$$\begin{aligned} \int_0^1 F^2 dx &= \sum_{n,k=1}^{\infty} m(I_n \cap I_k \cap [0, 1]) \\ &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \min\{2^{1-n}, 2^{1-k}\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)2^{1-k} < \infty. \end{aligned}$$

所以 $F \in L^2[0, 1]$.

再看 Riemann 可积性. 实际上 F 在任意非空开区间上都无界. 给定开区间 J , 因为有理数稠密, 可取 $r_{n_1} \in J$, 于是 $J \cap I_{n_1}$ 仍含有非空开区间. 再在这个开区间中取 r_{n_2} , 继续下去. 对任意 N , 可以找到 $n_1, \dots, n_N$, 使得 (这里是每次选不一样的有理数)

$$J \cap I_{n_1} \cap \dots \cap I_{n_N} \neq \emptyset.$$

因而在 J 中有点使 $F \geq N$. 这说明 F 在任何小区间都无界, 所以它不可能是 Riemann 可积函数. □

Problem 9.20 2025-9

假设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是 Cantor 函数.

1. 判断下列是否正确:

- (a) $f \in AC[0, 1]$;
- (b) $f \in BV[0, 1]$;
- (c) $f \in \text{Lip}[0, 1]$;
- (d) f' 几乎处处存在, 而且 $f' \in L^1[0, 1]$.

2. 计算

$$\int_0^1 f'(x) \, dx - f(1) + f(0).$$

3. 计算:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} f(x), \quad \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} f'(x).$$

4. 计算 $V_0^1 f$.

Proof. (这是一个超级无聊的送分题, 希望期中考试没有造出 Cantor 集的同学能被稳稳接住.)

1. AC 错, 因为 NL 公式不成立
2. BV 对, 因为单调增
3. Lip 错, AC 都不是
4. 对, 因为 $f' = 0$ a.e.

接下来四个计算, 答案为: $-1, 1, 0, 1$. 这太水了.

□

9.3 2024fin

Problem 9.21 2024-1

假设 $f \in C[a, b]$, 证明:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Proof. 一方面这是显然的, 因为 essential supremum 总是不超过通常的 supremum, 而连续函数在紧区间上取到最大值.

反过来, 设

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

取 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $|f(x_0)| = M$. 若 $\operatorname{ess\,sup} |f| < M$, 则取 α 满足

$$\operatorname{ess\,sup} |f| < \alpha < M.$$

由连续性, 存在 x_0 的一个相对邻域 $I \subset [a, b]$, 使得

$$|f(x)| > \alpha, \quad x \in I.$$

但 $m(I) > 0$, 这与 essential supremum 的定义矛盾. 所以

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| = M.$$

□

Problem 9.22 2024-2

假设 $p, q \in [1, +\infty]$ 而且 $p \neq q$, 证明:

$$L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

Proof. 这个题就是两类经典反例: 无穷远处衰减不够快, 或者原点处爆破太快. 下面约定 $1/\infty = 0$.

若 $p > q$, 取

$$\nu \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right), \quad f(x) = x^{-\nu} \chi_{(1, \infty)}(x).$$

则

$$\int_1^\infty x^{-p\nu} dx < \infty, \quad \int_1^\infty x^{-q\nu} dx = \infty.$$

当 $p = \infty$ 时, 上面只要理解为 f 有界即可. 因而 $f \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.

若 $p < q < \infty$, 取

$$\mu \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right), \quad f(x) = x^{-\mu} \chi_{(0, 1)}(x).$$

则 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 但 $f \notin L^q(\mathbb{R})$. 若 $q = \infty$, 任取 $0 < \mu < 1/p$, 同样有

$$x^{-\mu} \chi_{(0, 1)} \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R}).$$

□

Problem 9.23 2024-3

假设

$$f(x) = \int_0^x t^{-1/2} \sin \frac{1}{t} dt.$$

证明:

$$f \in BV[0, 1].$$

Proof. 积分都看到了, 这就有底了, 而且里面甚至直接是 L^1 函数. 令

$$g(t) = t^{-1/2} \sin \frac{1}{t}, \quad t \in (0, 1].$$

则

$$|g(t)| \leq t^{-1/2} \in L^1(0, 1).$$

因而 $g \in L^1(0, 1)$, 所以

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt$$

是 $[0, 1]$ 上的绝对连续函数. 于是 $f \in AC[0, 1] \subset BV[0, 1]$. □

Problem 9.24 2024-4

考虑函数列

$$\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \dots\},$$

其中 $f_{n,j} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[(j-1)/n, j/n)}(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

该函数列是否以 L^2 收敛, 是否存在子序列几乎处处收敛?

Proof. 这是打字机序列. 计算范数有

$$\|f_{n,j}\|_{L^2[0,1]}^2 = \int_0^1 f_{n,j}(x)^2 dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

所以该函数列在 L^2 中收敛到 0.

范数收敛都有了, 就有依测度收敛, 从而有几乎处处收敛子列. □

Problem 9.25 2024-5

假设 $E \subset [0, 2\pi]$ 是可测集, $a_n \in \mathbb{R}$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sin^2(nt + a_n) dt = \frac{1}{2} m(E).$$

Proof. 先用恒等式

$$\sin^2(nt + a_n) = \frac{1 - \cos(2nt + 2a_n)}{2}.$$

因而只需要证明

$$\int_E \cos(2nt + 2a_n) dt \rightarrow 0.$$

注意

$$\cos(2nt + 2a_n) = \cos(2nt) \cos(2a_n) - \sin(2nt) \sin(2a_n).$$

因为 $\chi_E \in L^1[0, 2\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\int_0^{2\pi} \chi_E(t) \cos(2nt) dt \rightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} \chi_E(t) \sin(2nt) dt \rightarrow 0.$$

现在相当于变成一个数列问题, x_n 是有界数列, 而 y_n 收敛到 0. 那么 $x_n y_n$ 显然收敛到 0, 这就做完了. □

Problem 9.26 2024-6

假设 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1,$$

而且

$$\varphi(x) = 0, |x| \geq 1; \quad \varphi(x) > 0, |x| < 1.$$

假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} n\varphi(n(x-y))f(y) dy.$$

证明: $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, 而且 f_n 以 L^1 收敛到 f .

Proof. 这是标准的磨光核. 先看光滑性. 对任意 $k \geq 0$, 形式求导得到

$$f_n^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} n^{k+1}\varphi^{(k)}(n(x-y))f(y) dy.$$

这一步可以用 DCT 验证, 因为对固定 n, k ,

$$\left| n^{k+1}\varphi^{(k)}(n(x-y))f(y) \right| \leq n^{k+1}\|\varphi^{(k)}\|_\infty |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}_y).$$

所以 $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

再看 L^1 收敛. 换元 $z = n(x-y)$ 可得

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)f\left(x - \frac{z}{n}\right) dz.$$

因为 $\int \varphi = 1$, 有

$$f_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \left[f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right] dz.$$

用 Tonelli 定理,

$$\|f_n - f\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \left\| f\left(\cdot - \frac{z}{n}\right) - f(\cdot) \right\|_{L^1} dz.$$

对每个固定 z , 积分的平移连续性给出

$$\left\| f\left(\cdot - \frac{z}{n}\right) - f(\cdot) \right\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

同时它被 $2\|f\|_{L^1}$ 控制, 而 φ 有紧支撑且可积. 再用 DCT, 得到 $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$. □

Problem 9.27 2024-7

假设 (X, Γ, μ) 是一个测度空间,

$$f \in L^1(X, \mu), \quad 0 \leq f \leq 1.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x)^n d\mu(x) = \mu(f^{-1}(\{1\})).$$

Proof. 逐点看就行:

$$f(x)^n \rightarrow \chi_{f^{-1}(\{1\})}(x).$$

因为 $0 \leq f^n \leq f \in L^1(X, \mu)$, 由 DCT,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x)^n d\mu(x) = \int_X \chi_{f^{-1}(\{1\})} d\mu(x) = \mu(f^{-1}(\{1\})).$$

□

Problem 9.28 2024-8

假设 $f \in C^1[a, b]$. 证明:

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Proof. 先证上界. 对任意分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 由微积分基本定理,

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

对分划取上确界, 得到

$$V_a^b f \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

反过来, 由 $|f'|$ 的连续性, 对任意 $\epsilon > 0$, 可取足够细的分划, 使得任意取标记点的 Riemann 和都与 $\int_a^b |f'|$ 相差小于 ϵ . 对每个小区间, Lagrange 中值定理给出 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}).$$

因而

$$V_a^b f \geq \sum_i |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \geq \int_a^b |f'(x)| dx - \epsilon.$$

令 $\epsilon \downarrow 0$ 即可. □

Problem 9.29 2024-9

假设 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, 而且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = 0.$$

证明:

$$f = \text{常数}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 这个题不能简单说 $f' = 0$, 因为 L^∞ 函数可以有跳跃. 正确做法是用 Lebesgue 点来恢复函数值.

取 $x < y$ 都是 f 的 Lebesgue 点. 因为 $f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$, 由 Lebesgue 点定理,

$$f(x) - f(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(z) dz \right).$$

整理积分区间,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(z) dz = \int_x^y \frac{f(z) - f(z+h)}{h} dz.$$

因而

$$|f(x) - f(y)| \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| dz = 0.$$

这说明对几乎处处的 x, y , 有 $f(x) = f(y)$. 由 Fubini 定理, 可取一个 Lebesgue 点 x_0 , 使得 $f(y) = f(x_0)$ 对 a.e. y 成立. 因而 f 几乎处处为常数. □

Problem 9.30 2024-附加

假设 $a, b > 0$. 证明:

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{1}{x^a + y^b} dm_2(x, y) < \infty \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1.$$

Proof. 唯一的问题在 $(0, 0)$ 附近. 作换元

$$u = x^a, \quad v = y^b.$$

记 $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, 则积分的敛散性等价于

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} v^{\beta-1}}{u+v} du dv$$

的敛散性.

把区域分成 $v < u$ 和 $u < v$. 在 $v < u$ 上, $u+v \sim u$, 因而对应积分与

$$\int_0^1 \int_0^u u^{\alpha-2} v^{\beta-1} dv du = C \int_0^1 u^{\alpha+\beta-2} du$$

同阶. 这收敛当且仅当 $\alpha + \beta > 1$. 另一半区域 $u < v$ 完全一样. 所以原积分有限当且仅当

$$\alpha + \beta > 1,$$

也就是

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1.$$

□

9.4 2023fin

Problem 9.31 2023-1

举例说明下面两个包含关系均为真包含关系:

$$\text{Lip}[0, 1] \subset AC[0, 1] \subset BV[0, 1].$$

Proof. 前一个真包含取

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

因为 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in L^1(0, 1)$, 所以 $f \in AC[0, 1]$. 但 f 不可能 Lipschitz, 因为

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty.$$

后一个真包含取 Cantor 函数 $C(x)$. 它单调递增, 所以 $C \in BV[0, 1]$. 但 $C' = 0$ a.e. 且 $C(1) - C(0) = 1$, 若 $C \in AC[0, 1]$, 则

$$C(1) - C(0) = \int_0^1 C'(x) dx = 0,$$

矛盾. 因而 $C \notin AC[0, 1]$. □

Problem 9.32 2023-2

已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}, \{g_j\}$ 分别几乎处处收敛到 f, g , 且

$$|f_j(x)| \leq g_j(x).$$

若 $\{g_j\}$ 依 L^1 范数收敛到 g , 试证明 $\{f_j\}$ 也依 L^1 范数收敛到 f .

Proof. 这就是广义 DCT, 不写了. □

Problem 9.33 2023-3

已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}, \{g_j\}$ 分别依测度收敛到 f, g , 试判断 $\{f_j g_j\}$ 是否依测度收敛到 fg ? 解释理由.

Proof. 结论是对的. 这个题就是依测度收敛对乘法封闭, 但是要用截断把无界性处理掉.

任取 $\epsilon > 0$. 因为 f, g 可积, 可先取 $M \geq 1$, 使得

$$m(\{|f| > M\}) + m(\{|g| > M\}) < \epsilon.$$

在集合

$$\{|f| \leq M, |g| \leq M, |f_j - f| \leq 1\}$$

上有 $|f_j| \leq M + 1$, 从而

$$|f_j g_j - fg| \leq |f_j| |g_j - g| + |g| |f_j - f| \leq (M + 1) |g_j - g| + M |f_j - f|.$$

因此

$$\begin{aligned} m(\{|f_j g_j - fg| > \epsilon\}) &\leq m(\{|f| > M\}) + m(\{|g| > M\}) + m(\{|f_j - f| > 1\}) \\ &\quad + m\left(\{|g_j - g| > \frac{\epsilon}{2(M+1)}\}\right) + m\left(\{|f_j - f| > \frac{\epsilon}{2M}\}\right). \end{aligned}$$

令 $j \rightarrow \infty$, 后三项趋于 0. 再令 M 取得越来越大, 就得到

$$f_j g_j \rightarrow fg$$

in measure. □

Problem 9.34 2023-4

举例说明 Fubini 定理对一般可测函数不一定正确.

Proof. 可以背诵一下 PPT 或者 25 年的考试题. 设 μ 是 $\mathbb{N}$ 上的计数测度, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y + 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

固定 y 时,

$$\sum_x f(x, y) = 1 - 1 = 0,$$

所以先对 x 求和再对 y 求和得到 0. 固定 x 时, $x = 1$ 给出和为 1, $x \geq 2$ 给出和为 0, 所以反过来的累次积分等于 1. $\square$

Problem 9.35 2023-5

证明 $\mathbb{R}^3$ 中存在可数个互不相交的闭小球 $B_j \subset [0, 1]^3$, 使得

$$m\left([0, 1]^3 \setminus \bigcup_j B_j\right) = 0.$$

Proof. 这就是 Vitali 覆盖定理. 考虑所有包含在 $(0, 1)^3$ 中的闭球组成的族 $\mathcal{B}$. 对 $(0, 1)^3$ 中的任意点 x 和任意 $\delta > 0$, 都存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得

$$x \in B, \quad \text{diam } B < \delta.$$

因而 $\mathcal{B}$ 是 $(0, 1)^3$ 的 Vitali 覆盖.

由 Vitali 覆盖定理, 可取至多可数个两两不交的闭球 $\{B_j\} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$m\left((0, 1)^3 \setminus \bigcup_j B_j\right) = 0.$$

再注意边界 $\partial[0, 1]^3$ 是零测集, 就得到题目结论. $\square$

Problem 9.36 2023-6

设 $f \in L^1(E)$, 写出分布函数 $f_*(t)$ 的定义并证明

$$\int_E |f(x)| \, dx = \int_0^\infty f_*(t) \, dt.$$

Proof. 分布函数定义为

$$f_*(t) = m(\{x \in E : |f(x)| > t\}), \quad t \geq 0.$$

对每个 x , 有层蛋糕表示

$$|f(x)| = \int_0^\infty \chi_{\{t < |f(x)|\}} \, dt.$$

由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| \, dx &= \int_E \int_0^\infty \chi_{\{t < |f(x)|\}} \, dt \, dx \\ &= \int_0^\infty m(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, dt \\ &= \int_0^\infty f_*(t) \, dt. \end{aligned}$$

$\square$

Problem 9.37 2023-7

判断对错并给出理由.

1. 单调递增函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的导数几乎处处存在, 导函数可测且

$$f'(x) \in L^+(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

2. 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调函数, 则

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

3. 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 广义 Riemann 可积, Lebesgue 可积, 则两个积分值相同.

Proof. (1) 错. 单调函数确实几乎处处可导, 且导函数是非负可测函数, 但是不一定可积. 取 $f(x) = x$, 则 $f'(x) = 1 \notin L^1(\mathbb{R})$.

- (2) 错. 取 Cantor 函数 C . 它单调递增, 但 $C' = 0$ a.e., 所以

$$\int_0^1 C'(x) dx = 0 \neq 1 = C(1) - C(0).$$

(3) 对. 在有限区间上 Riemann 可积函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分一致. 对广义 Riemann 积分, 先在有限区间上截断, 两种积分一致; 再利用 f 的 Lebesgue 可积性控制尾部, 令截断区间趋于全空间即可. $\square$

Problem 9.38 2023-8

证明 $L^\infty(E)$ 空间是 Banach 空间.

Proof. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^\infty(E)$ 中的 Cauchy 列. 对每个 k , 可取 N_k , 使得当 $m, n \geq N_k$ 时,

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty(E)} < 2^{-k}.$$

去掉一个零测集后, 上式对所有这些可数多个 m, n, k 逐点成立. 因而对几乎处处的 x , $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 定义

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

在这些点上成立, 零测集上的定义不影响.

固定 k 并令 $m \rightarrow \infty$, 得到当 $n \geq N_k$ 时

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k} \quad \text{a.e.}$$

所以

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(E)} \leq 2^{-k}, \quad n \geq N_k.$$

这说明 $f_n \rightarrow f$ in $L^\infty(E)$. 同时 $f = f_{N_k} + (f - f_{N_k})$ a.e., 右边属于 L^∞ , 所以 $f \in L^\infty(E)$. 因而 $L^\infty(E)$ 完备. $\square$

Problem 9.39 2023-9

设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明

$$V_0^1 f \leq 3.$$

Proof. 在 $(0, 1]$ 上,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \sin \frac{1}{x} - x^{-1/2} \cos \frac{1}{x}.$$

于是

$$\int_0^1 |f'(x)| \, dx \leq \frac{3}{2} \int_0^1 x^{1/2} \, dx + \int_0^1 x^{-1/2} \, dx \leq 3.$$

因此 $f' \in L^1(0, 1)$, 从而 $f \in AC[0, 1]$, 并且

$$V_0^1 f \leq \int_0^1 |f'(x)| \, dx \leq 3.$$

□

Problem 9.40 2023-10

设 $f \in L^1[a, b]$, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 0$$

几乎处处成立.

Proof. Lebesgue 点定理的单侧版本. 由 Lebesgue 点定理, 对 a.e. $x \in (a, b)$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)| \, dt = 0.$$

对这样的 x , 当 $h > 0$ 充分小时,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt = 2 \cdot \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| \, dt \rightarrow 0.$$

若考虑 $h < 0$, 只要把区间换成 $[x+h, x]$ 即可, 完全一样.

□

9.5 2022fin

备选题很多不是实分析题, 别看.

9.6 2021fin

Problem 9.41 2021-1

$\mathbb{R}$ 上的广义 Riemann 积分是否一定 Lebesgue 可积? 反之是否成立? 举例说明.

Proof. 都不一定.

广义 Riemann 可积不一定 Lebesgue 可积. 例如

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \chi_{[1, \infty)}(x).$$

其广义 Riemann 积分由 Dirichlet 判别法收敛, 但

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

所以不是 Lebesgue 可积函数.

反过来也不一定. 例如

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}.$$

它 Lebesgue 可积且积分为 0, 但是在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积, 更谈不上通常意义下的广义 Riemann 积分. $\square$

Problem 9.42 2021-2

设 $f \in BV[0, 1]$, 集合

$$E = \{x \in [0, 1] : f'(x) = \infty\}$$

是否 Lebesgue 可测?

Proof. 可测. 事实上这和 $f \in BV$ 关系不大, 只要 f 可测且差商可测即可.

记

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

为差商. 用有理数 $h \rightarrow 0$ 刻画导数为 $+\infty$, 可以写成

$$E = \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{0 < |h| < 1/N \\ h \in \mathbb{Q}}} \{x : D_h f(x) > M\},$$

端点处可以只在定义域内取 h . 右边是可测集的可数次并交, 因而可测. $\square$

Problem 9.43 2021-3

设 $f, g \in AC[0, 1]$ 且 $g([0, 1]) \subset [0, 1]$, 是否一定有 $f \circ g \in AC[0, 1]$?

Proof. 不一定. 这个题和 9.15 是同一个反例. $\square$

Problem 9.44 2021-4

设 $f \in L(E)$, 证明

$$\int_E |f(x)|^p dx = \int_0^{\infty} p \lambda^{p-1} m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Proof. 对每个 x , 有

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p \lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^{\infty} p \lambda^{p-1} \chi_{\{|f(x)| > \lambda\}} d\lambda.$$

对 x 积分并用 Tonelli 定理, 得到

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p dx &= \int_E \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \chi_{\{|f(x)| > \lambda\}} d\lambda dx \\ &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.\end{aligned}$$

□

Problem 9.45 2021-5

设有抽象正测度 μ , 定义

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \mu)} = \inf\{M > 0 : \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

1. 对 $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度 m , 证明

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, m)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

2. 对 Dirac 测度 δ_0 , 举例说明 (1) 不对.

3. 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, 是否一定存在 $g \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f = g$ a.e. $x \in \mathbb{R}$?

Proof. (1) 这个之前讲过了.

(2) 取

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

则 $f(0) = 0$, 所以

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \delta_0)} = 0,$$

但 $\sup_{\mathbb{R}} |f| = 1$.

(3) 不一定. 这是作业题. 取 $f = \chi_{[0, \infty)}$. 若存在连续函数 g 使得 $f = g$ a.e., 则 $g = 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 的一个稠密子集上成立, 由连续性得 $g = 0$ on $(-\infty, 0)$. 同理 $g = 1$ on $(0, \infty)$. 这与 g 在 0 处连续矛盾. □

Problem 9.46 2021-6

设 $\{f_k\}$ 为 E 上可数可测函数列, 满足

$$\int_E f_k^2 dx \leq 2021, \quad \int_E f_k f_j dx = 0, \quad \forall k \neq j.$$

证明: 对 $\beta > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n^2} \int_E \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 dx \leq \frac{2021}{n^{2\beta-2}},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 = 0 \quad \text{a.e.}$$

Proof. 第一个估计直接算:

$$\sum_{k=1}^{n^2} \int_E \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 dx = \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{k=1}^{n^2} \int_E f_k^2 dx \leq \frac{2021 n^2}{n^{2\beta}} = \frac{2021}{n^{2\beta-2}}.$$

令

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{1}{n^\beta} f_k(x) \right)^2.$$

取二进制子列. 由上式,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_E S_{2^m}(x) dx \leq 2021 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(2\beta-2)} < \infty.$$

因而

$$\sum_m S_{2^m}(x) < \infty \quad \text{a.e.},$$

特别 $S_{2^m}(x) \rightarrow 0$ a.e.

若 $2^m \leq n < 2^{m+1}$, 则

$$S_n(x) \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^{2m+2}} f_k(x)^2}{2^{2\beta m}} = 2^{2\beta} S_{2^{m+1}}(x).$$

右边 a.e. 趋于 0, 所以 $S_n \rightarrow 0$ a.e. □

Problem 9.47 2021-7

设 $f, g \in \mathcal{L}^+(E)$, 满足

$$m(\{x \in E : g(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{\{x \in E : g(x) > t\}} f(x) dx.$$

对 $\forall p \in (1, +\infty)$, 证明:

$$\left(\int_E g(x)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_E f(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Proof. 这是一个 Hardy 型估计. 记 $A_t = \{x \in E : g(x) > t\}$. 由分布函数公式和题设,

$$\begin{aligned} \int_E g^p dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} m(A_t) dt \\ &\leq p \int_0^\infty t^{p-2} \int_{A_t} f(x) dx dt \\ &= p \int_E f(x) \int_0^{g(x)} t^{p-2} dt dx \\ &= \frac{p}{p-1} \int_E f(x) g(x)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

用 Hölder 不等式,

$$\int_E f g^{p-1} dx \leq \|f\|_p \|g\|_p^{p-1}.$$

若 $\|g\|_p = 0$ 则结论显然, 否则两边除以 $\|g\|_p^{p-1}$ 即可. □

Problem 9.48 2021-8

设 E 零测, 开集列 $\mathcal{O}_k \supset E$, $m(\mathcal{O}_k) < 2^{-k}$, 令

$$\Phi(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t) dt.$$

证明 $\Phi(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\Phi'(x) = \infty$, $x \in E$.

Proof. 原本的题目结论错了, 这里已做修改.

令

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t).$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_k) < \infty,$$

有 $h \in L^1(\mathbb{R})$. 因而

$$\Phi(x) = \int_0^x h(t) dt$$

是绝对连续函数, 特别 $\Phi \in C(\mathbb{R})$.

但若 $x \in E$, 则对任意 N , 因为 $x \in \mathcal{O}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_N$ 且这些集合都是开集, 存在 $\delta_N > 0$, 使得当 $|t - x| < \delta_N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t) \geq N.$$

于是对 $0 < |h| < \delta_N$,

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \geq N.$$

因为 N 任意, 所以导数为 $+\infty$. □

Problem 9.49 2021-9

设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数, 且 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 1$. 通过估计

$$\int_{|x| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy dx$$

证明存在 $|x_0| \leq 1$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{|y-x_0|} dy < 2021.$$

Proof. 原本的提示有点问题, 这里也改了.

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|y-x|} dx dy \\ &\leq \int_{|y| \leq 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x-y|} dx dy + \int_{|y| > 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x-y|} dx dy \\ &\leq \int_{|y| \leq 2} |f(y)| \int_{|z| \leq 3} \frac{1}{|z|} dz dy + \int_{|y| > 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} 1 dz dy \\ &\leq 6\pi \int_{|y| \leq 2} |f(y)| dy + 2\pi \int_{|y| > 2} |f(y)| dy \leq 6\pi \|f\|_1. \end{aligned}$$

如果对所有 $|x| \leq 1$ 都有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy \geq 2021,$$

那么左边再对 $x \in B(0, 1)$ 积分至少为 2021π , 与 6π 矛盾. 因而存在 $|x_0| \leq 1$ 使得上面积分小于 2021. □

Problem 9.50 2021-10

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f' \in L^2(\mathbb{R})$. 证明:

1. 任给闭区间 $[a, b]$, 有 $f \in AC[a, b]$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Proof. 用上次习题课讲的小结论, 这个函数当然绝对连续.

现在证明无穷远处趋于 0. 由第一问, f^2 在任意紧区间上绝对连续, 且

$$(f^2)' = 2ff' \in L^1(\mathbb{R})$$

(这里用 Cauchy-Schwarz). 因而对 $x < y$,

$$f(y)^2 - f(x)^2 = 2 \int_x^y f(t)f'(t) \, dt.$$

因为 $ff' \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x, y \rightarrow +\infty$ 时右边趋于 0, 所以 $f(x)^2$ 在 $+\infty$ 处有极限 (因为 Cauchy 列). 但 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 这个极限只能是 0, 否则尾部积分发散. 因而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

□

9.7 2020fin

Problem 9.51 2020-1

设 $\{f_i\}_{i \in I}$ 是可测函数族, $g = \sup_{i \in I} f_i$. 当 I 是可数集时, g 是否可测? I 是不可数集时, g 是否可测? 证明你的结论.

Proof. 当 I 可数时可测. 因为对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x : g(x) > a\} = \bigcup_{i \in I} \{x : f_i(x) > a\},$$

右边是可数个可测集的并, 所以可测.

当 I 不可数时不一定可测. 取一个不可测集 $V \subset [0, 1]$, 对每个 $t \in V$ 令

$$f_t(x) = \chi_{\{t\}}(x).$$

每个 f_t 都是可测函数, 但

$$\sup_{t \in V} f_t(x) = \chi_V(x),$$

而 χ_V 不可测. 所以不可数族的上确界不一定可测. □

Problem 9.52 2020-2

证明: 非空完全集不可数.

Proof. 这个是刚上课的时候的作业题, 完全集是完备的, 如果可数, 就与 Baire 纲矛盾. □

Problem 9.53 2020-3

设 X 是无穷集, 证明: X 与 $X \times X$ 等势.

Proof. 集合论不讲, 我也不熟. □

Problem 9.54 2020-4

设有可积函数列 f_n 和 f , 满足

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n.$$

证明 $f_n \rightarrow f$ a.e.

Proof. 这都把 BC 引理送到嘴边了.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| < \infty$$

对 a.e. x 成立. 级数收敛当然推出其通项趋于 0, 所以 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. □

Problem 9.55 2020-5

证明: 存在 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足 f' 存在且可积, 并满足不等式

$$\int_0^1 f'(x) dx < f(1) - f(0).$$

Proof. Volterra 函数

$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

□

Problem 9.56 2020-6

证明: 存在不可测集 W , 其可测子集必是零测集.

Proof. 取 $[0, 1]$ 中的一个 Vitali 集 W , 即按等价关系 $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ 每个等价类取一个代表元. 这样的 W 不可测.

现在设 $A \subset W$ 且 A 可测. 若 $m(A) > 0$, 由 Steinhaus 定理, $A - A$ 包含 0 的一个邻域. 于是存在非零有理数 $q \in A - A$, 即有 $a, b \in A$ 使得 $a - b = q$. 但 $A \subset W$, 而 W 中任意两个不同点不可能相差有理数, 矛盾. 因此 $m(A) = 0$. □

Problem 9.57 2020-7

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 (1+x^{2n})^{1/n} dx.$$

Proof. 第一个直接换元 $u = \sqrt{nx}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx} dx &= \frac{2}{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= \frac{2}{n} (\sqrt{n} - \arctan \sqrt{n}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

第二个用控制收敛. 对 $x \in [0, 1]$, $(1+x^{2n})^{1/n} \rightarrow 1$; 对 $x \in (1, 2]$,

$$(1+x^{2n})^{1/n} = x^2(1+x^{-2n})^{1/n} \rightarrow x^2.$$

又

$$(1+x^{2n})^{1/n} \leq 2 \max\{1, x^2\},$$

右边在 $[0, 2]$ 上可积. 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 (1+x^{2n})^{1/n} dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{10}{3}.$$

□

Problem 9.58 2020-8

设 $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 满足: 对任意 n , 任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ 都有

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq 1.$$

证明 $f = 0$ a.e.

Proof. 这个题的表述有点小问题, 因为如果允许取同一个点, 那就是 $f \equiv 0$. 如果不允许的话, 那就考虑 $\{f > \frac{1}{k}\}$ 这样的集合, 这样的集合在条件下显然零测. 总之是水题. □

Problem 9.59 2020-9

设 $\mathbb{R}$ 上 $m(E) < \infty$, f 为 E 上的可测函数, 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在有界可测函数 g , 使得

$$m\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Proof. 这和标准的 Lusin+Tietze 做法只相差了一个有界性. 这可以用测度的连续性, 考虑

$$E_N := \{x \in E : |f(x)| \leq N\}$$

即可. □

Remark. 这个题加上有界就是隔壁班期中考试题, 个人认为 Lusin+Tietze 的处理是学实分析的时候必须学会的方法.

Problem 9.60 2020-10

设 C 为标准 Cantor 集. 证明 C 没有内点, $\{(x, y) : e^x y \in C\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测集. 并进一步证明: 存在没有内点的正测度集.

Proof. 这个题关于 Cantor 集和 Cantor-like set 的部分是平凡的. 映射

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = e^x y$$

连续, 而 C 闭, 所以

$$\{(x, y) : e^x y \in C\} = F^{-1}(C)$$

是闭集, 特别是 Lebesgue 可测集. □

9.8 2019fin

Problem 9.61 2019-1

下列说法是否正确 (证明或举反例): 存在严格单调增加函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = 0.$$

Proof. 这是任老师 PPT 上的例子, 即

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(q_k, \infty)}(x).$$

□

Problem 9.62 2019-2

给出 Tonelli 定理在下列特殊情形的详细证明: 假设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧子集, χ_K 是 K 上的特征函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy \right) dx.$$

Proof. 先看开集. 若 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是有界开集, 可把 U 分解成至多可数个两两不交的半开小矩形的并. 对一个矩形 $Q = I \times J$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q dx dy = |I||J| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_Q(x, y) dy \right) dx.$$

对有限并由可加性得到, 对可数并再用单调收敛定理得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_U dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_U(x, y) dy \right) dx.$$

现在回到紧集 K . 令

$$U_n = \{z \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(z, K) < 1/n\}.$$

则 U_n 是有界开集, 且 $U_n \downarrow K$. 由上一步,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_n} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_n}(x, y) dy \right) dx.$$

左边由测度连续性趋于 $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K dx dy$. 对固定 x , 截面 $(U_n)_x$ 下降到 K_x , 所以

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_n}(x, y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy.$$

又所有 U_n 都包含在某个大矩形中, 右边的截面积函数有一个可积控制. 由控制收敛定理, 右边也收敛到

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy \right) dx.$$

于是得到所需等式.

□

Problem 9.63 2019-3

设 $L^2[0, 2\pi]$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上实值平方可积函数全体, 其内积定义为

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

1. 写出 $L^2[0, 2\pi]$ 的一组标准正交基.

2. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x), \sin(nx) \rangle = 0$.

Proof. (1) 在这个归一化内积下, 一组标准正交基是

$$1, \quad \sqrt{2} \cos nx, \quad \sqrt{2} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) 先对三角多项式 P 看. 若 P 只含到 N 阶三角函数, 则当 $n > N$ 时

$$\langle P, \sin nx \rangle = 0.$$

对一般 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 由三角多项式在 L^2 中稠密, 任取 $\varepsilon > 0$, 可取 P 使得 $\|f - P\|_2 < \varepsilon$. 于是当 $n > N$ 时,

$$|\langle f, \sin nx \rangle| = |\langle f - P, \sin nx \rangle| \leq \|f - P\|_2 \|\sin nx\|_2 \leq \varepsilon.$$

所以 $\langle f, \sin nx \rangle \rightarrow 0$. □

Problem 9.64 2019-4

假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调增加函数, 而且对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

存在, 其值为实数或无穷. 利用 Vitali 覆盖引理证明

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = \infty\}) = 0.$$

Proof. 记 $E = \{x : f'(x) = \infty\}$. 只要证明 $E \cap [a, b]$ 零测即可. 固定 $M > 0$. 对每个 $x \in E \cap [a, b]$, 由 $f'(x) = \infty$ 可知存在任意小的 $h > 0$, 使得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > M.$$

取中心区间 $I = (x-h, x+h)$, 并令 h 足够小使得 $I \subset (a-1, b+1)$. 这些 I 构成 $E \cap [a, b]$ 的 Vitali 覆盖.

由 Vitali 覆盖引理, 可取两两不交的区间 $I_k = (x_k - h_k, x_k + h_k)$, 使得

$$m\left((E \cap [a, b]) \setminus \bigcup_k I_k\right) = 0.$$

对每个 k 有

$$f(x_k + h_k) - f(x_k) > M h_k = \frac{M}{2} |I_k|.$$

又区间 $(x_k, x_k + h_k)$ 两两不交并且都在 $(a-1, b+1)$ 中, 所以由 f 单调递增,

$$\frac{M}{2} \sum_k |I_k| < \sum_k (f(x_k + h_k) - f(x_k)) \leq f(b+1) - f(a-1).$$

因而

$$m(E \cap [a, b]) \leq \sum_k |I_k| \leq \frac{2(f(b+1) - f(a-1))}{M}.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 得 $m(E \cap [a, b]) = 0$. 再对有理端点区间取并, 得 $m(E) = 0$. □

Problem 9.65 2019-5

假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 函数 f_n, f 是 $\mathbb{R}$ 上非负 Lebesgue 可积函数, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Proof. 考虑 $|f_n - f| \leq f_n + f$, 用广义 DCT 即可. □

Problem 9.66 2019-6

假设 α, β 是正常数, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数满足

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad x \in (0, 1].$$

如果 $f \in BV[0, 1]$, 证明 $f \in AC[0, 1]$.

Proof. 上次习题课讲过了, 不写了. □

Problem 9.67 2019-7

假设 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, 计算全变差 $V_0^1 f$.

Proof. 因为

$$f'(x) = 1 - x \geq 0, \quad x \in [0, 1],$$

所以 f 在 $[0, 1]$ 上单调增加. 因而

$$V_0^1 f = f(1) - f(0) = \frac{1}{2}.$$

□