



26春实分析(H)习题课讲义

分析是极限的艺术

Author: 周芾

Last Update: 2026 年 6 月 19 日

目录

1	第一次习题课讲义	3
1.1	作业答案	3
1.2	补充内容	6
2	第二次习题课讲义	12
2.1	作业答案	12
2.2	补充内容	15
3	第三次习题课讲义	24
3.1	作业答案	24
3.2	补充内容	30
4	第四次习题课讲义	46
4.1	作业答案	46
4.2	2025mid	48
4.3	2024mid	53
4.4	2023mid	59
4.5	2022mid	63
4.6	2021mid	68
5	26mid	73
6	第五次习题课讲义	79
6.1	作业答案	79
6.2	补充内容	87
7	第六次习题课讲义	98
7.1	作业答案	98
7.2	补充内容	101
8	第七次习题课讲义	107
8.1	作业答案	107
8.2	补充内容	113
9	第八次习题课讲义	125
9.1	作业答案	125
9.2	一个必须知道的结论	130
9.3	2025fin	132
9.4	2024fin	137
9.5	2023fin	142
9.6	2022fin	146
9.7	2021fin	147
9.8	2020fin	152
9.9	2019fin	155

10 26fin	158
11 终曲	164

1 第一次习题课讲义

1.1 作业答案

Problem 1.1 P13.1

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $f_1 = f$, $f_n = f \circ f_{n-1}$, $n \geq 2$. 若存在 $n_0 \geq 1$, 使得 $f_{n_0}(x) = x$, 则 f 是双射.

Proof. “左逆单, 右逆满.” 由 $f_{n_0} = f \circ f_{n_0-1} = f_{n_0-1} \circ f = \text{Id}$ 可知 f 是双射. $\square$

Problem 1.2 P13.2

不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f , 它在无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上是单射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上不是单射.

Proof. 反证法. 设 $q_1 < q_2 \in \mathbb{Q}$, 使得 $f(q_1) = f(q_2)$, f 不是常值函数, 因此存在 $x_0 \in (q_1, q_2)$ 为 f 在 $[q_1, q_2]$ 上的极值点. 由值域的连通性, 以及 f 在无理数上单射, 可以构造映射 $q: (q_1, x_0)_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \rightarrow (x_0, q_2)_{\mathbb{Q}}$, 使得 $f(\alpha) = f(q(\alpha))$, 这里 $\alpha \in (q_1, x_0)_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$. 由 f 在无理数上单射, q 是一个单射, 但是 $(q_1, x_0)_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ 的基数是 $\mathfrak{c}$, 而 $(x_0, q_2)_{\mathbb{Q}}$ 的基数是 $\aleph_0$, 因此这是不可能的. $\square$

Problem 1.3 P13.3

$f: X \rightarrow Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B \subseteq Y$, 有 $f(f^{-1}(B)) = B$.

Proof. 等式推满射只要考虑 B 为单点集即可, 另一侧显然. $\square$

Remark. 这里对单点集 case 有所跳步, 同学们自行验证.

Problem 1.4 P54.4

设 $f: X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, 试问: 下列等式成立吗?

1. $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$.
2. $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$.

Proof. 1. 这里指出一个基本的集合论事实, f^{-1} 与集合的并, 交, 补 (差) 是交换的, 这个事实可以直接使用, 证明可自行验证. 因此结论成立.

2. 设 $f \equiv c$, $A \subsetneq X$ 即为反例. $\square$

Problem 1.5 P50.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是非空完全集, 试证明对任意的 $x \in E$, 存在 $y \in E$, 使得 $x - y$ 为无理数.

Proof. E 为完全集意为, $E = E'$. 这个题实际上只要证明, 完全集是一个不可数集. 这里给出一个用 Baire 纲定理的证法. 考虑 $E \subseteq \mathbb{R}$, 那么 E 是一个完备度量空间, 若 E 可数, 那么 $E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, 也即 $E = \bigcup_n \{x_n\}$, 这与 Baire 纲定理矛盾, 因此 E 是不可数集. $\square$

Problem 1.6 P50.2

试证明 $x = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.

Proof. 考虑 Cantor 集的三进制表示, 那么 $\frac{1}{4} = (0.\dot{0}\dot{2})_3$, $\frac{1}{13} = (0.\dot{0}\dot{0}\dot{2})_3$. $\square$

Problem 1.7 P38.3(Stein)

Cantor sets of constant dissection. Consider the unit interval $[0, 1]$, and let ξ be a fixed real number with $0 < \xi < 1$ (the case $\xi = 1/3$ corresponds to the Cantor set C in the text).

In stage 1 of the construction, remove the centrally situated open interval in $[0, 1]$ of length ξ .

In stage 2, remove two central intervals each of relative length ξ , one in each of the remaining intervals after stage 1, and so on.

Let C_ξ denote the set which remains after applying the above procedure indefinitely.^a

1. Prove that the complement of C_ξ in $[0, 1]$ is the union of open intervals of total length equal to 1.
2. Show directly that $m_*(C_\xi) = 0$.

Hint: After the k^{th} stage, show that the remaining set has total length $= (1 - \xi)^k$.

^aThe set we call C_ξ is sometimes denoted by $C_{\frac{1-\xi}{2}}$.

Proof. 稍作归纳, 第 n 步中移除的小区间长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1} \xi$, 从而补集的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1} \xi = 1.$$

对于外测度, 注意到第 n 步时, 集合长度为 $(1 - \xi)^n$, 取极限即可. □

Problem 1.8 P38.4(Stein)

Cantor-like sets. Construct a closed set $\hat{C}$ so that at the k^{th} stage of the construction one removes 2^{k-1} centrally situated open intervals each of length ℓ_k , with

$$\ell_1 + 2\ell_2 + \cdots + 2^{k-1}\ell_k < 1.$$

1. If ℓ_j are chosen small enough, then

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\ell_k < 1.$$

In this case, show that $m(\hat{C}) > 0$, and in fact,

$$m(\hat{C}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\ell_k.$$

2. Show that if $x \in \hat{C}$, then there exists a sequence of points $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n \notin \hat{C}$, yet $x_n \rightarrow x$ and $x_n \in I_n$, where I_n is a sub-interval in the complement of $\hat{C}$ with $|I_n| \rightarrow 0$.
3. Prove as a consequence that $\hat{C}$ is perfect, and contains no open interval.
4. Show also that $\hat{C}$ is uncountable.

Proof. 1. 自己算.

2. 其实题干指出了 x_n 的构造, 因为 $x \in \hat{C} \subseteq \hat{C}_k$, 这里取 $x_k \in \hat{C}_k \setminus \hat{C}_{k+1}$ 就行了 (当然在第 k 步中 x_k 与 x 在同一个区间里).

3. 由于 $\hat{C}$ 闭, 有 $\hat{C}' \subseteq \hat{C}$, 另一方面, 利用截断 $\hat{C}_k = \bigcup_{n=1}^{2^k} F_n$, 注意到端点总是留在 Cantor 集中, 选离 x 最近的端点就证明了 $\hat{C} \subseteq \hat{C}'$. 而第二问指出 $\hat{C}$ 当然不含开区间.
4. 完全集不可数.

□

1.2 补充内容

本部分主要参考 THU 归斌老师分析学讲义, 受限于古法 L^AT_EX, 难免有疏漏之处, 感兴趣的读者请移步此处.

1. 测度正则性: 我们如何定义测度?

在课上我们已经知道了抽象测度的定义方法, 或者说, 一个抽象的定义方法 (关于 $\pi - \lambda$ 系统, 预测度的内容就不讲了, 没意思):

$$2^X \text{ 上的外测度} + \text{Carathéodory 条件} \Rightarrow \sigma\text{-代数上的测度}$$

但是为什么是 Carathéodory 条件, 为什么还长成这个样子? 而且很糟糕的事情是, 凭什么这个条件是有效的, 测度常常是符合直觉的对象, 他的定义为什么反而是抽象的. 这就是本话题将讨论的问题. 接下来我们有时会将背景空间假设为 X , 我们总假设他是一个 Hausdorff 空间, 把它想象成 $\mathbb{R}^d$ 或者 $[0, 1]^d$ 也行.

首先对于开集 U , 我们先用如下方式定义开集的 (Lebesgue) 测度

$$m(U) = \sup \left\{ \int f : f \in C_c(U), 0 \leq f \leq 1 \right\}.$$

Remark. 这样定义的测度就是 Lebesgue 测度, 如果直接假设 $\mu : \mathcal{T}_X \rightarrow [0, +\infty]$, 那么则是一个抽象 Radon 测度.

可以证明, 这里的 m 满足单调性, 紧有限性, 连续性, 次可加性 (w.r.t. 开集). 接下来我们定义外测度和内测度, 这里的定义和课上讲的测度正则性是一样的.

$$\text{外测度 } m^*(E) = \inf \{m(U) : E \subseteq U, U \text{ is open.}\} \quad \text{内测度 } m_*(E) = \sup \{m^*(K) : K \subset\subset E.\}$$

那么根据定义, 对开集 U , 有

$$m(U) = m^*(U).$$

我们接下来称集合 E 是 m -正则的, 若 $m^*(E) = m_*(E)$.

Lemma 1.9

任意开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 都是 m -正则的.

Proof. 只要证明 $m_*(U) \geq m(U)$. 比较两个 sup 的定义即可. □

Theorem 1.10

m^* 在 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 上是一个测度. 它的完备化记作 $(\mathcal{M}, m)$, 称为 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Lebesgue 测度**. $\mathcal{M}$ 中的元素称为 **Lebesgue 可测集**. 此外, 对每个有界集合 $E \in \mathcal{M}$, 都有

$$m(E) < +\infty.$$

这个定理的证明是 1.20 和 1.21 的直接推论, 不在此处证明.

接下来我们稍微抽象一些, 直接造抽象的 Radon 测度. 这里我们首先要手动的加上所谓的开集正则性.

$$\mu(U) = \mu^*(U) \text{ for every } U \text{ is open.}$$

为了不产生歧义, 我们整理如下.

Definition 1.11 Radon premeasure

我们称 $\mu : \mathcal{T}_X \rightarrow [0, +\infty]$ 是一个 Radon 预测度, 若 μ 满足:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. (单调性) 若 $U \subset V \subset X$ 且 U, V 都开, 则 $\mu(U) \leq \mu(V)$.

3. (可数次可加性) 对可数多个开集 $U_1, U_2, \dots$, 有

$$\mu\left(\bigcup_n U_n\right) \leq \sum_n \mu(U_n).$$

4. (可加性) 若 U_1, U_2 是互不相交的开集, 则

$$\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Remark. 这里的可数次可加性和可加性蕴含了分离可数可加性 (w.r.t. 开集), 同时, 整个定义中 (带上开集正则性) 不难看出外测度和内测度的单调性.

现在, 我们的目标是, 证明 μ^* 在 $\mathcal{B}_X$ 上有可数可加性. 这里值得一提的是, 一种常见的策略是去考虑所有的正则集, 但这样就不太好讲可数可加性, 同时背景空间是否测度有限也会影响我们的证明 (很多实分析定理往往要求测度的 σ 有限性, 也许你可以想想这里的道理), 因此我们采取下面的证明策略.

Proposition 1.12

μ^* 是次可加的.

Proof. 用 $\epsilon/2^n$ 技巧. 不妨设 $\mu^*(E_n) < \infty$, 对任意 $\epsilon > 0$, 有开集 $E_n \subseteq U_n$ 使得

$$\mu(U_n) \leq \mu(E_n) + \epsilon/2^n.$$

那么

$$m^*(\cup E_n) \leq m^*(\cup U_n) \leq \sum m^*(U_n) \leq \sum m^*(E_n) + \epsilon/2^n = \sum m^*(E_n) + \epsilon.$$

□

接下来证明内测度的可数超可加性.

Proposition 1.13

设 K_1, K_2 是分离的紧集, 那么 $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Proof. 只要证明反向不等式 $\mu(K_1 \cup K_2) \geq \mu(K_1) + \mu(K_2)$. 取开集 $K_1 \cup K_2 \subseteq U$, 做截断得到不交开集 U_i 使得 $K_i \subseteq U_i \subseteq U$, 做不等式即可. □

Proposition 1.14

μ_* 是分离超可加的.

Proof. 由归纳法, 只要证明 $\mu_*(E_1 \cup E_2) \geq \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2)$. 用 1.13 即可. □

Corollary 1.15

E_n 是一族不交的 μ -正则集, 那么他们的并集也是 μ -正则的.

Proof. 这是 1.12 和 1.14 的直接推论. □

接下来的结论真正刻画了什么是正则性.

Corollary 1.16 Regularity

设 $E \subset X$ 满足 $\mu^*(E) < +\infty$. 则 E 是 μ -正则的, 当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 都存在紧集 K 与开集 U 使得

$$K \subset E \subset U \quad \text{且} \quad \mu(U \setminus K) < \epsilon.$$

这个结果有其微妙之处, 因为从定义来看, 我们一直考虑的是 $\mu(U) - \mu(K)$ 是什么, 而这里是 $\mu(U \setminus K)$. 同时注意, 这个结论在无限测度时自然失效.

Proof. 由定义, 我们可以考虑 $\mu(U) - \mu(K)$ 小, 这时注意到, U 和 $U \setminus K$ 都是开集, 而 K 是紧集, 因此都是 μ -正则的, 从而由 1.15, 有 $\mu(U) = \mu(K) + \mu(U \setminus K)$. $\square$

接下来的引理是本话题的主定理的一个特殊情况, 但是证明是相对容易的.

Lemma 1.17

设 E_1, E_2 是 μ -正则子集, 且

$$\mu(E_1) < +\infty, \quad \mu(E_2) < +\infty.$$

则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_2 \setminus E_1$ 都是 μ -正则的.

Proof. 注意到 $E_1 \cap E_2 = E_2 \setminus (E_2 \setminus E_1)$ 和 $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$, 只要证明 $E_2 \setminus E_1$ 是 μ -正则的即可. 我们要用 1.16 来证明此时的结论, 通过一些画图观察, 可知应该考虑集合 $(U_2 \setminus K_1) \setminus (K_2 \setminus U_1)$. 而这里我们通过集合估计得到

$$(U_2 \setminus K_1) \setminus (K_2 \setminus U_1) = U_2 \cap K_2^c \cap (U_1 \cup K_1^c) \subseteq (U_2 \setminus K_2) \cup (U_1 \setminus K_1),$$

这就完成了证明. $\square$

接下来我们希望用这个方式造出合适的 σ 代数, 但是出现了一个问题, 如果全空间测度无限, μ -正则集其实不是一个好的假设, 因此我们引入如下概念.

Definition 1.18 Local regular

设 $E \subset X$, 若对每个满足 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的开集 $\Omega \subset X$, 都有

$$\mu^*(E \cap \Omega) = \mu_*(E \cap \Omega),$$

则称 E 是局部 μ -正则的.

如果对某些可数相关的拓扑性质熟悉的话, 不难意识到下面的引理.

Lemma 1.19

设 $E \subset X$ 且 $\mu^*(E) < +\infty$, 则 E 是 μ -正则的, 当且仅当 E 是局部 μ -正则的.

Proof. 先设 E 局部正则. 由于 $\mu^*(E) < +\infty$, 存在开集 $\Omega \supset E$ 使得 $\mu(\Omega) < +\infty$. 于是 $E \cap \Omega$ 是正则的, 从而 E 是正则的.

反之, 设 E 正则. 令 $\Omega \subset X$ 是满足 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的开集. 由于 Ω 是 μ -正则的, 根据 1.17 $E \cap \Omega$ 是正则的. 所以 E 是局部正则的. $\square$

接下来叙述本话题的主定理.

Theorem 1.20

设 $\mu: \mathcal{T}_X \rightarrow [0, +\infty]$ 满足预测度和开集正则性. 令 $\mathcal{M}_\mu$ 为 X 中所有局部 μ -正则子集所成的集合. 则 $\mathcal{M}_\mu$ 是一个包含 $\mathcal{B}_X$ 的 σ -代数, 并且 μ^* 在 $\mathcal{M}_\mu$ 上是一个完备测度. 我们把该测度空间记作

$$(\mathcal{M}_\mu, \mu).$$

Remark. 其实考虑 Lebesgue 测度就知道, 集合的外测度和内测度未必一样, 这也是我们在所谓可测集上是考虑 $\mu = \mu^*$ 的原因. 若此时的背景空间 X 为局部紧 Hausdorff 空间, 且 μ 在紧集上有限, 那么我们称 μ 是 $\mathcal{B}_X$ 上的一个 Radon 测度.

Proof. 第 1 步: 证明 $\mathcal{M}_\mu$ 是一个 σ -代数. 这是平凡的集合验证, 用 1.17 和 1.15 即可.

第 2 步: 证明 $\mathcal{M}_\mu$ 包含 $\mathcal{B}_X$, 并且 μ^* 在其上是测度. 由开集正则性, 每个开集都是正则的, 因此也局部正则. 所以 $\mathcal{M}_\mu$ 包含 $\mathcal{T}_X$, 从而包含

$$\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{T}_X).$$

验证测度只要说明可数可加性, 设

$$E = \cup_n E_n$$

不妨设 $\mu^*(E) < \infty$. 此时有 $\mu^*(E_n) < \infty$, 由 1.15, 得到了可数可加性.

第 3 步: 证明 μ^* 在 $\mathcal{M}_\mu$ 上完备. 这是外测度天然的性质. □

这里我们看到, 我们通过局部正则性, 造出了一个包含 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备测度空间, 一个自然的问题是, 这个完备测度空间是不是 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备化呢? 下面的结论表明, 在大多数情况下, 这里的构造都是恰到好处的.

Proposition 1.21

假设 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 是 σ -有限的, 则 $(\mathcal{M}_\mu, \mu)$ 就是 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备化.

Proof. 从证明中我们可以看出条件的道理. 利用 σ 有限性, 考虑 $E = \cup_n E_n$, 这里 $\mu(E_n) < \infty$. 利用内正则性, 有 $\mu(E_n \setminus K_j) < \frac{1}{j}$, 此时考虑 $F_k = \cup_{j=1}^k K_j$, 以及 $F = \cup_{k=1}^\infty F_k$ (想想为什么要求两次并集). 可以知道 F 是一个 Borel 集, 并且 $\mu(E_n \setminus F) = 0$. 这时用完备性就说明 E_n 在 $\mathcal{B}_X$ 的完备化中, 从而完成了证明. □

最后, 让我们回答最开始的问题, 我们通过局部正则性定义的可测集, 和之前用 Carathéodory 条件定义的可测集是不是同一个东西.

Theorem 1.22

设 $E \subset X$. 则下列两条等价:

1. E 是局部 μ -正则的.
2. E 是 Carathéodory 意义下的 μ^* -可测集, 也就是说, 对任意 $A \subset X$, 都有

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A).$$

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1). 我们证明一个更强的结论: 局部正则性等价于 Carathéodory 条件限制在有限测度的开集上. 先设 Ω 是包含 E 的有限测度开集 (这里并不假设 E 的性质), 那么我们能证明

$$\mu_*(E) = \mu(\Omega) - \mu^*(\Omega \setminus E).$$

由定义, 两边均为上确界, 因此只要证明,

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ 为紧集}\} = \sup\{\mu(\Gamma) : \Gamma \text{ 在 } \Omega \text{ 中闭, 且 } \Gamma \subset E\}.$$

对于 $\leq$ 一侧, 结论是显然的. 而对于另一侧, 对任意 $\epsilon > 0$, 有紧集 $K \subset \Gamma$ 使得

$$\mu(K) > \mu(\Gamma) - \epsilon.$$

因此 $\geq$ 也成立.

那么改到一般的有限测度开集 Ω , 就是

$$\mu_*(\Omega \cap E) = \mu(\Omega) - \mu^*(\Omega \setminus E).$$

那此时考虑局部正则性的定义, 我们就证明了局部正则性的等价条件, 从而证明了 (2) 到 (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). 此时只要证明 $\leq$, 并且我们不妨假设 $\mu^*(A) < \infty$. 由定义, 我们只要证明对开集 $\Omega \supseteq A$ 有

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu(\Omega).$$

即可, 又根据单调性, 我们只要证明

$$\mu^*(\Omega \cap E) + \mu^*(\Omega \setminus E) = \mu(\Omega).$$

而这正是局部正则性. □

就写到这里吧, 对测度正则性有个基本的认识就行, 能不把测度论当成集合论小游戏就足以证明本讲义没白写.

Remark. 修订本讲义时发现这一部分写的过于粗糙, 是本人的失职, 对曾被本部分困扰的同学感到十分抱歉.

2. Jordan“测度”: 时代的眼泪.

在数学分析 B3 中似乎引入了 Jordan“测度”(其实应该是叫容量) 的概念, 这里通过一个习题说明这个概念的落后性. 为了方便, 我们只考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Jordan 容量.

首先是 Jordan 外容量,

$$J^*(E) = \inf \sum_{n=1}^N |I_n|,$$

这里 $\inf$ 遍历 E 的有限覆盖 $\cup_{n=1}^N I_n$, 其中 I_n 都是区间.

由于这里是有限覆盖, 因此我们立刻看出, $J^*(E) = J^*(\bar{E})$. 此时问题就大了, 因为这意味着

$$J^*([0, 1]_{\mathbb{Q}}) = J^*([0, 1]_{\mathbb{Q}}) = J^*([0, 1]) = 1.$$

而同时 Jordan 内容量其实应该对应定义为内部的简单集合膨胀, 也就是说 $J_*([0, 1]_{\mathbb{Q}}) = 0$, 因此 $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ 不是 Jordan 可测集. 同时这也自动说明了, Jordan 容量不具有可数可加性, 或者说没有合适的 σ 代数, 所以不能被称为测度.

3. σ 代数的基数

这个题目灵感来自课上例题, Borel σ 代数的基数是 $\mathfrak{c}$, 那一般的无限 σ 代数呢? 事实上可以证明, 无限 σ 代数的基数至少是 $\mathfrak{c}(= 2^{\aleph_0})$.

设 σ 代数 Σ 可数, 那么 $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n, \dots\}$. 对 $x \in X$, 定义

$$C_x = \left(\bigcap_{x \in A_i} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{x \notin A_j} A_j^c \right).$$

可自行验证如下性质:

1. $C_x \in \Sigma$.
2. C_x, C_y 要么不交, 要么相同.
3. 每个 $A \in \Sigma$ 可以写成若干 C_x 的并集.

若 C_x 是无限个两两不交的集合, 此时做并集就说明 $|\Sigma| \geq 2^{\aleph_0}$, 若 C_x 只有有限个两两不同的集合, 那么 A_n 本身也是有限个, 因此无限 σ 代数至少有连续统基数.

2 第二次习题课讲义

2.1 作业答案

Problem 2.1 P25.14

试证明全体超越数的基数是 c .

Proof. 首先, 代数数是整系数多项式的根集, 而超越数是代数数的补集. 因此只要说明代数数是可数的. 我们考虑截断, 设 A_n 是次数 $\leq n$ 的整系数多项式的根集, 注意到系数取值是可数的, 而每个多项式的根是有限的, 因此 A_n 是可数集. 进一步, $\cup_n A_n$ 也是可数的. 因此代数数可数, 超越数不可数. $\square$

Problem 2.2 P43.2

$\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是一类标准的实分析习题, 将函数问题集合表示, 然后变成测度问题或者积分问题. 因为这里没有极限函数, 所以要考虑 Cauchy 列. 这里注意, 收敛是有限项后要有小性, 因此是用上限集刻画. 也就是

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq N} \{|f_n - f_m| \leq \frac{1}{l}\}.$$

所谓 $\epsilon \rightarrow 0$ 就是对 l 取极限, 从而有

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n,m \geq N} \{|f_n - f_m| \leq \frac{1}{l}\}}_{\text{closed}}.$$

这里的闭性是因为连续性等价于闭集的原像是闭的, 上课应该讲过. $\square$

Problem 2.3 P55.19

设 f 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性, 并且对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 是闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

Proof. 如果我们能证明 $\{f \leq q\}$ 是闭集, 那么就能证明

$$\{f \leq a\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}, a \leq q} \{f \leq q\}$$

是闭集, 那么我们就完成了证明 (因为我们只要对拓扑基验证原像性质). 而由对称性, 我们只要证明 $A_q := \{f < q\}$ 是开集. 反证法, 若不然, 存在 $x_0 \in A_q$, 使得有点列 $x_n \notin A_q$, 满足 $x_n \rightarrow x_0$, 且 $f(x_n) \geq q$, 而由介值性, 就有 y_n 在 x_0 和 x_n 之间, 满足 $f(y_n) = q$, 并且 $y_n \rightarrow x_0$. 但是 $\{f = q\}$ 是闭集, 这就说明 $q > f(x_0) = \lim_n f(y_n) = q$, 矛盾! 因此我们完成了证明. $\square$

Problem 2.4 p55.30

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

Proof. 用 Darboux 中值定理, 我们知道 f' 有介值性, 由 2.3 即可. $\square$

Problem 2.5 P94.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 且存在 $0 < q < 1$, 使得对任一区间 (a, b) , 都有开区间列 $\{I_n\}$:

$$E \cap (a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 本题有不同的看法, 如果已经知道群里的外测度的密度定理, 这里就相当于在说, 一个有正外测度的集合密度显然不小于 1, 因此完成了证明. 但是我们这里不引用这个结论, 而是考虑迭代的办法,

$$E \subseteq (a, b) \Rightarrow E \subseteq \bigcup_n I_n \Rightarrow E \cap I_n \subseteq \bigcup_m I_{n,m} \cdots$$

在测度侧我们相当于有

$$m^*(E \cap (a, b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} m(I_{n,m}) \leq (b-a)q^2.$$

右侧的 2 是我们的迭代次数, 因为 $q < 1$, 我们就说明了 $m^*(E \cap (a, b)) = 0$. 从而 $m(E) = 0$.

另一种证法是考虑开集 $U \supset E$, 满足 $m^*(E) + \epsilon > m(U)$, 然后由开集结构定理, 记 $U = \bigcup_n I_n$, 那么对每一个 I_n , 都有

$$m^*(E \cap I_n) < q|I_n|.$$

求和即为

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n) < q \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = qm^*(U) < q(m^*(E) + \epsilon).$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$ 即可得到 $m^*(E) = 0$.

Remark. 这里没说 E 的可测性, 在证明零测集前别乱写 $m(E)$! 最后一种证法中, 需要先利用欧氏空间的 σ 有限性做截断, 然后再用外正则性论证. 证明中跳过了这一步, 考试时如果碰到类似情况需要指出仅需要考虑测度有限情形. 事实上绝大多数欧氏空间的测度问题都可以第一步简化到有限或有界情形.

□

Problem 2.6 P94.2

设 $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_1 \subseteq A_2$, A_1 是可测集, 且 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 试证明 A_2 是可测集.

Proof. 如果知道等测包的概念, 这里大概是在说, 有等测核的集合是可测的, 因此等测包和等测核的地位并不对等. 证明就是走 Carathéodory 条件.

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) \Rightarrow m^*(A_2 \setminus A_1) = 0.$$

这表明 $A_2 \setminus A_1$ 可测, 从而 $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ 可测.

□

Problem 2.7 P94.7

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$, 试证明:

$$m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} m(E_k).$$

Proof. 这个结论在大家学了 Fatou 引理后可能会有不同的看法. 不过这里是直接的计算.

$$\begin{aligned}
 m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) &= m(\bigcap_{l=1} \bigcup_{k \geq l} E_k) \\
 &= \lim_{l \rightarrow \infty} m(\bigcup_{k \geq l} E_k) \\
 &= \limsup_{l \rightarrow \infty} m(\bigcup_{k \geq l} E_k) \\
 &\geq \limsup_{l \rightarrow \infty} m(E_l).
 \end{aligned}$$

□

Problem 2.8 P94.8

设 $\{E_k\}$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集合列, $m(E_k) = 1 (k = 1, 2, \dots)$, 试证明:

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1.$$

Proof. 这道题看起来和 Baire 纲说的事有点像, 不过这是形式上的看法. 我们直接计算

$$\begin{aligned}
 m(\bigcap_k E_k) &= 1 - m(\bigcup_k E_k^c) \\
 &\geq 1 - \sum_k m(E_k^c) = 1.
 \end{aligned}$$

□

2.2 补充内容

1. 可测集与不可测集

这里我们主要关心函数和可测性的关系, 首先我们回忆定义.

Definition 2.9 Measurable functions

$f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ 是可测函数, 若对任意 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 子集 U , 都有 $f^{-1}(U)$ 是 μ -可测的.

这个定义其实隐含一个想法, “原像往往是好的, 而像集则未知”. 我们先处理原像. 由定义, 连续函数的原像能保持开集, 闭集, Borel 集 (因为 f^{-1} 可以和集合运算交换), Lebesgue 可测集. 不过, 零测集并不是稳定的.

Example 2.10

对于连续 (或可测) 函数, 零测集的原像未必零测.

考虑常值函数即可.

接下来我们考虑像的性质. 首先是最经典的例子.

Example 2.11

可测函数在可测集上的像未必可测.

考虑 Cantor 集 $\mathcal{C}$, Vitali 集 N , 我们知道 $\mathcal{C}$ 的基数是 $\mathfrak{c}$, Vitali 集的基数也是 $\mathfrak{c}$ (这时因为每个等价类的基数是可数的, 而他们的并集是不可数的), 因此这里存在一个满射 $g : \mathcal{C} \rightarrow N$, 现在我们构造函数

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathcal{C} \\ 0 & x \notin \mathcal{C}. \end{cases}$$

这个函数是可测的, 因为可测函数可以修改零测集上的取值但不改变可测性, 而常值函数可测, 因此这个函数可测. 因此我们实际上说明了, 可测函数可以把零测集打到不可测集. 当然, 实际上有一个更应该记忆的例子, 就是连续函数可以把零测集打到不可测集.

Example 2.12

连续函数可以把零测集打到不可测集.

考虑 Cantor 函数 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, Vitali 集 N , 那么令 $E = f^{-1}(N) \cap \mathcal{C}$, 我们有

$$f(E) = N,$$

这是因为任意 $y \in N$, 由于 $f(\mathcal{C}) = [0, 1]$, 存在 $x \in \mathcal{C}$, 使得 $f(x) = y$, 因此 $x \in E$. 其实我们稍微延拓一下, 可以造出一个例子, 使得连续函数把正测度集打到不可测集.

Example 2.13

连续函数可以把正测度集打到不可测集.

我们对 Cantor 函数做常值延拓, 也即

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ f(x) & x \in [0, 1] \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

E 还是 2.12 的定义, 令 $A = [-1, 0] \cup E$, 那么 $m(A) = 1$, 而 $\tilde{f}(A) = \{0\} \cup E$ 还是不可测的. 最后用这个延拓后的函数, 我们还能说明连续函数能把不可测集打到正测集.

Example 2.14

连续函数可以把不可测集打到正测集.

仍然用 $\tilde{f}$, 现在我们考虑 $N' \subseteq [2, 3]$, 也就是平移后的 Vitali 集合. 那么 $E' = \mathcal{C} \cup N'$ 就是一个不可测集, 但是 $\tilde{f}(E') = [0, 1]$.

总之, 原则就是像集的性质可以很古怪, 构造例子尝试用 Cantor 函数和 Cantor 集就行了, 一般都能试出来的.

2. Borel-Cantelli 引理的应用

这里我们展示一些与 Borel-Cantelli 引理有关的例题, 希望以此反映一些分析和概率论中的想法. 在做题中至少应该知道, Borel-Cantelli 是为数不多能用来证明 a.e.(a.s.) 收敛的工具. 在讲例题之前, 我们先把 Borel-Cantelli 引理的表述写一下.

Theorem 2.15 Borel-Cantelli lemma

若一系列可测集 $\{E_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$, 那么

$$m(\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k) = 0.$$

为什么这个定理能帮助证明几乎处处收敛呢? 首先我们知道, 几乎处处收敛就是除去零测集后的逐点 (pointwise) 收敛, 而处处收敛意思实际上是, 除去有限项后的收敛, 因此可以被下限集刻画, 而对偶的考虑不收敛点 (因为几乎处处收敛是要刻画这个集合零测), 那么就自然是考虑上限集. 因此 Borel-Cantelli 引理的出现是合情合理的. 接下来的例题中, 我们将不再重复这里的论证过程.

接下来的例子大多数取材于概率论, 或许可以把这些内容当成概率论习题课.

Example 2.16 矩有界

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 是随机变量列. 若存在 $p > 0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty,$$

证明

$$X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 任取 $\epsilon > 0$. 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{\epsilon^p}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon \text{ i.o.}) = 0.$$

□

Remark. 本题其实和 2025 年实分析 (H) 期末第二题是相同的道理.

Example 2.17 矩带速率

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 满足: 存在 $p > 0, \delta > 0, C > 0$ 使得

$$\mathbb{E}|X_n|^p \leq Cn^{-1-\delta}, \quad n \geq 1.$$

证明 $X_n \rightarrow 0$ a.s.; 并进一步证明: 对任意

$$0 < \alpha < \frac{\delta}{p},$$

都有

$$n^\alpha X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 先证 $X_n \rightarrow 0$ a.s.. 对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) \leq \epsilon^{-p} \mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p}n^{-1-\delta}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理, $X_n \rightarrow 0$ a.s.

再证带速率的结论. 对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|n^\alpha X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon n^{-\alpha}) \leq \epsilon^{-p} n^{\alpha p} \mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p} n^{-1-\delta+\alpha p}.$$

由于 $\alpha < \delta/p$, 故 $-1-\delta+\alpha p < -1$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|n^\alpha X_n| > \epsilon) < \infty.$$

再次应用 Borel-Cantelli 引理可得

$$n^\alpha X_n \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Example 2.18 四阶矩与强大数律

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{E}X_1^4 < \infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof. 由独立性, 同分布性及 $\mathbb{E}X_1 = 0$, 展开四次方可得

$$\mathbb{E}S_n^4 = n \mathbb{E}X_1^4 + 6 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = n \mathbb{E}X_1^4 + 3n(n-1)(\mathbb{E}X_1^2)^2.$$

故存在常数 $C > 0$ 使得

$$\mathbb{E}S_n^4 \leq Cn^2.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| > \epsilon n) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\epsilon^4 n^4} \leq \frac{C}{\epsilon^4 n^2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Remark. 从级数求和那一步可以看出, 本题的四阶矩是绰绰有余的, 这个数主要是可以用二项式定理把奇次项的矩消去, 从这个角度看, 要降低矩条件的一个自然策略是把尾概率先丢掉从而提升可积性.

Example 2.19 方差条件到强大数律

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 相互独立, 满足

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

这里形式上出现了 $\frac{X_k^2}{k^2}$ 的求和, 因此我们需要补充一个 Kronecker 引理, 证明可以点这里或这里.

Lemma 2.20

若序列 $\{x_n\}$ 求和收敛到有限数 s , 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s < \infty,$$

那么对一列实数 $0 < b_1 < b_2 < \dots, b_n \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k x_k = 0.$$

同时, 这里涉及到一个方差估计, 因此我们还要引入 Kolmogorov 最大不等式, 一个不涉及鞅的证明是停时 (stopping-time) 论证, 接下来有一次习题课应该会讲一些停时的内容, 因此这里暂时不写出证明, 可以参考这里.

Theorem 2.21 Kolmogorov inequality

设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量列, 满足 $\mathbb{E}X_i = 0$ 和 $\text{Var}(X_i) < \infty$, 那么记 $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, 就有

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Proof. 考虑级数

$$T_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}.$$

只需证明 $\{T_n\}$ 几乎处处收敛, 再由 Kronecker 引理推出 $S_n/n \rightarrow 0$ a.s.

下面证明 $\{T_n\}$ 几乎处处是 Cauchy 列. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}\left(\frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < \infty,$$

可取严格递增整数列 $\{N_j\}_{j \geq 1}$, 使得

$$\sum_{k > N_j} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{-3j}, \quad j \geq 1.$$

定义事件

$$A_j := \left\{ \sup_{m \geq N_j} \left| \sum_{k=N_j+1}^m \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j} \right\}.$$

对任意 $M > N_j$, 由 Kolmogorov 最大不等式,

$$\mathbb{P} \left(\max_{N_j < m \leq M} \left| \sum_{k=N_j+1}^m \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j} \right) \leq 2^{2j} \sum_{k=N_j+1}^M \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2}.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 得

$$\mathbb{P}(A_j) \leq 2^{2j} \sum_{k > N_j} \frac{\text{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{2j} \cdot 2^{-3j} = 2^{-j}.$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理和最开始的转化, 我们完成了证明. □

Example 2.22 高阶矩估计

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{E}|X_1|^p < \infty$$

其中 $p > 2$. 记

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$

证明: 对任意 $\alpha > \frac{1}{2}$, 都有

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

这个例题在估计 p 阶矩的时候要用 Rosenthal 型不等式, 变体太多因此就不列出定理, 这里用到的其实是, 当 $p \geq 2$, 对一系列独立且 $\mathbb{E}X_i = 0$ 的随机变量, 有

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n X_i \right|^p \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right).$$

一个参考是这里. 这个定理本身还是比较符合直觉的, 一个联想是稀疏波 (频率支撑在不同的二进环带上) 的平方函数计算, 也许学过调和分析会比较有感觉?

Proof. 由 Rosenthal 最大不等式, 存在只依赖于 p 和 $\mathbb{E}|X_1|^p$ 的常数 $C_p > 0$, 使得对任意 $m \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k|^p \right] \leq C_p 2^{mp/2}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha} \right) \leq \frac{\mathbb{E} [\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k|^p]}{\epsilon^p 2^{m\alpha p}} \leq C_p \epsilon^{-p} 2^{-mp(\alpha - \frac{1}{2})}.$$

由于 $\alpha > \frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha} \right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{1}{2^{m\alpha}} \max_{1 \leq k \leq 2^m} |S_k| \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

现取任意 n , 令 m 满足 $2^m \leq n < 2^{m+1}$. 则

$$\frac{|S_n|}{n^\alpha} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{m\alpha}} = 2^\alpha \cdot \frac{\max_{1 \leq k \leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{(m+1)\alpha}}.$$

右端几乎处处趋于 0, 故

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

□

Remark. 这里用到的应该是叫二进制列法, 不用这个方法就要处理 $n^{-p(\alpha-1/2)}$ 的收敛性, 那么对 α 的要求就变成了 $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ 了.

Example 2.23 高斯尾估计

设 $\{X_n\}_{n \geq 1}$ 独立, 且 $X_n \sim N(0, 1)$. 证明: 对任意 $\epsilon > 0$,

$$|X_n| \leq (1 + \epsilon) \sqrt{2 \log n}$$

几乎处处最终成立.

Proof. 记

$$t_n := (1 + \epsilon) \sqrt{2 \log n}.$$

标准高斯尾估计表明: 存在常数 $C > 0$, 使得对一切 $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq C \frac{e^{-t^2/2}}{t}.$$

(不用复杂的估计, 凑个 $\frac{t}{t} \leq \frac{x}{t}$ 进去分部积分就行了, 概率论作业里有 Mills 比有关的证明, 道理是类似的)

取 $t = t_n$, 则当 n 足够大时,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t_n) \leq C \frac{e^{-t_n^2/2}}{t_n} = C \frac{n^{-(1+\epsilon)^2}}{(1 + \epsilon) \sqrt{2 \log n}}.$$

由于 $(1 + \epsilon)^2 > 1$, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > t_n) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|X_n| > (1 + \epsilon) \sqrt{2 \log n}$$

只会发生有限次. 换言之,

$$|X_n| \leq (1 + \epsilon) \sqrt{2 \log n}$$

几乎处处最终成立.

□

Example 2.24 L^p 收敛和几乎处处收敛

设 $p > 0$, f_n, f 是测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的可测函数, 并满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

证明

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

Proof. 任取 $\epsilon > 0$, 定义

$$E_n^\epsilon := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}.$$

由 Chebyshev 不等式,

$$\mu(E_n^\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \frac{1}{\epsilon^p} \|f_n - f\|_p^p.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^\epsilon) \leq \epsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$$

只会对几乎处处的 x 发生有限次.

再对所有正有理数 ϵ 取可数交, 得

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

□

Remark. 从本题可以自然得到一个从 L^p 收敛序列抽取出几乎处处收敛子列的办法.

3. Lebesgue 外测度的密度

本部分讲解课程群中提到的外测度的密度, 一般这类证明都会用到覆盖定理 (看过 Evans 的测度论就知道套路了), 因此这里先介绍我们要用到的工具. 这一工具一般叫做 Vitali covering 定理或者 $5r$ -covering 定理.

Lemma 2.25 $5r$ covering lemma

设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一族开球, 并且这些球的半径有统一上界. 则存在一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

其中若 $B = B(x, r)$, 则 $5B := B(x, 5r)$.

Theorem 2.26

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是任意集合, m^* 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 外测度. 则对 m^* -几乎处处的 $x \in E$, 有

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} = 1,$$

其中 $|B(x, r)|$ 表示该球的 Lebesgue 测度.

Proof. 一般来说, 这类证明都要定义一个坏点集, 然后通过覆盖定理证明坏点集能被覆盖住并且覆盖本身具有小性.

因此我们固定 $t \in (0, 1)$, 定义坏点集

$$A_t := \left\{ x \in E : \liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 - t \right\}.$$

我们先证明

$$m^*(A_t) = 0.$$

一旦这一点成立, 定理便立刻推出. 因为,

$$\left\{ x \in E : \liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 \right\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_{1/n},$$

故左边这个集合有零外测度. 另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意 $r > 0$, 总有

$$0 \leq \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} \leq 1,$$

因此

$$\limsup_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} \leq 1.$$

所以在 E 中除去一个零外测度集后, 上述比值的 $\liminf$ 至少为 1, 而 $\limsup$ 至多为 1, 从而极限存在且等于 1.

下面证明 $m^*(A_t) = 0$.

我们不妨假设 $A = A_t$ 有界, 这是因为

$$A_t = \bigcup_{N=1}^{\infty} (A_t \cap B(0, N)).$$

固定 $\epsilon > 0$. 由于 A 有界, 故 $m^*(A_t) < \infty$. 由外测度的定义, 可取开集 $U \supset A$, 使得

$$|U| < m^*(A) + \epsilon.$$

我们注意到, 若 $X \subset U$ 是 Lebesgue 可测集, 则

$$m^*(A \cap X) \geq |X| - \epsilon.$$

这是因为

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap X) + m^*(A \setminus X) \leq m^*(A \cap X) + m^*(U \setminus X) \\ &= m^*(A \cap X) + m^*(U) - m^*(X) < m^*(A \cap X) + m^*(A) + \epsilon - m^*(X). \end{aligned}$$

现在任取 $x \in A$. 因为 $x \in A_t$, 由 A_t 的定义可知

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x, r))}{|B(x, r)|} < 1 - t.$$

又由于 U 是开集且 $x \in U$, 故可取 $r_x > 0$, 使得

$$r_x < 1, \quad B(x, r_x) \subset U,$$

并且

$$m^*(E \cap B(x, r_x)) < (1 - t)|B(x, r_x)|.$$

记

$$B_x := B(x, r_x).$$

于是 $\{B_x\}_{x \in A}$ 是覆盖 A 的一族开球, 且所有半径都被 1 所控制.

由 $5r$ covering lemma, 可从中选出一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, 满足

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

令

$$X := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

则 $X \subset U$, 且 X 是可测集. 因为这些球两两不交, 所以

$$|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|.$$

接下来从上估计 $m^*(A \cap X)$. 由于 $A \subset E$, 由外测度的可数次可加性,

$$m^*(A \cap X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap B_i) < (1-t) \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = (1-t)|X|.$$

另一方面, 因为 $X \subset U$ 且 X 可测, 由前面得到的观察可知

$$m^*(A \cap X) \geq |X| - \epsilon.$$

合并这两个不等式, 得

$$|X| - \epsilon < (1-t)|X|,$$

从而

$$|X| < \frac{\epsilon}{t}.$$

最后, 由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

所以

$$m^*(A) \leq \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |5B_i| = 5^d \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = 5^d |X| < \frac{5^d}{t} \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 便得到

$$m^*(A) = 0.$$

这就完成了证明. □

3 第三次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P78.1

设 $E \subset [0, 1]$, 若 $m(E) = 1$, 试证明 $\bar{E} = [0, 1]$; 若 $m(E) = 0$, 试证明 $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.

Proof. 第一部分是直接的, 因为

$$1 = m([0, 1]) \geq m(\bar{E}) \geq m(E) = 1 \Rightarrow m(\bar{E}) = 1.$$

第二部分是反证法, 若 E 有内点, 就有开球 $B \subset E$, 但是 $0 < m(B) \leq m(E) = 0$, 这不可能! $\square$

Problem 3.2 P78.2

设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n \subset A_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Proof. 这个题相当于用分离性让外测度具有分离可加性, 某种意义上来说, 能从外测度的定义直接看出来. 当然更直接的办法是用 Carathéodory 条件去拆这个集合.

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_1\right) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_1\right) \\ &= m^*(B_1) + m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) \\ &= \dots \\ &\geq \sum_{n=1}^N m^*(B_n). \end{aligned}$$

对 N 取极限即可得到

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

用次可加性得到另一侧不等式, 从而完成了证明.

Remark. 同学们一定要熟练使用 Carathéodory 条件, 很多外测度定义上讲不清楚的事情其实可以直接简化成集合计算, 失去直观性得到的就是论证的极大简化. 以及同学们别把 Carathéodory 条件和 Carathéodory 定理搞混了, 后者是指从外测度构造完备测度的定理. $\square$

Problem 3.3 P78.5

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0 < \alpha < m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F , 使得 $m(F) = \alpha$.

Proof. 本题需要指出的是, 直接使用测度连续性构造出来的集合不一定是紧集, 应该先用内正则性收缩出紧集, 然后再用连续性. 首先内正则性, 得到紧集 $K \subset E$, 满足 $\alpha < m(K) < m(E)$. 构造正半轴上的函数 $f(x) = m(K \cap [-x, x])$. 这个函数是连续的, 因为

$$f(x + \delta) - f(x) = m(K \cap [-x - \delta, x + \delta]) - m(K \cap [-x, x]) = m(K \cap ([-x - \delta, x) \cup (x, x + \delta])) \leq 2\delta.$$

因此我们利用介值性, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $m(K \cap [-x_0, x_0]) = \alpha$. 现在令 $F = K \cap [-x_0, x_0]$, 那么 $m(F) = \alpha$. $\square$

Problem 3.4 P94.9

设 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 是 $[0, 1]$ 中的可测集, 且有

$$\sum_{i=1}^k m(E_i) > k - 1,$$

试证明

$$m\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) > 0.$$

Proof. 一般来说并集比交集好处理一些 (因为定义里唯一非平凡内容就是并集), 因此我们考虑补集. 此时条件就变成了

$$1 > \sum_{i=1}^k m(E_i^c) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^c\right).$$

而这正好等价于题目结论. $\square$

Problem 3.5 P84.2

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, $B \subset \mathbb{R}^n$. 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Proof. 由 Carathéodory 条件, 有

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A).$$

上下相减即得结论. 其中第一个等式来自 B 用 A 拆分, 第二个等式来自 $A \cup B$ 用 A 拆分. $\square$

Problem 3.6 P95.12

$\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集合列, $m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k$ ($k = 1, 2, \dots$), $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

Proof. 如果要模仿测度连续性的证明, 那拆集合的时候出现的不等号就会比较麻烦, 因此这里通过等测包给出一个更干净的证明. 设 H 是 A 的等测包, 那么

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \leq m(H \cap B) + m(H \setminus B) = m(H) = m^*(A).$$

这就说明 $H \cap B_k$ 是 E_k 的等测包. 从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(H \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(H \cap B) = m^*(E).$$

本题也有一个不用等测包的方法, 要利用 3.5. 不妨设 B_k 测度有限 (不然用不了连续性).

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} m^*(A \cap B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (m^*(A) + m^*(B_k) - m^*(A \cup B_k)) \\ &\leq m^*(A) + m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) - m^*\left(A \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) = m^*\left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right) = m^*(E). \end{aligned}$$

这样就给出了上界, 而下界是显然的, 从而完成了证明 (道理上就是用两次 Carathéodory 条件, 因此也可以不用 3.5).

Remark. 改作业的时候改到了海量不同证法, 其中参考 3.2 也是一种比较好的证法, 总之这道题本质还是去用 Carathéodory 条件去拆集合, 感觉用等测包反而不是一个很合适的办法 (所以同学们在参考往年答案的时候应该带着自己的思考). 同时这道题在改的时候发现很多同学不加证明/引用的使用了周民强书上的外测度的 Fatou 引理 (这个的证明思路就是用外正则性去扰动, 然后用测度的 Fatou 引理), 这种习惯不太好, 会给读者带来了不必要的负担, 考试的时候完全不建议这样写.

□

Problem 3.7 P95.13

$E \subset \mathbb{R}^n$, $H \supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H - E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

Proof. 取 E 的等测包 $H' \subset H$, 那么

$$m(H) = m(H') + m(\underbrace{H \setminus H'}_{\subset H \setminus E}) = m(H') = m^*(E).$$

□

Problem 3.8 P95.14

试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2 , $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Proof. 其实本题是第一次习题课的补充内容. 根据条件, 存在一系列开集 $\{G_n\}_{n \geq 1}$, $G_n \supset E$, 使得

$$m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

令

$$G = \bigcap_{n \geq 1} G_n,$$

那么

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

故 $G - E$ 是零测集 (外测度为零), 故可测, 从而

$$E = G - (G - E)$$

也是可测. 另一方面, 由于 E, E^c 可测, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2 , $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 - E) < \frac{\epsilon}{2}, \quad m(G_2 - E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

从而

$$m(G_1 \cap G_2) = m((G_1 - E) \cup (G_2 - E^c)) < \epsilon.$$

□

(以上内容将不在习题课讲评, 同学们自行对照)

Problem 3.9 P107.1

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且

$$\{x \in E : f(x) > 0\}$$

是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

Proof. 直接按照定义来, 稍微做一下分类即可. 若 $a > 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f^2 > a^2\} \cap \{f > 0\}.$$

若 $a \leq 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f > 0\} \cup \{f^2 < a^2\}.$$

□

Problem 3.10 P109.6

设 $f \in C([a, b])$. 若有定义在 $[a, b]$ 上的函数 $g(x)$: $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

Proof. 当然不是, 考虑 $f = 0$, 而 g 为 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数, 那么 $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [0, 1]$, 但是 Dirichlet 函数不是几乎处处连续的.

Remark. 这个题说明, 零测集的扰动完全破坏了连续函数的刚性. 函数的刚性是一个可以感知到的性质, 一个好的例子是去对比连续泛函演算和 Borel 泛函演算的谱映照定理, 当刚性被破坏, 好的性质应该在什么意义下去考虑.

□

Problem 3.11 P126.2

设 $z = f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$$

是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 要证明可测性只要看像空间的基的原像是否可测, 这里 F 实际上可以看成 $F = f \circ h$, $h(x) = (g_1(x), g_2(x))$. 由于 f 是连续函数, 现在只要验证 h 是可测函数. $\mathbb{R}^2$ 上的拓扑基是开矩体, 那么对任意开矩体 $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, 有

$$h^{-1}(R) = g_1^{-1}(\alpha, \beta) \cap g_2^{-1}(\gamma, \delta),$$

因为 g_1, g_2 都是可测的, 这个集合是可测的.

改作业改到用开圆盘论证的, 但是就应该写成 $\{(g_1(x) - a)^2 + (g_2(x) - b)^2 < r^2\}$ 是可测的, 不过似乎没人这样写. 用开集结构定理的方法不赖, 和用生成元是类似的.

□

Problem 3.12 P126.3

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 右导数就是右差商的极限, 因此实际上我们只要证明右连续函数是可测函数就可以了. 这里我们不假设同学们学过拓扑学 (因为用 Sorgenfrey 拓扑的 Lindelöf 性质就是显然的了). 现在我们考虑 $A = \{f > a\}$, 那么根据右连续性, 容易知

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + \delta_x) = A,$$

但是这样重叠太多了, 没有办法证明这里能挑出一个可数覆盖从而证明可测性, 因此这里我们需要给 $\delta_x > 0$ 加一些条件,

$$\delta_x := \sup\{\delta : f(x) > a, f(x + \delta) > a\}.$$

那么此时我们知道 $[x, x + \delta_x)$ 与 $[y, \delta_y)$ 要么有包含关系要么完全不交, 因此我们就能取出代表元作为覆盖, 而这个覆盖一定是可数的, 因为覆盖中的每一个元素都包含了有理数, 相当于天然得到了一个从代表元到 $\mathbb{Q}$ 的嵌入, 因此是可数的, 那么我们就得到了可测性.

还有一种比较好的做法, 就是考虑阶梯函数逼近

$$\phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k + 1/2^n) \chi_{[k/2^n, (k+1)/2^n)}(x).$$

证明这个函数逐点收敛要注意

$$x \leq x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n} < x + \frac{1}{2^n}.$$

那么有

$$\phi_n(x) = f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Remark. 这里我把做题思路写出来了, 希望没有完全做出来的同学能好好看看这里的思路.

□

Problem 3.13 P119.1

设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E?$$

Proof. 用 Riesz 定理, $f_n \rightarrow f$ a.e., 而又有子列 $f_{n_k} \rightarrow f$ a.e., 那么 $f = g$ a.e..

□

Problem 3.14 P119.4

试问: $f_n(x) = \cos^n x$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

Proof. 是的, 直观上看就是端点附近是 1, 然后其他地方都能收敛到 0, 因此我们直接证明 f_n 依测度收敛到 0. 按照如下计算即可.

$$m(|f_n| > \epsilon) \leq 2m([0, \arccos \epsilon^{1/n})) \rightarrow 0.$$

□

Problem 3.15 P127.12

设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x) \cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

Proof. 其实也是集合的三角不等式, 因为

$$\{|f_n g_n| > \epsilon\} \subset \{|f_n| > \sqrt{\epsilon}\} \cup \{|g_n| > \sqrt{\epsilon}\}.$$

然后和 3.13 一样就行了.

□

Problem 3.16 P109.7

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

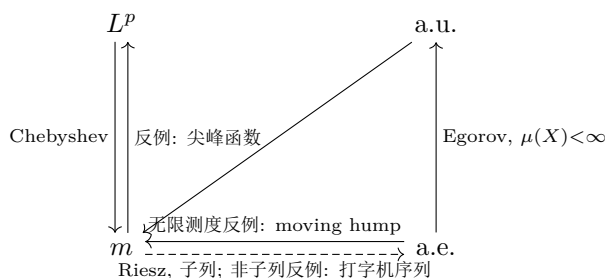
Proof. 当然不存在, 因为可以考虑 $f = \chi_{[0, \infty]}$. 这时任何一个连续函数 g 在跳跃点 $x = 0$ 处都有邻域 U , 使得 g 在 U 上的扰动 $< 1/2$, 那么就给出一个正测集 $U \cap (-\infty, 0)$, 使得 $g \neq f$.

Remark. 不过同学们要意识到, 这里如果是允许一个小测度的误差, 那么是可以构造的, 方法是用 Lusin 定理 + Tietze 扩张.

□

3.2 补充内容

1. 收敛性关系与例子



(助教画图能力有限, 将就看吧, 一个画图工具链接点这里)

先回忆一下各种收敛性的定义和等价测度刻画.

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为可测函数.

1. 几乎处处收敛, a.e.

定义是

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0.$$

用集合语言刻画就是上限集测度为零, 这个推导见2.15下方, 也即对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

2. 依测度收敛, in measure(注意不是convergence of measure)

定义就是测度刻画

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \rightarrow 0.$$

3. 几乎一致收敛, almost uniformly

这个定义来自 Egorov 定理, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在集合 $E \subset X$ 满足 $\mu(X \setminus E) < \epsilon$, 且

$$f_n \rightarrow f \quad \text{在 } E \text{ 上一致收敛.}$$

等价可以写成, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_k \mu \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j - f| \geq \epsilon\} \right) = 0.$$

从这里可以看出 a.u. 收敛蕴含依测度收敛.

4. L^p 收敛, $1 \leq p < \infty$

这个比较直接, 就是

$$\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

同学们一定不要记成 $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$, 这两个东西要互推需要加条件!

现在我们给出上述图中的三个反例.

1. 尖峰函数

这个就是说, 能量集中在一点. 令

$$f_n = n\chi_{[0, 1/n]},$$

那么 $\|f_n\|_1 = 1$, 但是 f_n 依测度收敛到 0, 因为支集在缩小. 因此说明了反例.

2. 打字机序列

这个字面来看就是从左往右来回扫过. 令

$$f_{n,k} = \chi_{[(k-1)/2^n, k/2^n)},$$

其中 $1 \leq k < 2^n$. 不难看出这个序列依测度收敛到 0, 因为函数的支集在缩小. 但是函数在 $[0, 1)$ 上无处收敛, 因为每隔一段时间就要从 0 变成 1, 从而说明了反例.

3. moving hump

这个的意思是质量滑向无穷远, 接下来将指出, 这是一个弱收敛的标准模型, 同时一道经典考题 (来自泛函分析 II) 就是用的这里的构造思路.

令

$$f_n = \chi_{[n, n+1]},$$

那么函数列几乎处处收敛到 0, 但是无法控制的测度一直是 1, 因此说明了反例.

2. 如何使用收敛定理 (本部分由于课程顺序和时间关系, 不一定在习题课上讲, 但是希望同学们在备考时适当参考)

实分析大手子彦哥指出, 先用 DCT, DCT 用不了的用 Fatou, 再用不了就只能 Egorov, 再再用不了就得弱收敛或者这题有问题. 我觉得他说的对.

DCT 例题

以下默认考虑欧氏空间与 Lebesgue 测度

Example 3.17 高度

设 $f \in L^1(E)$. 证明

$$\int_E f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}} d\mu \longrightarrow \int_E f(x) d\mu.$$

Proof. 令

$$f_n(x) := f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}}.$$

则对几乎处处的 $x \in E$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e. on } E.$$

同时

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|, \quad |f| \in L^1(E).$$

于是由控制收敛定理,

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu.$$

即

$$\int_E f(x) \mathbf{1}_{\{|f(x)| \leq n\}} d\mu \rightarrow \int_E f(x) d\mu.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是有界函数.

Example 3.18 尾部

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 证明

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} d\mu \rightarrow 0.$$

Proof. 令

$$f_n(x) := |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}}.$$

对几乎处处的 $x \in E$, 因为 $|f(x)| < \infty$ a.e., 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\mathbf{1}_{\{|x|>n\}} \rightarrow 0,$$

从而

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{a.e. on } E.$$

并且

$$0 \leq f_n(x) \leq |f(x)|, \quad |f| \in L^1(E).$$

由 DCT,

$$\int f_n d\mu \rightarrow 0.$$

即

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} d\mu \rightarrow 0.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是紧支函数.

Example 3.19 Fourier 变换

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

Proof. 本题主要是要知道在欧氏空间证明连续性只需要证明序列连续性.

任取 $t_n \rightarrow t$. 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$e^{it_n x} \rightarrow e^{itx},$$

从而

$$f(x) e^{it_n x} \rightarrow f(x) e^{itx}.$$

又注意到

$$|f(x) e^{it_n x}| = |f(x)|.$$

由于 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 $|f|$ 可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{it_n x} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx.$$

即

$$F(t_n) \rightarrow F(t).$$

故 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

□

Example 3.20 平移连续

设 $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 对 $h \in \mathbb{R}^d$, 记

$$\tau_h f(x) := f(x - h).$$

证明

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Proof. 这题的标准做法是: 先在好函数类上证明, 再用稠密性推广.

第零步: $C_c(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{dense}}{\subset} L^p$

这里我不想重复下一题的证明, 因此给出另一种证明思路. 可积函数可以被有界函数逼近, 因为 3.17. 然后这里用简单函数逼近, 但是还做不到连续性, 因此用一下 3.16 下的注记, 也就是用 Lusin+Tietze 就能得到一个连续函数. 最后算一下积分误差, 我们能注意到其实只对一个小测度集上做了扰动, 而因为我们提前说了有界性, 因此这个扰动是可以接受的, 从而完成了证明. 过程可以自己算一下, 这个结论一般不需要证明.

第一步: 先设 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

对每个固定的 $x \in \mathbb{R}^d$, 由连续性,

$$f(x - h) \rightarrow f(x) \quad (h \rightarrow 0).$$

因此

$$|f(x - h) - f(x)|^p \rightarrow 0 \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^d.$$

下面找支配函数. 因为 f 具有紧支撑, 所以当 $|h| \leq 1$ 时, 函数 $x \mapsto f(x - h)$ 的支撑都落在某个固定的大球 $B(0, R)$ 中. 又由于 f 连续且紧支撑, 因此有界, 设

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

于是当 $|h| \leq 1$ 时,

$$|f(x - h) - f(x)|^p \leq (2M)^p \mathbf{1}_{B(0, R)}(x),$$

而右边可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0.$$

第二步: 推广到一般 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

由 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 任给 $\epsilon > 0$, 可取 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 使得

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

于是

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h(f - g)\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

又因为平移保持 L^p 范数,

$$\|\tau_h(f - g)\|_p = \|f - g\|_p < \epsilon.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

由第一步知, 当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\|\tau_h g - g\|_p \rightarrow 0.$$

所以

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 得

$$\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0.$$

□

Example 3.21 光滑化

设 $\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 满足 $\eta \geq 0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dx = 1.$$

定义

$$\eta^\epsilon(x) := \epsilon^{-d} \eta(x/\epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

1. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq p < \infty$), 证明

$$\eta^\epsilon * f \rightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

2. 若 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且在点 x 处连续, 证明

$$(\eta^\epsilon * f)(x) \rightarrow f(x).$$

Proof. (1) 证明 L^p 收敛.

先积分换元, 把卷积写成

$$(\eta^\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) f(x - \epsilon y) dy.$$

于是

$$(\eta^\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) dy.$$

因此由 Minkowski 积分不等式,

$$\|\eta^\epsilon * f - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p dy.$$

对每个固定的 $y \in \mathbb{R}^d$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时有 $\epsilon y \rightarrow 0$, 由上一题的平移连续性,

$$\|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \rightarrow 0.$$

另一方面,

$$\|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \leq \|\tau_{\epsilon y} f\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p.$$

故

$$0 \leq \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p \leq 2\|f\|_p \eta(y),$$

而 $2\|f\|_p \eta(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 于是对变量 y 应用 DCT, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) \|\tau_{\epsilon y} f - f\|_p dy \rightarrow 0.$$

从而

$$\|\eta^\epsilon * f - f\|_p \rightarrow 0.$$

(2) 证明连续点处的点态收敛.

固定 x , 有

$$(\eta_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) f(x - \epsilon y) dy.$$

于是

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) (f(x - \epsilon y) - f(x)) dy.$$

因为 f 在 x 处连续, 所以对每个固定的 y , 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,

$$f(x - \epsilon y) \rightarrow f(x).$$

因此

$$\eta(y)(f(x - \epsilon y) - f(x)) \rightarrow 0 \quad \text{for every } y \in \mathbb{R}^d.$$

又因为 $f \in L^\infty$, 设 $\|f\|_\infty \leq M$, 则

$$|\eta(y)(f(x - \epsilon y) - f(x))| \leq 2M\eta(y),$$

而 $2M\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由 DCT,

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) \rightarrow 0.$$

即

$$(\eta_\epsilon * f)(x) \rightarrow f(x).$$

□

Remark. 这两个题往年考过类似的, 务必掌握, 至少掌握 L^1 版本的计算.

Fatou 例题

任爷曾说过, 这个 Fatou 引理就像我们科大的学生, 在校内看不出什么, 拿到社会上就变得很厉害. 同学们要相信自己的实力, 即使哪门课没学好, 或者早早放弃基数, 都不代表任何能力上的缺失, 不过是选择一条适合自己的路 (所以不要不知道选啥方向就选基数, 这很糟糕).

一般来说, Fatou 引理是天然的下半连续性, 在变分法中起到保持能量有界的作用. 等号不成立的一些例子是逃逸 ($\chi_{[n, n+1]}$) 或者消散 ($\frac{1}{n}\chi_{[0, n]}$) 再或者集中 ($n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$), 这能联想到一些深刻的分析内容, 但和我们的课程内容无关. 以上是题外话.

Example 3.22 函数列有比较关系

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有

$$f_n \geq h_n \quad \text{a.e.}$$

又设

$$f_n \rightarrow f \quad \text{a.e.}, \quad h_n \rightarrow h \quad \text{a.e.},$$

并且

$$\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu > -\infty.$$

证明

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Proof. 令

$$u_n := f_n - h_n.$$

则 $u_n \geq 0$ a.e., 且由 $f_n \rightarrow f$ 和 $h_n \rightarrow h$ a.e. 可得

$$u_n \rightarrow f - h \quad \text{a.e.}$$

由 Fatou 引理,

$$\int (f - h) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - h_n) d\mu.$$

于是

$$\int f d\mu - \int h d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu - \int h_n d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu - \int h d\mu.$$

也就是

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

□

Remark. 仿照这里的过程, 可以证明广义 DCT: 设 $f_n, g_n, f, g \in L^1$, 且 $f_n \rightarrow f$ a.e., $g_n \rightarrow g$ a.e., 且 $|f_n| \leq g_n$, $\int g_n \rightarrow \int g$, 那么 $\int f_n \rightarrow \int f$. 提示是对 $g_n + f_n \geq 0$ 和 $g_n - f_n \geq 0$ 分别使用 Fatou 引理. 这里要强调, 两侧都要使用比较函数的 Fatou, 有一侧直接使用函数列的 Fatou 是错的, 因为没有 positivity.

Example 3.23 依测度收敛取子列

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有

$$f_n \geq h_n \quad \text{a.e.}$$

又设

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in measure}, \quad h_n \rightarrow h \quad \text{in measure},$$

并且

$$\int h_n d\mu \rightarrow \int h d\mu > -\infty.$$

证明

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Proof. 设

$$L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

若 $L = +\infty$, 结论显然成立. 下设 $L < +\infty$.

任取满足

$$\int f_{n_k} d\mu \rightarrow L$$

的子列 $\{f_{n_k}\}$. 由于 $f_{n_k} \rightarrow f$ in measure, 由子列原则可取进一步子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$, 使得

$$f_{n_{k_j}} \rightarrow f \quad \text{a.e.}$$

再对对应的 $\{h_{n_{k_j}}\}$ 应用子列原则, 可再取进一步子列, 仍记为 $\{n_{k_j}\}$, 使得

$$h_{n_{k_j}} \rightarrow h \quad \text{a.e.}$$

于是沿着这条子子列, 已满足第 1 题的全部假设, 从而

$$\int f d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int f_{n_{k_j}} d\mu.$$

但右边恰好等于 L , 因为 $\int f_{n_k} d\mu \rightarrow L$, 这是我们之前选好的. 故

$$\int f d\mu \leq L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

证毕. □

上面两个题就是比较经典的 Fatou 引理例题了, 一个是构造正的比较函数, 一个是取子列, 考试中也基本是这些方法. 下面补充一个用广义 DCT 的题目.

Example 3.24 依范数收敛与范数收敛

设 $f_n \rightarrow f$ a.e., 且 $\|f_n\|_1 \rightarrow \|f\|_1$, 那么 $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Proof. 由条件, 有 $f_n \in L^1$, 那么 $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \in L^1$, 由广义 DCT, 就有

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

□

Egorov

一般来说用到 Egorov 定理的题目都是有点难度的题目了.

Example 3.25 高阶矩有界 + 逐点收敛得到一阶矩收敛

设 $m(E) < \infty$. 设 $f_n \rightarrow 0$ a.e. 于 E , 并且存在 $p > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} \leq C.$$

证明

$$\|f_n\|_{L^1(E)} \rightarrow 0.$$

Proof. 对固定的 $\epsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset E$ 满足 $m(E \setminus A) < \epsilon$, 使得 $f_n \rightarrow 0$ on A , 然后我们直接拆积分

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| dx &= \int_A |f_n| dx + \int_{E \setminus A} |f_n| dx \\ &\leq m(A) \sup_A |f_n| + (m(E \setminus A))^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p. \quad (\text{用一致收敛和 Hölder 不等式}) \end{aligned}$$

然后前面用一致收敛到 0, 后面用 L^p 有界性加测度小性, 由于 ϵ 是任取的, 就完成了证明. □

另一个很好的例子是有限测度空间中 L^1 有界 + 一致可积推出 L^1 弱紧性的证明, 其实一致可积就是值域的尾部小性, 也就是防止函数的能量集中到一点, 使得紧性缺失. 不过受限于课程内容就不展开讲了. 这个证明可参考 Evans 的 Measure Theory, Theorem 1.44.

3. 收敛性与例子

a.e. 收敛的题目在上次习题课讲了很多 (Borel-Cantelli 引理), 然后依测度收敛的题目主要是 3.23, 3.13 和 3.15, 因此这里主要讲 L^p 收敛相关的内容, 最后介绍一些弱收敛的内容. 其实如果不是做题, 感觉 L^p 收敛和弱收敛才是最常用的.

Example 3.26 范数极限

设 $1 \leq p < \infty$, 且 $f \in L^p \cap L^\infty$. 于是对每个 $q > p$, 都有 $f \in L^q$. 证明

$$\|f\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q.$$

Proof. 记

$$M := \|f\|_\infty.$$

先证上极限不超过 M . 对任意 $q > p$, 由 $|f| \leq M$ a.e., 得

$$|f|^q = |f|^{q-p}|f|^p \leq M^{q-p}|f|^p.$$

两边积分可得

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \leq M^{q-p} \int |f|^p = M^{q-p} \|f\|_p^p.$$

于是

$$\|f\|_q \leq M^{1-p/q} \|f\|_p^{p/q}.$$

令 $q \rightarrow \infty$, 得

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \leq M.$$

再证下极限不小于 M . 任取 $\epsilon > 0$, 令

$$A_\epsilon := \{x : |f(x)| > M - \epsilon\}.$$

由于 M 是本性上确界, 所以 $\mu(A_\epsilon) > 0$. 因而对每个 $q > p$,

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \geq \int_{A_\epsilon} |f|^q \geq (M - \epsilon)^q \mu(A_\epsilon).$$

于是

$$\|f\|_q \geq (M - \epsilon) \mu(A_\epsilon)^{1/q}.$$

令 $q \rightarrow \infty$, 注意到 $\mu(A_\epsilon)^{1/q} \rightarrow 1$, 得

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \geq M - \epsilon.$$

再令 $\epsilon \downarrow 0$, 得

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q \geq M.$$

综合上下极限, 即得

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q = M = \|f\|_\infty.$$

□

Example 3.27 Vitali 收敛定理

设 $1 \leq p < \infty$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(X)$. 证明: $\{f_n\}$ 在 L^p 范数下是 Cauchy 列的充要条件是下面三条同时成立:

1. $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 即对每个 $\eta > 0$,

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

2. $\{|f_n|^p\}$ 一致可积. 也就是说, 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_n \int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

3. 对每个 $\epsilon > 0$, 存在可测集 $E \subset X$, 使得 $\mu(E) < \infty$, 且

$$\int_{E^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon \quad \text{for } \forall n.$$

Proof. 分必要性和充分性两部分.

必要性. 设 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列.

(i) 证明 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的.

任取 $\eta > 0$. 由 Chebyshev 不等式,

$$\mu(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta^p} \int |f_n - f_m|^p d\mu = \frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{\eta^p}.$$

由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 右边当 $m, n \rightarrow \infty$ 时趋于 0. 故 (i) 成立.

(ii) 证明 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积.

这个的思路是用 Cauchy 列和积分的绝对连续性, 讲后面的序列粘起来. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

又因为 $|f_N|^p \in L^1$, 所以存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta_0$, 就有

$$\int_A |f_N|^p d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是对 $n \geq N$, 若 $\mu(A) < \delta_0$, 则

$$\int_A |f_n|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_A |f_n - f_N|^p d\mu + 2^{p-1} \int_A |f_N|^p d\mu < 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} + 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \dots, N-1$, 因为每个 $|f_n|^p \in L^1$, 可分别取 $\delta_n > 0$, 使得 $\mu(A) < \delta_n$ 时

$$\int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

令

$$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}\},$$

则只要 $\mu(A) < \delta$, 对所有 n 都有

$$\int_A |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

故 (ii) 成立.

(iii) 证明有限测度截断条件.

这个思路和上面一步思路类似, 尾序列都用第 N 项粘住, 有限项随便处理就行. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

因为 $|f_N|^p \in L^1$, 存在可测集 $E_0 \subset X$, 使得

$$\mu(E_0) < \infty, \quad \int_{E_0^c} |f_N|^p d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是当 $n \geq N$ 时,

$$\int_{E_0^c} |f_n|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_n - f_N|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_N|^p d\mu < \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \dots, N-1$, 可分别取可测集 $E_n \subset X$, 使得

$$\mu(E_n) < \infty, \quad \int_{E_n^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

令

$$E := E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{N-1}.$$

则 $\mu(E) < \infty$, 且由于 $E^c \subset E_0^c$ 以及 $E^c \subset E_n^c$, 对所有 n 都有

$$\int_{E^c} |f_n|^p d\mu < \epsilon.$$

故 (iii) 成立.

充分性. 现设 (i), (ii), (iii) 都成立. 证明 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. 我们的思路是, 将积分按机制拆分, 主部 E 的估计可以用依测度收敛拆成大误差和小误差, 小误差直接算, 大误差放到一致可积里, 然后主部外 E^c 基本可以丢掉, 那么就做完了.

任取 $\epsilon > 0$. 我们要证明当 m, n 充分大时,

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

由 (iii), 可取可测集 $E \subset X$, 使得

$$\mu(E) < \infty, \quad \int_{E^c} |f_k|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p} \quad \text{对所有 } k.$$

再取 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

由 (ii), 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_k \int_A |f_k|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

由 (i), 因为 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 可取 N , 使得当 $m, n \geq N$ 时,

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}) < \delta.$$

记

$$A_{mn} := \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}.$$

现在把积分分成三部分:

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu + \int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu + \int_{E^c} |f_n - f_m|^p d\mu.$$

对第一部分, 因为在 $E \setminus A_{mn}$ 上有 $|f_n - f_m| < \lambda$, 所以

$$\int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu \leq \lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第二部分, 由 $|a - b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_n|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_m|^p d\mu.$$

由于 $\mu(A_{mn}) < \delta$, 由 (ii) 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}, \quad \int_{A_{mn}} |f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

故

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第三部分, 同样由 $|a - b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$, 得

$$\int_{E^c} |f_n - f_m|^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_{E^c} |f_n|^p d\mu + 2^{p-1} \int_{E^c} |f_m|^p d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

三部分相加可得, 当 $m, n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_X |f_n - f_m|^p d\mu < \epsilon^p.$$

因此

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

故 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. □

最后, 我们来通过弱收敛, 加强我们对收敛性的理解. 其实这样说是原因的, 因为弱收敛中有三种标准机制, 使其区别于强收敛 (一般称 L^p 收敛为强收敛).

Definition 3.28 收敛性

设 X 是赋范线性空间, $x_n, x \in X$.

强收敛. 称 x_n 强收敛到 x , 记作

$$x_n \rightarrow x,$$

如果

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

弱收敛. 称 x_n 弱收敛到 x , 记作

$$x_n \rightharpoonup x,$$

如果对每个连续线性泛函 $f \in X^*$, 都有

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Remark. 这里可以想的简单一些, 就考虑 $(L^p)^* = L^{p'}$, 这里 $1 \leq p < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 承认这个事情, 对于理解下面的内容够用了.

强收敛一定推出弱收敛. 因为若 $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, 则对任意 $f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

但是反过来一般不成立. 这种现象只会在无限维空间中出现. 在有限维空间里, 弱收敛与强收敛是等价的.

从直观上看, 强收敛要求“整体上靠近”, 而弱收敛只要求“在测试意义下逼近”. 因此, 如果一个序列能够通过某种方式躲过这些测试, 就可能出现“弱收敛但不强收敛”.

这种躲避有三种典型方式:

振荡, 逃逸, 集中.

下面分别讨论.

模型一: 振荡

考虑 $L^2(0, 2\pi)$ 中的函数列

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

首先,

$$\|u_n\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi,$$

因此 $\|u_n\|_{L^2}$ 恒定不变, 所以 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, u_n 却弱收敛到 0. 直观上说, $\sin(nx)$ 的频率越来越高, 正负振荡越来越快, 积分后测试函数被抵消了. 当然严格来讲就是 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(0, 2\pi).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把“不收敛的部分”藏在越来越细的振荡里.

模型二: 逃逸

考虑 $L^p(\mathbb{R})$, 其中 $1 < p < \infty$. 取一个固定函数 $\phi \in L^p(\mathbb{R})$, 定义

$$u_n(x) = \phi(x - n).$$

由于平移不改变 L^p 范数, 有

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

因此 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 图像整体向右平移, 越来越远离原点附近. 对任意固定的测试函数 φ , u_n 与 φ 的重叠越来越少, 所以

$$\int_{\mathbb{R}} u_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0.$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列让质量逃逸到无穷远.

Remark. 习题课的时候我提到了一个消散 (vanish) 的机制, 这个其实也应该算作逃逸的例子, 因为能量也是在往无穷远转播.

模型三: 集中

考虑 $L^p(0, 1)$, 其中 $1 < p < \infty$, 定义

$$u_n(x) = n^{1/p} \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(x).$$

直接计算可得

$$\|u_n\|_{L^p(0, 1)}^p = \int_0^{1/n} n dx = 1,$$

因此

$$\|u_n\|_{L^p(0, 1)} = 1.$$

于是 u_n 不可能强收敛到 0.

另一方面, u_n 的支集越来越小, 全部质量都集中到 $x = 0$ 附近越来越窄的区域. 对任意固定测试函数 $\varphi \in L^{p'}(0, 1)$, 有

$$\int_0^1 u_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(0, 1).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把质量压缩到越来越小的尺度中. 从线性观测的角度看, 这种集中仍然可能不可见.

接下来讲一个弱收敛的例子, 其实约等于 Riemann-Lebesgue 引理.

在 ℓ^2 中考虑标准基

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots),$$

其中第 n 个分量为 1, 其余分量为 0.

显然

$$\|e_n\|_{\ell^2} = 1,$$

所以 e_n 不可能强收敛到 0.

但是, 对任意 $y = (y_k) \in \ell^2$, 有

$$\langle e_n, y \rangle = y_n \rightarrow 0,$$

因为 $y \in \ell^2$ 有 $y_k \rightarrow 0$. 因此

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^2.$$

这个例子可以看作“滑行无穷远”的抽象版本. 它不是在实线上向右平移, 而是在坐标方向上跑向越来越远的位置.

前面的例子表明, 在很多无限维空间里, 弱收敛比强收敛弱得多. 但是 ℓ^1 是一个非常特殊的空间. 我们将证明如下结果.

Example 3.29 饺子醋

ℓ^1 中弱收敛等价于强收敛.

我们先来套典型机制, 看看为什么不能弱而不强. 首先作为离散序列空间, 本身就不能像 L^2 中通过振荡和集中来实现弱而不强, 而对于逃逸来说, ℓ^1 的对偶空间是 ℓ^∞ 空间, 这个空间太大了, 在里面考虑测试序列 $(\frac{1}{\text{sgn}(a_1)}, \dots, \frac{1}{\text{sgn}(a_n)}, \dots)$, 能让所有质量都无所遁形, 因此我们很有理由去相信这个结果是对的.

我们的证明就是去造测试序列, 抓取想要逃逸的质量, 从而实现强收敛.

Proof. 先说一下我们的构造策略: 因为有弱收敛, 所以我们当然能压制住某项后的所有序列 $x_{n \geq N}$, 使得他们的质量集中在尾巴 $\{x_{n \geq N} (i \gg 1)\}$ 上, 然后我们就归纳的构造我们的测试函数, 一步一步抓取更大范围的质量.

反设

$$x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^1,$$

但

$$\|x_n\|_{\ell^1} \not\rightarrow 0.$$

那么通过取子列, 不妨仍设存在 $\delta > 0$, 使得

$$\|x_n\|_{\ell^1} \geq 5\delta, \quad \forall n \geq 1.$$

这里的 5δ 是纯技术设定, 只是为了后续分配质量方便一些.

把 x_n 写成

$$x_n = (x_n(i))_{i \geq 1}.$$

由于每个坐标映射

$$x \mapsto x(i)$$

都是 ℓ^1 上的连续线性泛函, 由 $x_n \rightarrow 0$ 可知, 对每个固定的 $i \geq 1$, 都有

$$x_n(i) \rightarrow 0.$$

下面归纳地构造严格递增序列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k \geq 1}$, 使得

$$\sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta, \quad (1)$$

以及

$$\sum_{i=1}^{i_k} |x_{n_{k+1}}(i)| < \delta. \quad (2)$$

构造过程如下.

先取 $n_1 = 1$. 由于 $x_{n_1} \in \ell^1$, 可取 i_1 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| < \delta.$$

这就得到了 (1) 在 $k = 1$ 时的结论.

接着, 由于对每个 $1 \leq i \leq i_1$ 都有 $x_n(i) \rightarrow 0$, 故可取 $n_2 > n_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

再由 $x_{n_2} \in \ell^1$, 可取 $i_2 > i_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

如此归纳下去, 就得到严格递增序列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k \geq 1}$ 满足 (1) 与 (2).

现在定义 $y = (y(i))_{i \geq 1} \in \ell^\infty$ 如下. 令 $i_0 = 0$, 并在每个块

$$i_{k-1} + 1 \leq i \leq i_k$$

上定义

$$y(i) = \overline{\operatorname{sgn}(x_{n_k}(i))}, \quad k \geq 1.$$

其中约定

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

于是显然 $|y(i)| \leq 1$, 从而

$$\|y\|_{\ell^\infty} \leq 1,$$

故 $y \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$.

在开始下面的估计前, 还是画个图展示一下我们要怎么证明.

$$3\delta, i_k + 1 \xrightarrow{\text{gliding hump}} i_{k+1}$$

$$\delta \xrightarrow{\quad} i_k$$

$$\delta, i_{k+1} + 1 \xrightarrow{\quad}$$

意会一下即可.

接下来估计 $y(x_{n_k})$. 对任意 $k \geq 1$, 有

$$y(x_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x_{n_k}(i).$$

把求和拆成三段,

$$\{1, \dots, i_{k-1}\}, \quad \{i_{k-1} + 1, \dots, i_k\}, \quad \{i_k + 1, i_k + 2, \dots\}.$$

由于在中间这一段上 $y(i) = \overline{\text{sgn}(x_{n_k}(i))}$, 所以

$$\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} y(i)x_{n_k}(i) = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)|.$$

从而

$$\begin{aligned} |y(x_{n_k})| &\geq \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| \\ &= \|x_{n_k}\|_{\ell^1} - 2 \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - 2 \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)|. \end{aligned}$$

由构造可知, 当 $k \geq 2$ 时,

$$\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| < \delta, \quad \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta,$$

再结合 $\|x_{n_k}\|_{\ell^1} \geq 5\delta$, 得

$$|y(x_{n_k})| > 5\delta - 2\delta - 2\delta = \delta.$$

而当 $k = 1$ 时, 由 $i_0 = 0$ 以及 (1), 同样有

$$|y(x_{n_1})| \geq \sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_1}(i)| - \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| = \|x_{n_1}\|_{\ell^1} - 2 \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| > 5\delta - 2\delta = 3\delta > \delta.$$

因此对每个 $k \geq 1$, 都有

$$|y(x_{n_k})| > \delta.$$

这就矛盾了. 因为 $y \in (\ell^1)^*$, 而 $x_n \rightharpoonup 0$, 必有

$$y(x_n) \rightarrow 0,$$

从而其任意子列也应趋于 0, 不可能满足

$$|y(x_{n_k})| > \delta, \quad \forall k \geq 1.$$

矛盾说明反设不成立, 所以

$$\|x_n\|_{\ell^1} \rightarrow 0.$$

于是

$$x_n \rightharpoonup x \implies \|x_n - x\|_{\ell^1} \rightarrow 0.$$

这就证明了 ℓ^1 中弱收敛与强收敛等价. □

4 第四次习题课讲义

4.1 作业答案

Problem 4.1 P119 5

若 $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$, 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}) = 0?$$

Proof. 考虑 $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,1]}$, 可见结论错误. □

Problem 4.2 P119 6

设 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

Proof. 有单调性, 子列当然能控制整体. 用 Riesz 定理就行了. □

Problem 4.3 P123 1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试问: 是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

Proof. 当然不行, 这个题的道理和 3.16 是一样的, 考虑 $\chi_{[0,\infty]}$ 即可. □

Problem 4.4 P123 2

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测, 试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

Proof. 思路是 Lusin 定理和 Weierstrass 逼近定理. 利用 Lusin 定理, 可以找到一系列连续函数几乎处处收敛到 f . 一个比较好说清楚的写法是, 直接用 Lusin 定理, 然后相当于得到了依测度收敛序列, 用 Riesz 定理就得到几乎处处收敛子列. 然后用 Weierstrass 定理, 写过程用放缩就行, 比如

$$\lim_n |f(x) - p_n(x)| \leq \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + \liminf_n |f_n(x) - p_n(x)| \leq \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + \|f_n - p_n\|_\infty.$$

但是这里还有最后一个问题, 就是 Lusin 定理在使用的时候, 要假定函数是几乎处处有限的. 因此在构造连续函数逼近时, 第一步应该将 f 改造成 $\frac{f}{1+|f|}$, 然后先逼近, 再拉回即可. 这里反函数是 $\frac{x}{1-|x|}$. 用广义实值化的 $\tan$ 和 $\arctan$ 也是一样的. □

Remark. 改作业的时候发现只有极少数同学注意到这一点, 所以我直接放过去了, 但是同学们还是注意细节.

课后有同学问到这个几乎处处有限的问题, 这里确实存在一个定义上的问题, 同学们如果看过不同的书可能也遇到过. 有的书将可测函数定义为 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 也就是这个函数其实天然就是几乎处处有限的, 这个定义可以很自然推广到复值实变函数上. 另一种定义则是 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, 这个定义应该是任老师采用的定义, 这里要采用单点紧化的拓扑, 也就是说, 收敛到 $+\infty$ 是指任意 $M > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$, 则 $f_n(x) > M$, 想清楚这一点后, 这个题目就没有问题了. 当然两种定义都能做出这道题, 以及这两种定义各

有优劣, 几乎处处有限的定义可以让 Lusin 定理之类的看起来更加广泛, 同时 L^1_{loc} 函数 (这个东西几乎是最弱性质了, 上个学期 PDE 也是这样讲的) 显然也是几乎处处有限的. 另一种定义会让理论更加完备, 毕竟也可以不要求函数都是局部可积的. 几何测度论就会区分为 integrable 和 summable 两种概念. 考试建议用广义实值定义, 不过大概率不会涉及这两种定义的问题.

4.2 2025mid

Problem 4.5 2025-1

谈谈你对 Lebesgue 可测集合的认识: 定义, 与开集, Borel 集的关系.

Proof. • (1') 外测度定义.

- (3') Carathéodory 条件.
- (3') $m(U \setminus E) < \epsilon$.
- (3') Borel 集 $\pm$ 零测集.

□

Problem 4.6 2025-2

谈谈你对 Lebesgue 可测函数的认识: 定义, 与特征函数, 连续函数的关系, 以及关于极限运算是否封闭.

Proof. • (1') f 广义实值.

- (4') E 可测 (1'), $\{x \in E : f(x) > t\}$ 可测.
- (2') $\mathcal{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle$, $A \subset E$ 可测.
- (2') Lusin 定理.
- (2') 封闭性.

□

Remark. 这两个题比较莫名其妙, 注明的分值仅代表 25 年评分标准. 不过还是要注意, 至少要把题目提到的词解释一下.

Problem 4.7 2025-3

计算集合族

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} : m(A) = 0\}$$

的势.

Proof. 结论是

$$|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

上界显然成立, 因为 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 所以

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

下界取标准 Cantor 集 C . 因为

$$m(C) = 0,$$

Lebesgue 测度是完备的, 所以 C 的任意子集都是零测集. 因而

$$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{F}.$$

又因为 $|C| = \mathfrak{c}$, 所以

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

故

$$|\mathcal{F}| \geq 2^c.$$

综上,

$$|\mathcal{F}| = 2^c.$$

□

Problem 4.8 2025-4

设 C 是 $[0, 1]$ 区间三等分 Cantor 集. 函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in C, \\ (-2)^{-n}, & x \text{ 落在构造过程中第 } n \text{ 次舍去的长为 } 3^{-n} \text{ 的区间.} \end{cases}$$

计算

$$\int_0^1 |f(x)| dx.$$

Proof. 在 25 年的评分标准中, 说明函数可测占 2 分.

因为 $m(C) = 0$, 所以 C 上取值为 $+\infty$ 不影响积分.

第 n 次删去的区间共有

$$2^{n-1}$$

个, 每个长度为

$$3^{-n},$$

且在上述区间上

$$|f(x)| = 2^{-n}.$$

故第 n 层的贡献为

$$2^{n-1} \cdot 3^{-n} \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

于是

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{4}.$$

□

Problem 4.9 2025-5

计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx.$$

Proof. 首先要知道这里的逐点极限是

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-x}.$$

(必须知道这个, 而且不需要证明这个.)

然后用 MCT/DCT(用单调性就行, 这是数分结论) 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

不会算这个积分的话可能会比较凄凉, 不过过程应该是不用写的.

□

Problem 4.10 2025-6

设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负的 Lebesgue 可积函数. 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x \in [0, 1] : f(x) \geq k\}) < \infty.$$

Proof. 由分布函数,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\infty} m(\{x : f(x) \geq t\}) dt.$$

因此

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} m(\{x : f(x) \geq t\}) dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} m(\{x : f(x) \geq k+1\}).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\{x : f(x) \geq k\}) < \infty.$$

再加上

$$m(\{x : f(x) \geq 0\}) \leq 1,$$

便得

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x : f(x) \geq k\}) < \infty.$$

□

Problem 4.11 2025-7

设 f_n 是 $[0, 1]$ 上的单调增加的非负可测函数, 且

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e. } x \in [0, 1].$$

证明: 存在 $[0, 1]$ 上的单调增加的非负简单可测函数 g_n , 使得对任意 x ,

$$g_n(x) \leq f_n(x),$$

且

$$g_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

Remark. 这个题考试的时候修改过表述, 这里的表述可能容易误解. 反正意思是 $f_n \nearrow f$, 要造 $g_n \nearrow f$.

Proof. 证明来自 PPT13 关于 MCT 的证明. 第一步是写出 ϕ_{ij} 的构造, 这个不写整道题就是零分 (因为我拿了零分).

$$\phi_{i,j} = \sum_{k=0}^{2^{2j}-1} k 2^{-j} \chi_{f^{-1}(k 2^{-j}, (k+1) 2^{-j}]} + 2^n \chi_{f^{-1}(2^j, \infty]}.$$

然后取对角线序列

$$g_n = \max(\phi_{1,1}, \dots, \phi_{n,n}).$$

最后的逐点收敛证明用 ϵ -room 技巧, 考虑 $f - \epsilon$, 有

$$f(x) - \epsilon \leq \phi_{mk}(x) \leq f_m(x) \leq f(x).$$

这里 $m < k$, m 充分大. 因为这里是在做逐点收敛, 因此这样论证就够了.

□

Problem 4.12 2025-8

是否存在函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得其不连续点是: (1) 有理数集 $\mathbb{Q}$. (2) 无理数集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 证明结论或举反例.

Proof. (1) 存在. 取 Riemann 函数 (数学分析 A1 里有):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \gcd(p, q) = 1, q > 0. \end{cases}$$

它在每个无理点连续, 在每个有理点不连续. 故其不连续点集恰为 $\mathbb{Q}$.

(2) 不存在. 首先要指出, 连续函数的连续点集是一个 G_δ 集, 因为连续点集能写成

$$\bigcap_k \{\omega_f(x) < \frac{1}{k}\}.$$

这里要说明 $\{\omega_f(x) < \frac{1}{k}\}$ 是开集 (用连续的定义就行), 这在 25 年改卷中占 4 分. 接着要说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集, 用反证法, 此时无理数是 F_σ 集, 因为有理数的稠密性, 这里的闭集都是无处稠密的. 再并上可数的有理点, 就得到 $\mathbb{R}$ 是无处稠密的并, 与 Baire 纲矛盾. $\square$

Problem 4.13 2025-9

设 $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一列可测函数, 且存在 $g \in L^1(\mathbb{R})$ 使得对任意 n 都有

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

现假设 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛到 f . 证明:

$$(1) f_n, f \in L^1(\mathbb{R}). \quad (2) \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

Proof. (1) 对每个 n , 由

$$|f_n| \leq g \in L^1$$

立刻得到 $f_n \in L^1$.

再证 $f \in L^1$. 因为 $f_n \rightarrow f$ 依测度, 可取子列 f_{n_k} 使得

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{a.e.}$$

由

$$|f_{n_k}| \leq g \quad \text{a.e.}$$

取极限得

$$|f| \leq g \quad \text{a.e.}$$

故 $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(2) 首先注意到任意子列 $\{f_{n_k}\}$. 由依测度收敛, 可再取子子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$ 使得

$$f_{n_{k_j}} \rightarrow f \quad \text{a.e.}$$

并且

$$|f_{n_{k_j}} - f| \leq |f_{n_{k_j}}| + |f| \leq 2g \in L^1.$$

由控制收敛定理,

$$\|f_{n_{k_j}} - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

若原序列不满足

$$\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0,$$

则存在 $\epsilon > 0$ 和子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1} \geq \epsilon, \quad \forall k.$$

但上面已证明该子列有一个子子列在 L^1 中收敛到 f , 矛盾.

因此

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

□

Remark. 这个题就是上次习题课所讲的子列方法, 实际上做起来是平凡的. 小故事是, 去年小测了这个题, 考试考的也是这个题, 周民强书上有这个题, 但是证法不是这个, 只留下一句“下述证法虽繁, 但习之也不无益处”的抽象注记 (见书 P157). 最后这题得分率似乎很低, 感觉很有喜剧色彩.

有同学问到能不能使用截断的方法来做, 事实上对积分区域截断后, 还是要估计 $\int_{B_R} |f_n - f| dx$ 这个东西, 这里还是需要有一个依测度 Fatou 之类的工具去做, 而这个的证明应该是类似与 3.22 的, 也就是说还是子列方法.

4.3 2024mid

Problem 4.14 2024-1

叙述 $[a, b]$ 中 Lebesgue 可测函数的定义, 并解释为何在 Lebesgue 积分论中必须引入可测函数的概念.

Proof. 定义: 函数 $f : [a, b] \rightarrow [-\infty, +\infty]$ 称为 Lebesgue 可测, 如果对任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in [a, b] : f(x) > t\}$$

是 Lebesgue 可测集. 等价地, 对任意开集 $U \subset \mathbb{R}$, 原像

$$f^{-1}(U)$$

都是可测集.

评分标准的意思是, 你应该准确指出考虑的 σ -代数 (值域上考虑 Borel σ -代数, 定义域考虑 Lebesgue σ -代数), 不应该笼统或者错误地说考虑什么可测集.

言之有理即可, 比如说, 积分是通过简单函数逼近构造的, 必须有可测函数的定义才能让积分良定.

□

Problem 4.15 2024-2

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 是单调增加的连续函数, 而且既是单射又是满射, 则 $[a, b]$ 中任意 Lebesgue 可测子集在 f 映照下的原像必是 Lebesgue 可测集.

Proof. 该说法错误.

下面给出反例. 设 F 为标准 Cantor 函数, 定义

$$T(x) = \frac{x + F(x)}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

则 T 是严格递增连续双射, 从而是 $[0, 1]$ 上的单调增加连续同胚. 记

$$h := T^{-1}.$$

由 Cantor 函数的标准性质, $T(C)$ 具有正测度, 其中 C 为标准 Cantor 集. 取一个不可测集

$$A \subset T(C).$$

令

$$E := h(A) = T^{-1}(A).$$

因为 $E \subset C$ 且 C 零测, 所以 E 是 Lebesgue 可测集.

但是

$$h^{-1}(E) = A,$$

而 A 不可测. 因此, 即便 h 是单调增加连续双射, 也存在可测集 E 使得其原像 $h^{-1}(E)$ 不可测.

故原命题为假.

□

Remark. 这里证明 $T(C)$ 是正测度集的方法见 4.30, 写答案的时候顺序有点小问题.

Problem 4.16 2024-3

假设 $k \in \mathbb{N}$, $a_1^k, \dots, a_n^k, b_k \in \mathbb{R}$, 且

$$(a_1^k)^2 + \dots + (a_n^k)^2 = 1.$$

定义

$$E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1^k x_1 + \dots + a_n^k x_n = b_k\}.$$

证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

Proof. 每个 E_k 都是一个仿射超平面. 因为

$$(a_1^k, \dots, a_n^k) \neq 0,$$

所以 E_k 是真超平面, 特别地其 n 维 Lebesgue 测度为 0.

由次可加性, 可数并仍为零测, 故

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

而

$$m(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

当然也可以用 Baire 纲定理证明, 但要记清楚条件. 超平面是无处稠密集 (他是闭的, 而且余一维, 不可能有内点), 然后 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间, 用 Baire 纲就结束了. $\square$

Problem 4.17 2024-4

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

由 Lebesgue 可积函数的定义出发, 证明该函数在 $\mathbb{R}$ 上不是 Lebesgue 可积函数.

Proof. 首先注意审题, 从定义出发就是要你写出定义. 25 年的第一题第二题也是这个道理.

Lebesgue 非负可测函数的积分定义为

$$\int_{\mathbb{R}} f dx = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi dx : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ 为简单可测函数} \right\}.$$

可积是指上述为有限值. Lebesgue 可积函数定义为 $f = f^+ - f^-$, f^+ , f^- 都可积.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义简单函数

$$\varphi_n(x) = n^2 \chi_{(0, 1/n)}(x).$$

显然 $0 \leq \varphi_n \leq f$, 因为当 $x \in (0, 1/n)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \geq n^2.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} f dx \geq n, \quad \forall n.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}} f dx = +\infty.$$

所以 f 不是 Lebesgue 可积函数. □

Problem 4.18 2024-5

设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负有界可测函数, 证明

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \inf_{f \leq \psi} \int_{[a,b]} \psi(x) dx,$$

其中 $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 取遍非负简单可测函数.

Proof. 这个题是要反向定义积分, 有界性保证了这个题是对的, 所以肯定会用到这个条件.

一方面, 若 ψ 是非负简单可测函数且 $f \leq \psi$, 则由积分的单调性,

$$\int f \leq \int \psi.$$

因此

$$\int f \leq \inf_{f \leq \psi} \int \psi.$$

另一方面, 由于 f 非负有界可测, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$\psi_n(x) = 2^{-n} \lceil 2^n f(x) \rceil.$$

则 ψ_n 是非负简单可测函数, 满足

$$f(x) \leq \psi_n(x) \leq f(x) + 2^{-n}.$$

故

$$0 \leq \int \psi_n - \int f \leq 2^{-n}(b-a) \rightarrow 0.$$

从而

$$\inf_{f \leq \psi} \int \psi \leq \int \psi_n \rightarrow \int f.$$

结合前面的反向不等式, 得

$$\int f = \inf_{f \leq \psi} \int \psi.$$

□

Problem 4.19 2024-6

考虑函数列

$$\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \dots\},$$

其中

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[(j-1)/n, j/n)}(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

说明该函数列是否在下列意义下收敛: 以测度收敛, 逐点收敛, 几乎处处收敛, 几乎一致收敛, 以及 L^1 收敛.

Proof. 这个题给出的序列是上次习题课所讲的打字机序列.

- (1) 支集缩小, 当然依测度收敛到 0.
- (2) 每次都是有限时间依次遍历 $[0, 1]$, 每一点都不是逐点收敛.
- (3) 不几乎处处收敛, 见 (2).
- (4) 不几乎一致收敛, 不然有几乎处处收敛.
- (5) 在 L^1 中收敛到 0. 若 $u_k = f_{n,j}$, 则

$$\|u_k\|_{L^1} = \int_0^1 f_{n,j}(x) dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

故 $u_k \rightarrow 0$ 在 L^1 中成立. □

Problem 4.20 2024-7

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集合, 而且 E 是闭集, $m(E) = 1$, 则 E 必有内点.

Proof. 该说法错误.

考虑 Cantor-like set. 它是闭集, 没有内点, 同时其可以构造任意给定的正测度, 特别可构造

$$m(E) = 1.$$

于是 E 闭且 $m(E) = 1$, 但 $\text{int}(E) = \emptyset$. □

Problem 4.21 2024-8

假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有限测度可测集. 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \int_E \chi_{x+E}(y) dy.$$

证明 f 在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处连续.

Proof. 这题就是上次习题课所讲的平移连续性 (当然你用的时候应该证明, 上次习题课的证明其实非常简单3.20).

当然也可以不用平移连续性来写, 首先重写 $f(x)$ 如下. 用内正则性, 考虑紧集 $K \subset E$ 并且 $m(E \setminus K) < \epsilon$.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y) \chi_{x+E}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y) \chi_E(y-x) dy.$$

于是

$$f(0) = \int \chi_E(y)^2 dy = m(E).$$

并且

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \left| \int \chi_E(y) (\chi_E(y-x) - \chi_E(y)) dy \right| \leq \int |\chi_E(y-x) - \chi_E(y)| dy \\ &\leq \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)| dy + \int |\chi_{E \setminus K}(y-x)| dy + \int |\chi_{E \setminus K}(y)| dy \\ &\leq 2\epsilon + \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)| dy. \end{aligned}$$

当 $|x| < \delta$, 我们有控制函数

$$|\chi_K(y-x) - \chi_K(y)| \leq 2|\chi_{K+\overline{B(0,\delta)}}(y)|.$$

因为 K 紧, 右端显然可积. 用控制收敛 (这里确实是 DCT, 可以自己验证几乎处处收敛) 就有

$$\limsup_{x \rightarrow 0} |f(x) - f(0)| \leq 2\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性就证明了连续性. □

Problem 4.22 2024-9

假设 $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是 Lebesgue 可测函数, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 并且 $f(0) \leq f(1)$. 证明下列极限存在且属于区间 $[f(0), f(1)]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f((g(x))^n) dx.$$

Proof. 因为 $0 \leq g(x) \leq 1$, 所以对每个 x ,

$$(g(x))^n \rightarrow \begin{cases} 0, & g(x) < 1, \\ 1, & g(x) = 1. \end{cases}$$

故

$$f((g(x))^n) \rightarrow \begin{cases} f(0), & g(x) < 1, \\ f(1), & g(x) = 1. \end{cases}$$

记

$$A := \{x \in [0, 1] : g(x) = 1\}.$$

则点态极限为

$$h(x) = f(0)\chi_{[0,1] \setminus A}(x) + f(1)\chi_A(x).$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 故有界, 从而

$$|f((g(x))^n)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f((g(x))^n) dx = \int_0^1 h(x) dx = f(0)(1 - m(A)) + f(1)m(A).$$

因为 $0 \leq m(A) \leq 1$, 该值是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的凸组合, 所以属于区间 $[f(0), f(1)]$. □

Problem 4.23 2024-10

设 $\alpha > 0$. 函数 $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) dt.$$

证明: G 良好定义, 且 $G \in C^\infty(0, +\infty)$.

Proof. 先证良好定义. 固定 $x > 0$.

当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) \leq e^{-xt}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}),$$

右边可积.

当 $t \rightarrow 0^+$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) \leq e^{-x/t}(t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}),$$

而 $e^{-x/t}$ 比任意幂都衰减得更快, 故在 0 附近也可积. 所以 $G(x)$ 良好定义.

下面证可无限次求导. 固定紧区间

$$K = [a, b] \subset (0, \infty).$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$, 形式求导得

$$G^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^\infty (t+t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) dt.$$

只需证明可在积分号内逐次求导. 当 $x \in K$ 时,

$$(t+t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}) \leq (t+t^{-1})^k e^{-a(t+t^{-1})} (t^{1+\alpha} + t^{1-\alpha}).$$

右边在 $(0, \infty)$ 上可积: 在 ∞ 处由 e^{-at} 控制, 在 0 处由 $e^{-a/t}$ 控制.

故由控制收敛定理, 可在积分号内任意次求导, 从而

$$G \in C^\infty(0, \infty).$$

□

4.4 2023mid

Problem 4.24 2023-1

具体写出 Lusin 定理与 Egorov 定理, 无需给出证明.

Proof. Lusin 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 为 a.e. 有限的可测函数等价于对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得

$$m(E \setminus F) < \epsilon,$$

并且 $f|_F$ 连续.

Egorov 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $m(E) < \infty$, $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 且

$$f_n \rightarrow f \quad \text{a.e. on } E.$$

等价于对任意 $\epsilon > 0$, 存在可测集 $A \subset E$, 使得

$$m(E \setminus A) < \epsilon,$$

并且 $f_n \rightarrow f$ 在 A 上一致收敛. □

Remark. 这两个定理的表述应该不唯一, 如果考到类似的题, 写出非平凡一侧就行了 (Littlewood 三原理中的方向). Lusin 定理可以写有限测度的版本, 感觉那个更常见, 当然结论中的闭集变成了紧集.

Problem 4.25 2023-2

写出 Borel-Cantelli 引理并证明.

Proof. 设 E_n 可测, 且 $\sum_n m(E_n) < \infty$, 那么

$$m(\limsup_n E_n) = 0.$$

直接计算就行

$$m(\limsup_n E_n) \leq m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E_n) \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

□

Problem 4.26 2023-3

利用 Borel-Cantelli 引理证明 Egorov 定理.

Proof. 设 $m(E) < \infty$, 且 $f_n \rightarrow f$ a.e. 于 E . 任取 $\epsilon > 0$.

对每个 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$E_{n,k} := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

由于 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e., 对几乎处处的 x , 对固定 k 都只有有限多个 n 使得 $x \in E_{n,k}$. 因而

$$m\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_{n,k}\right) = 0.$$

所以可取整数 N_k , 使得

$$m\left(\bigcup_{n \geq N_k} E_{n,k}\right) < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

令

$$A := E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N_k} E_{n,k}.$$

则

$$m(E \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

现在证在 A 上一致收敛. 任取 $\delta > 0$, 取 k 使得 $2^{-k} < \delta$. 若 $n \geq N_k$, 则由 A 的定义知

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k} < \delta, \quad \forall x \in A.$$

故 $f_n \rightarrow f$ 在 A 上一致收敛. 这就是 Egorov 定理. $\square$

Remark. 其实我没感觉到哪里用了 B-C 引理, 可能在几乎处处收敛的等价刻画中用到了, 没啥感觉.

Problem 4.27 2023-4

设 $\{f_n\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列. 证明 $\{f_n\}$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是作业原题. 收敛点集可写成

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m,n \geq N} \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

对固定的 k, m, n , 集合

$$A_{k,m,n} := \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

是闭集, 因为 $f_m - f_n$ 在闭集 F 上连续.

所以

$$\bigcap_{m,n \geq N} A_{k,m,n}$$

仍是闭集, 再对 N 作可数并得到 F_{σ} 集, 最后对 k 作可数交, 得到 $F_{\sigma\delta}$ 集.

故收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$. $\square$

Problem 4.28 2023-5

K 是课上构造的不可测集. 证明 K 的任意可测子集均是零测集.

Proof. 设 $A \subset K$ 可测. 若 $m(A) > 0$, 则由 Steinhaus 定理,

$$A - A$$

包含 0 的某个开邻域. 特别地, $A - A$ 包含某个非零有理数 q .

于是存在 $x, y \in A$ 使得

$$x - y = q \in \mathbb{Q}.$$

但 $A \subset K$, 而 K 是模 $\mathbb{Q}$ 的代表元集合, 故同一等价类中只能取一个点. 于是必有 $x = y$, 从而 $q = 0$, 矛盾.

所以 $m(A) = 0$. $\square$

Remark. 这个是往年习题课讲过的题目. 但是 Steinhaus 定理我没怎么用过, 所以也就没讲.

Problem 4.29 2023-6

举例说明依测度收敛不一定几乎处处收敛.

Proof. 考虑打字机序列,

$$f_{n,k}(x) = \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}(x).$$

写太多次就不写了. □

Problem 4.30 2023-7

写出 Cantor 函数的具体表达式, 并利用 Cantor 函数构造 $[0, 1]$ 上的一个同胚, 使得某个可测集的原像不是可测集.

Proof.

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}\right) \stackrel{x_k=0,2}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

现在定义

$$T(x) := \frac{x + F(x)}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

之前说过了这个是一个同胚, 并且 $m(T(C)) = \frac{1}{2}$. 这时因为 $m(T([0, 1] \setminus C)) = \frac{1}{2}$ (非 C 上的点关于 F 局部常值, 然后被线性部分压缩). 令 $h := T^{-1}$, 取 $N \subset T(C)$ 不可测, 那么 $E = h(N)$ 零测, 但是 $h^{-1}(E) = N$ 不可测. □

Problem 4.31 2023-8

证明单调函数是可测函数.

Proof. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 单调不减. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合

$$E_a := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$$

必是一个开区间, 闭区间, 半开区间, 空集或全体 $\mathbb{R}$ 中的一种, 总之它是 Borel 集. □

Problem 4.32 2023-9

函数列 $\{f_i\}$ 依测度 Cauchy, 证明它依测度收敛.

Proof. 原来的证明有点小问题, 现在是修改版. 首先按照依测度 Cauchy 的定义, 能取出子列 $\{f_{n_k}\}$, 满足

$$m(\underbrace{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}}_{E_k}) < 2^{-k}.$$

这个子列的选取你可能需要思考一下, 不是完全随意的选法.

由 Borel-Cantelli 引理, 有

$$m(\limsup_k E_k) = 0.$$

然后当 $x \notin \limsup_k E_k$, 就能得到逐点收敛了, 因为这里有逐点的 Cauchy 列. 因此得到子列的几乎处处收敛的极限函数 f . 然后用测度的三角不等式,

$$\lim_n m(|f_n - f| > \epsilon) \leq \lim_n \lim_k (m(|f_n - f_{n_k}| > \epsilon/2) + m(|f_{n_k} - f| > \epsilon/2)) = 0.$$

就完成了证明. □

Problem 4.33 2023-10

证明 $\mathbb{R}$ 上可测函数构成的集合的势为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Proof. 先证下界. 取标准 Cantor 集 C . 因为 $m(C) = 0$, 所以 C 的任意子集都 Lebesgue 可测. 而 C 的子集个数为

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

每个可测集 E 给出一个可测特征函数 χ_E , 故可测函数总数至少为 $2^{\mathfrak{c}}$.

再证上界. 比较简单的说明方式是直接计算 $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$. 具体是

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

□

4.5 2022mid

Problem 4.34 2022-1

设 A, B 是两个集合. 若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |A|$, 证明 $|A| = |B|$.

Proof. Cantor-Bernstein 定理, 感觉还是没必要想它. 想看解答的自己看 PPT, 这个我讲不明白. $\square$

Problem 4.35 2022-2

Lebesgue 零测集是否一定是 Borel 集. 说明理由.

Proof. 不一定.

设 C 为标准 Cantor 集. 则 $m(C) = 0$, 因而 C 的任意子集都是 Lebesgue 可测且零测. 但是 C 的子集总数为

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

另一方面, $\mathbb{R}$ 中 Borel 集的总数只有 $\mathfrak{c}$. 因此不可能 C 的每个子集都是 Borel 集. 于是存在零测集不是 Borel 集.

这个题也有别的论证办法, 就是之前 Cantor 函数同胚那个题, 那里把不可测集打到了零测集, 这个零测集一定不是 Borel 集, 不然拉回后还是可测的. $\square$

Problem 4.36 2022-3

假设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$, 证明

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_k}(x) = \chi_{\limsup_{k \rightarrow \infty} E_k}(x).$$

Proof.

$$\limsup_k \chi_{E_k}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{E_k\} \text{ i.o.} \Leftrightarrow x \in \limsup_k E_k \Leftrightarrow \chi_{\limsup_k E_k}(x) = 1.$$

$\square$

Problem 4.37 2022-4

设 C 是标准 Cantor 集. 函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下: 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$; 当 x 落在第 n 次去掉的长为 3^{-n} 的区间时, $f(x) = 1/n$. 利用特征函数的加法, 乘法, 极限运算表示函数 f , 并说明 f 是否可测.

Proof. 记 D_n 为 Cantor 构造中第 n 次删去的区间之并. 则 D_n 是有限个开区间的并, 从而是 Borel 集. 且这些 D_n 两两不交, 并满足

$$[0, 1] = C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x).$$

因为每个 χ_{D_n} 可测, 有限和可测, 极限也可测, 故 f 可测.

更具体地, 令

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x),$$

则 f_N 可测且

$$f_N(x) \rightarrow f(x).$$

故 f 可测. $\square$

Problem 4.38 2022-5

构造一个 Lebesgue 不可测集, 并证明它不可测.

Proof. 进行一个背诵 (无慈悲). 取 $[0, 1]$ 上关于等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

的一个代表元集合 V .

若 V 可测, 对每个有理数 $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, 令

$$V_q = (V + q).$$

则不同的 q 对应的 V_q 两两不交, 且

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (V + q) \subset [-1, 2].$$

由平移不变性, 若 V 可测, 则每个 $V + q$ 可测且测度与 V 相同.

若 $m(V) = 0$, 则可数并仍为零测, 不可能覆盖 $[0, 1]$. 若 $m(V) > 0$, 则

$$\sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V_q) = +\infty,$$

而这些集合都包含在有限测度集 $[-1, 2]$ 中, 矛盾.

故 V 不可测. □

Problem 4.39 2022-6

设 $A \subset \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. 若对任意开区间 (a, b) , 均存在开区间列 I_n , 使得

$$A \cap (a, b) \subset \bigcup_n I_n, \quad \sum_n m(I_n) < \alpha(b - a).$$

求证 $m(A) = 0$.

Proof. 反设 $m^*(A) > 0$, 且不妨设 $m^*(A) < \infty$. 由外正则性 (有同学上课问到这个, 其实可以想想外测度的定义, 这个是送给你的 (Jinbang Yang.gif)), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset A$, 使得

$$m(G) < m^*(A) + \epsilon.$$

把 G 写成互不相交开区间之并

$$G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

对每个 (a_j, b_j) , 由题设, 存在开区间列 $\{I_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$A \cap (a_j, b_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{j,k}) < \alpha(b_j - a_j).$$

于是

$$A \subset \bigcup_{j,k} I_{j,k},$$

从而

$$m^*(A) \leq \sum_{j,k} m(I_{j,k}) < \alpha \sum_j (b_j - a_j) = \alpha m(G) < \alpha(m^*(A) + \epsilon).$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得

$$m^*(A) \leq \alpha m^*(A).$$

因 $0 < \alpha < 1$, 只能有 $m(A) = 0$, 矛盾.

□

Problem 4.40 2022-7

设 $\{\varphi_k\}$ 是全体有理系数多项式列, $\varphi_0 = 0$, $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. 证明: 对 $[a, b]$ 上的可测函数 f , 存在加括号的方法使得

$$f = (f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots \quad \text{a.e.}$$

Proof. 由作业题4.4可知, 任意可测函数 f 都可以用一系列有理系数多项式 φ_{n_j} 在 a.e. 意义下逼近, 即存在严格递增整数列 n_j , 使得

$$\varphi_{n_j}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

现在按这些指标加括号:

$$(f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots.$$

由于 $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, 每一块都抵消了:

$$f_{n_{j-1}+1} + \cdots + f_{n_j} = \varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}.$$

于是前 N 块的和为

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}) = \varphi_{n_N}.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 得

$$\varphi_{n_N}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.e.}$$

所以上述加括号后的级数 a.e. 收敛到 f .

□

Problem 4.41 2022-8

令 f 是 $[0, 1]$ 上的光滑非线性函数, $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$. 证明

$$m(\Gamma + \Gamma) > 0.$$

其中

$$\Gamma + \Gamma := \{u + v : u, v \in \Gamma\}.$$

Proof. 定义

$$F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(s, t) = (s + t, f(s) + f(t)).$$

则

$$F([0, 1]^2) = \Gamma + \Gamma.$$

其 Jacobian 矩阵为

$$DF(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(s) & f'(t) \end{pmatrix},$$

故

$$\det DF(s, t) = f'(t) - f'(s).$$

因为 f 非线性, 所以 f' 不是常数. 因而存在 s_0, t_0 使得

$$f'(t_0) \neq f'(s_0),$$

即

$$\det DF(s_0, t_0) \neq 0.$$

由反函数定理, 存在 (s_0, t_0) 的邻域 U , 使得 $F(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 特别地,

$$F(U) \subset \Gamma + \Gamma$$

且 $F(U)$ 非空开, 因而其 Lebesgue 测度正:

$$m(\Gamma + \Gamma) \geq m(F(U)) > 0.$$

□

Remark. 这个为什么是实分析考题呢?

Problem 4.42 2022-9

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

且在一个正测集上有界. 证明 f 是线性函数.

Proof. 这个是 PPT 原题. 如果学过泛函, 应该可以意识到这里就是要做原点连续性, 那就是去蹭 Steinhaus 定理.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, $m(E) > 0$, 且存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in E.$$

由 Steinhaus 定理, $E - E$ 含有 0 的某个邻域 $(-\delta, \delta)$.

任取 $h \in (-\delta, \delta)$, 可写成 $h = x - y$, 其中 $x, y \in E$. 故

$$|f(h)| = |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M.$$

所以 f 在 0 的某个邻域内有界.

下面证连续性. 任取 $\epsilon > 0$, 选 n 大使得 $2M/n < \epsilon$. 若 $|x| < \delta/n$, 则 $|nx| < \delta$, 从而

$$|f(x)| = \frac{1}{n}|f(nx)| \leq \frac{2M}{n} < \epsilon.$$

故 f 在 0 连续, 从而由可加性知 f 在每点连续.

连续可加函数必为线性函数. 令 $c = f(1)$, 则对有理数 q 有

$$f(q) = cq.$$

由连续性推广到全体实数, 得

$$f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Problem 4.43 2022-10

证明局部 Lipschitz 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 将零测集映成零测集.

Proof. 去年习题课讲过这个题, 往年题有所以之前没讲. 思路其实很清楚, 局部性可以紧化, 然后 Lipschitz 相当于容许线性拉伸, 但是零测集就是小方体覆盖, 小方体拉伸还是小的.

设 $N \subset \mathbb{R}$ 是零测集. 对每个整数 m , 在紧区间

$$K_m = [m, m+1]$$

上, f 是 Lipschitz 的, 设 Lipschitz 常数为 L_m .

令

$$N_m := N \cap K_m.$$

因为 N_m 零测, 对任意 $\epsilon > 0$, 可取开区间列 $\{I_{m,j}\}_{j \geq 1}$ 覆盖 N_m , 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\epsilon}{2^{|m|+1}(1+L_m)}.$$

由于 f 在 K_m 上是 L_m -Lipschitz, 每个 $f(I_{m,j} \cap K_m)$ 的长度至多为 $L_m |I_{m,j}|$ (用直径的定义想想, 高维就是用直径来处理的). 因而

$$m(f(N_m)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(f(I_{m,j} \cap K_m)) \leq L_m \sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\epsilon}{2^{|m|+1}}.$$

于是

$$m(f(N)) \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} m(f(N_m)) < \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\epsilon}{2^{|m|+1}} \leq 2\epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 得 $m(f(N)) = 0$. □

4.6 2021mid

Problem 4.44 2021-1

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集的定义.

Proof. (同 25mid14.5)

设 m^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为 Lebesgue 可测集, 如果对任意 $A \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

这就是 Carathéodory 可测性判据.

等价地, E 可测当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得

$$m^*(G \setminus E) < \epsilon.$$

再等价地, 任一 Lebesgue 可测集都可写成

$$E = B \cup N,$$

其中 B 是 Borel 集, N 是零测集的子集. 因而所有 Borel 集都 Lebesgue 可测, 且 Lebesgue 可测集族是 Borel σ -代数的完备化. $\square$

Problem 4.45 2021-2

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中的 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理, 并用 Fatou 引理证明 Lebesgue 控制收敛定理.

Proof. 上次习题课讲过了. 注意有一侧不能直接用 Fatou 引理, 都应该用比较函数来做.

Fatou 引理: 若 $f_n \geq 0$ 可测, 则

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx.$$

Lebesgue 控制收敛定理: 若 $f_n \rightarrow f$ a.e., 且存在可积函数 g 使得

$$|f_n| \leq g \quad \text{a.e. for all } n,$$

则 f 可积, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx.$$

下面用 Fatou 引理证明控制收敛定理.

由 $|f_n| \leq g$ 和 $f_n \rightarrow f$ a.e., 得 $|f| \leq g$ a.e., 因而 f 可积.

对非负函数列 $g + f_n$, 由 Fatou 引理得

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n).$$

因为 $\liminf_{n \rightarrow \infty} (g + f_n) = g + f$, 所以

$$\int g + \int f \leq \int g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

即

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

再对非负函数列 $g - f_n$ 用 Fatou 引理,

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n).$$

由于 $\liminf_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) = g - f$, 得

$$\int g - \int f \leq \int g - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n,$$

即

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f.$$

合并两式得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

最后, 由 $|f_n - f| \rightarrow 0$ a.e. 且 $|f_n - f| \leq 2g$, 再对 $|f_n - f|$ 应用上面已经证明的积分收敛结论, 得

$$\int |f_n - f| dx \rightarrow 0.$$

证毕. □

Problem 4.46 2021-3

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测的, 且 $m(E) < \infty$. 记 $L(E, \mathbb{R})$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数模去 a.e. 相等得到的等价类. 对任意 $f, g \in L(E, \mathbb{R})$, 定义

$$d(f, g) = \int_E \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} dx.$$

证明: $f_n, f \in L(E, \mathbb{R})$, 则 f_n 依测度收敛到 f 当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0.$$

Proof. 记

$$\phi(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

则 ϕ 单调增加, 且 $0 \leq \phi(t) \leq 1$. 此时我们有 $\{|f_n - f| > \epsilon\} = \{\phi(|f_n - f|) > \phi(\epsilon)\}$.

先证必要性, 其实是拆积分.

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &= \int_E \phi(|f_n - f|) = \int_{E \cap \{\phi(|f_n - f|) > \phi(\epsilon)\}} \phi(|f_n - f|) + \int_{E \cap \{\phi(|f_n - f|) \leq \phi(\epsilon)\}} \phi(|f_n - f|) \\ &\leq m(E \cap \{\phi(|f_n - f|) > \phi(\epsilon)\}) + m(E \cap \{\phi(|f_n - f|) \leq \phi(\epsilon)\})\phi(\epsilon) \\ &\leq m(E \cap \{|f_n - f| > \epsilon\}) + m(E)\phi(\epsilon). \end{aligned}$$

再证充分性, 其实是直接放缩.

$$d(f_n, f) = \int_E \phi(|f_n - f|) \geq \int_{E \cap \{\phi(|f_n - f|) \geq \phi(\epsilon)\}} \phi(|f_n - f|) \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} m(E \cap \{\phi(|f_n - f|) \geq \phi(\epsilon)\}).$$

□

Problem 4.47 2021-4

f 为 $(0, 1)$ 上可积的实值函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A \in \mathbb{R}$. 证明:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x) x^n dx = A.$$

Proof. (a) 因为对 $x \in (0, 1)$, 有 $x^n \rightarrow 0$, 且

$$|f(x)x^n| \leq |f(x)| \in L^1(0, 1),$$

由控制收敛定理,

$$\int_0^1 f(x)x^n dx \rightarrow 0.$$

(b) 写成

$$n \int_0^1 f(x)x^n dx = n \int_0^1 (f(x) - A)x^n dx + A n \int_0^1 x^n dx.$$

而

$$A n \int_0^1 x^n dx = A \frac{n}{n+1} \rightarrow A.$$

故只需证

$$n \int_0^1 (f(x) - A)x^n dx \rightarrow 0.$$

任取 $\epsilon > 0$. 由 $f(x) \rightarrow A$ 当 $x \rightarrow 1^-$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (1 - \delta, 1)$ 时,

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

于是

$$n \left| \int_0^1 (f - A)x^n dx \right| \leq n \int_0^{1-\delta} |f - A|x^n dx + n \int_{1-\delta}^1 |f - A|x^n dx.$$

对第一项, 因为 $x^n \leq (1 - \delta)^n$,

$$n \int_0^{1-\delta} |f - A|x^n dx \leq n(1 - \delta)^n \int_0^{1-\delta} |f - A| dx \rightarrow 0.$$

对第二项,

$$n \int_{1-\delta}^1 |f - A|x^n dx \leq \epsilon n \int_{1-\delta}^1 x^n dx \leq \epsilon n \int_0^1 x^n dx = \epsilon \frac{n}{n+1} \leq \epsilon.$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得所求.

故

$$n \int_0^1 f(x)x^n dx \rightarrow A.$$

□

Problem 4.48 2021-5

用换元 $x = \alpha t$ 计算

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}}.$$

Proof. 令 $x = \alpha t$, 则

$$I_\alpha := \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos \alpha}} = \int_0^1 \frac{\alpha dt}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos \alpha}}.$$

对固定 $t \in [0, 1)$, 用 $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, 得

$$\cos(\alpha t) - \cos \alpha = \frac{\alpha^2}{2}(1 - t^2) + o(\alpha^2).$$

故

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos \alpha}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

下面给出一个可积控制. 注意

$$\cos(\alpha t) - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha(1+t)}{2} \sin \frac{\alpha(1-t)}{2}.$$

当 α 充分小时, 两个正弦的自变量都落在 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 由 $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$, 得

$$\cos(\alpha t) - \cos \alpha \geq 2 \cdot \frac{\alpha(1+t)}{\pi} \cdot \frac{\alpha(1-t)}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{\pi^2}(1-t^2).$$

因此

$$0 \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos \alpha}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

而 $(1-t^2)^{-1/2}$ 在 $(0, 1)$ 上可积, 故由控制收敛定理,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_\alpha = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Problem 4.49 2021-6

记 $\mathbb{Q} = \{r_n\}$ 为所有有理数. 定义 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x - r_k|}, & x \notin \mathbb{Q}, \\ +\infty, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

证明

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\}) < \infty.$$

Proof. 感觉很像去年期末的题目, 不过去年期末好像是不等式的放缩机制和紧性论证, 和这个题不太一样. 这个题可能有点不好想, 但是不妨先想想这个级数什么时候还能被控制, 应该会想到 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. 那我们可以去比较一下我们有的东西和这个级数的区别, 就得到如下做法.

设

$$E := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\}.$$

若对某个 x 有

$$|x - r_k| \geq 2^{-k}, \quad \forall k \geq 1,$$

则

$$\frac{1}{4^k |x - r_k|} \leq \frac{1}{4^k \cdot 2^{-k}} = \frac{1}{2^k}.$$

于是

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

所以若 $f(x) > 1$, 则必存在某个 k 使得

$$|x - r_k| < 2^{-k}.$$

因此

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k}).$$

从而

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2 < \infty.$$

证毕.

□

Problem 4.50 2021-7

设 G 为 $\mathbb{R}$ 的加法真子群, 且 G 是 Lebesgue 可测的. 用 Steinhaus 定理证明 $m(G) = 0$.

Proof. 加法群结构和之前那个线性函数的题目 4.42 是不是有点像, 其实做法也是类似的.

反证. 若 $m(G) > 0$, 则由 Steinhaus 定理, 集合

$$G - G = \{x - y : x, y \in G\}$$

包含 0 的某个开邻域. 但因为 G 是加法子群, 有

$$G - G = G.$$

故 G 含有某个开区间 $(-\delta, \delta)$.

于是对任意 $x \in \mathbb{R}$, 取整数 n 充分大使得 $x/n \in (-\delta, \delta) \subset G$. 由子群性质,

$$x = n \cdot (x/n) \in G.$$

这说明 $G = \mathbb{R}$, 与 G 为真子群矛盾.

故只能有 $m(G) = 0$. □

Remark. Steinhaus 定理是可以直接用的东西, 也感谢同学们提醒我还有 $E + E$ 形式的 Steinhaus 定理, 我已经忘光了.

习题课讲义上卷到此结束了, 同学们好好复习.

祝同学们考试顺利



5 26mid

请仔细对照后决定是否查卷, 无意义 argue 会扣去同情分.

Problem 5.1 题 1(10 分)

证明: 存在 $[0, 1]$ 中的无处稠密集具有正测度.

Proof. 群里讲过这个例子, Cantor-like set 即可.

给分标准:

1. (3') 写出大致构造, 去除区间
2. (4') 计算测度
3. (1') 闭集
4. (2') 无处稠密

其他情况酌情扣分.

□

Problem 5.2 题 2(10 分)

证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集.

Proof. 群里还是讲过, 用 Baire 纲定理.

参考给分标准:

1. (2') 反证, 设 $\mathbb{Q} = \bigcap G_n$
2. (2') G_n 稠密
3. (2') G_n^c 无处稠密
4. (2') $\mathbb{R} = \bigcup G_n^c \cup \{r\}$
5. (2') 用 Baire 纲

其他情况酌情扣分.

□

Problem 5.3 题 3(10 分)

证明: $\mathbb{R}$ 上连续函数全体的基数为 $\mathfrak{c}$; 而 Lebesgue 可测函数全体的基数为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Proof. 往年题有类似的, 群里也说过要会计算.

参考给分标准:

1. (3') 连续函数上界 $|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
2. (2') 下界, 考虑常值函数
3. (3') 可测函数上界 (这个往年题有) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. (2') 可测函数下界, 考虑 Cantor 集子集的示性函数

Remark. 绝大多数扣分来自连续函数上界得扣分, 如果答案涉及有理稠密性, 有理基等用语, 视完整性给分. 用多项式列 (注意是 $\{P_n\}$) 等论证会根据完整性给分. 用 Graph 只能得到 $2^{\mathfrak{c}}$.

□

Problem 5.4 题 4(10 分)

设 $E = [a, b]$, $f_n \rightarrow f$ a.e. on E , 且 $f_n, f \in L^+ \cap L^1(E)$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

Proof. 讲义里有类似的题, 构造比较函数用 Fatou 即可, 这里考虑 $g_n = f_n + f - |f - f_n|$.

参考给分标准:

1. (3') 构造 g_n
2. (2') 用 Fatou
3. (3') 用条件
4. (2') 得到 $\limsup$

其他情况:

1. 用 Egorov, 3 分同情分. 因为没有一致可积性 (或者说一致绝对可积)
2. 用正负部分解, 没有本质内容, 同情分. 合理运用条件可得全分, 但是绝大多数都没用条件.
3. 用广义 DCT 扣两分
4. 写 $|f_n - f| \leq f + f_n \in L^1$, 并用 DCT(实际上是广义 DCT), 得 5 分.
5. 用 $\min$ 和 Fatou 引理可以得全分

□

Problem 5.5 题 5(10 分)

利用积分的定义和 Lebesgue 控制收敛定理, 证明 Levi 单调收敛定理.

Proof. 这个证明和 Folland 上的证法有类似, 但是不太一样, 要注意, 因为是要用控制收敛, 所以要对可积性讨论, 不能直接做. 以下过程仅供参考, 实际阅卷中几乎都是对角线方法.

当 f 可积, 直接用 DCT 即可. 当 f 不可积, 可行的方法是像往年一样用对角化序列, 或者如下方法. 考虑

$$\int \phi_n \nearrow \int f,$$

对 ϕ 做定义域截断保证可积性 (不截断是无法保证可积性从而用 DCT 的)

$$K < \int \phi < \infty.$$

然后令 $g_n = \min(f_n, \phi) \nearrow \phi$, 对 g_n 用 DCT 后放缩 f_n 积分即可.

参考给分标准:

1. (6') 可积 case 用 DCT
2. (2') 对角线
3. (2') 序列具体构造 (这个地方分值较少, 往年为 10 分)

其他情况:

1. 不知道 Levi, 比如默认所有函数可积, 或者写 $L^+ \cup L^1$ 但实际上默认可积性, 至多 4 分
2. 其余方法酌情给分

□

Problem 5.6 题 6(10 分)

判断 $\frac{\sin x}{x}$ 是否在 $[0, \infty)$ 上 Lebesgue 可积, 并给出理由.

Proof. 数分老题. 注意到 $|\sin x| \geq |\sin^2 x|$ 即可.

参考给分标准:

1. (5') 正确上手, 如上述放缩, 或者拆区间
2. (5') 会算数, 同时说明不可积

其他情况:

1. 无意义计算至多 3 分同情分
2. 知道广义 Riemann 积分的计算结果可以给 2 分

Remark. 本题中有若干同学计算积分错误, 会酌情扣分, 如果漏扣分查卷发现后可能倒扣.

□

Problem 5.7 题 7(10 分)

设 $E \subset [0, 1]$ 是可测集且 $m(E) > 0$. 证明: 存在 $x \in E$ 使得对无穷多个正整数 n , 有 $x + \frac{1}{n} \in E$ (模 1 意义下, 即考虑圆上的加法).

Proof. 没讲过, 但是转化后还是有迹可循. 考虑

$$A_n = E \cap \left(E - \frac{1}{n}\right).$$

由测度连续性,

$$m(E \Delta \left(E - \frac{1}{n}\right)) \rightarrow 0$$

那么 A_n 有正下界, 用测度的 Fatou 引理即可.

用 Borel-Cantelli 的大致做法是, 误差集测度会收敛到 0, 然后可以抽取指数衰减子列用 B-C 引理, 也就证明了几乎处处的 x 能使得 $x + 1/n$ 出现无数次.

用 Steinhaus 的方法比较优雅, 记 $F_N = \{x \in E : \text{for } n > N, x + \frac{1}{n} \notin E\}$. 那么 $E = \bigcup F_N$, 然后发现 $m(F_M) > 0$, 对这个集合用 Steinhaus 后, 取 $L > M$, 得到 $x, y \in F_M$, 但是 $x - y = \frac{1}{L}$, 这和 F_M 的定义矛盾.

参考给分标准:

1. (3') 转化, 定义 A_n
2. (4') 正下界
3. (3') $\limsup$

当然上述三个方法只有极个别同学写到, 其他同学一般只能拿到 Steinhaus 定理的 2 分同情分.

□

Problem 5.8 题 8(10 分)

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义其 Fourier 变换 $g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} dx$. 证明: g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

Proof. 讲过连续性, 这里只是多一点, 要对积分区域截断一下.

参考给分标准:

1. (2') 写成差值
2. (2') 估计 $\exp$ 差值
3. (3') 截断 $\|f\|_1$
4. (3') 会使用截断后的误差小性

其他情况:

1. 证明连续性给 6 分, 没说清楚酌情扣分

Remark. 用 C_c 函数的稠密性可以得满分, 这和截断尾部能量是一样的.

□

Problem 5.9 题 9(10 分)

假设可测函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 保持加法运算, 证明 $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Proof. 就是 22mid 第 9 题.

参考给分标准:

1. (2') 有理数加法
2. (2') Lusin 定理
3. (3') Steinhaus 定理
4. (3') 计算原点连续性

□

Problem 5.10 题 10(10 分)

设 $m(E) < \infty$, f_n, f 在 E 上可测且 $f_n \rightarrow f$ 依测度收敛, g 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明: $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ 依测度收敛.

Proof. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 g 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以 g 在任意紧区间上一致连续.

因为 $m(E) < \infty$ 且 f 有限 a.e., 可取 $M > 0$, 使得

$$m(\{x \in E : |f(x)| > M/2\}) < \epsilon.$$

由 g 在 $[-M, M]$ 上一致连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x, y \in [-M, M]$ 且 $|x - y| < \delta$ 时,

$$|g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

令

$$\alpha = \min\{\delta, M/2\}.$$

若 $|f(x)| \leq M/2$ 且 $|f_n(x) - f(x)| < \alpha$, 则

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq M,$$

从而 $f_n(x), f(x) \in [-M, M]$, 并且

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon.$$

因此

$$\{|g(f_n) - g(f)| \geq \epsilon\} \subset \{|f| > M/2\} \cup \{|f_n - f| \geq \alpha\}.$$

于是

$$m(\{|g(f_n) - g(f)| \geq \epsilon\}) \leq m(\{|f| > M/2\}) + m(\{|f_n - f| \geq \alpha\}).$$

由 $f_n \rightarrow f$ 依测度收敛可知,

$$m(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) \rightarrow 0.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} m(\{|g(f_n) - g(f)| \geq \epsilon\}) \leq m(\{|f| > M/2\}) < \epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 故

$$m(\{|g(f_n) - g(f)| \geq \epsilon\}) \rightarrow 0.$$

即 $g \circ f_n \rightarrow g \circ f$ 依测度收敛.

参考给分标准:

1. (2') 连续函数紧集上一致连续
2. (3') 截断
3. (3') 拆测度
4. (2') 求极限

其他情况:

1. 没有提到一致性的证明基本是伪证, 至多 2 分
2. 提到一致性但是集合分解混乱, 酌情扣少量分
3. 子列方法 (4')+Egorov 定理 (4')+ 逻辑完整, 如使用反证 (2') 可得 10 分, 但是不写出每一步原因会扣除部分分数

□

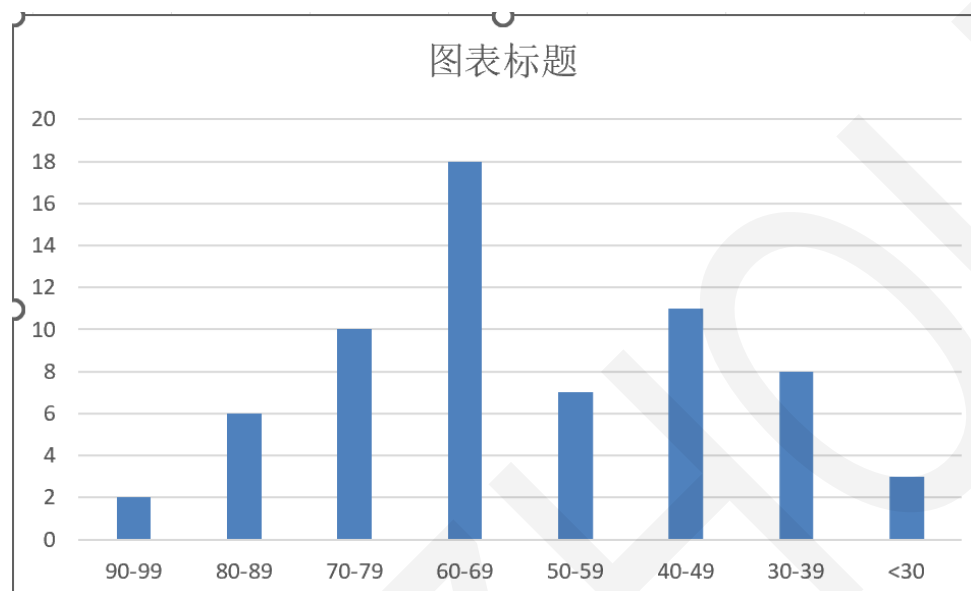
再也不想查卷了.

Remark. 前五题习题课/课程群中均讲过原题或者所谓母题, 但是得分率仍然较低. 第 4 题在第三次习题课讲义里本来有, 但是因为做法过于雷同被删去了, 感觉绝大多数同学们不知道什么叫

“DCT $\rightarrow$ Fatou $\rightarrow$ Egorov”,

只是在按照不存在的记忆乱写. 第六题有同学不知道绝对可积, 知道的同学基本都能做出. 第七题大致类似于 PPT 中 B-C 引理的题目做法, 姑且算是新题, 绝大多数同学没有写出本质步骤, 逻辑混乱的解法其实同情分也不该多给. 第 8 题为了鼓励来上习题课的同学, 证明连续性给了 6 分, 实际上和证明关系也不大, 只是送分. 这题反映绝大多数同学还不理解一致性, 可见数分教学问题之严重性. 第 9 题是原题, 这个

做不出来说明复习策略有待改进. 第 10 题在 PPT 上有类似的内容, 但是 PPT 这种跳步严重的材料不应该成为同学们的做题模板, 逻辑不通的证明应该自己注意而不是和助教扯皮, 没有意义. 不用 PPT 上的方法, 似乎只有最高分的同学做出来, 事实上是很标准的截断想法, 很多证明都是在用连续性做无意义的操作, 但是没有一致性的做法是一眼伪证. 通常来说小问题的机制是很容易说清的, 而机制错误的证明没有看的必要, 同学们以后应该能理解这句话.



最终分数分布如上, 平均分 57.51, 最高分 96. 留于此处供后来者参考.

6 第五次习题课讲义

6.1 作业答案

Problem 6.1 P189.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足

$$\int_E f(x) dx = 0,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 实分析经典问题, 用反证法也是一样的. 下面直接做.

$$E = \bigcup_n E_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \cup \underbrace{N}_{\text{null set}}.$$

那么有

$$0 = \int_E f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} m(E_n) \Rightarrow m(E_n) = 0 \Rightarrow m(E) = 0.$$

□

Remark. 为啥有同学用简单函数逼近来做呢, 不觉得麻烦吗?

Problem 6.2 P143.9

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 若有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) \leq f(x) \quad (x \in E; k = 1, 2, \dots),$$

则对于 E 的任一可测子集 e , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx = \int_e f(x) dx.$$

Proof. “用不了 DCT 就试试 Fatou.”

$$\int_e f dx \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_k \int_e f_k dx \leq \limsup_k \int_e f_k dx \leq \int_e f dx.$$

为什么还有人用 DCT 做, 我已急哭.

□

Problem 6.3 P149.3

若 $f \in L(E)$, 则

$$m(\{x \in E : |f(x)| > k\}) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Proof. 这个就是 Chebyshev 不等式,

$$m(\{|f| > k\}) \leq \int_{|f| > k} \frac{|f|}{k} dx \leq \frac{\|f\|_1}{k} = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

□

Remark. 有同学似乎担心用到 Fubini, 但是我们这里不是证明分布函数 (那个当然要 Fubini), 只要证明 Chebyshev 不等式就行了, 概率论中叫 Markov 不等式.

Problem 6.4 P159.4

设 $f \in L(E)$, 记

$$E_k = \{x \in E : |f(x)| < 1/k\},$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0.$$

Proof. 直接用 DCT 就行,

$$\lim_k \int_{E_k} |f| dx = \lim_k \int |f| \chi_{E_k} dx \stackrel{|f| \chi_{E_k} \leq |f|}{=} \int |f| \chi_{\{|f|=0\}} dx = 0.$$

□

Problem 6.5 P190.9

设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E \subset [0, 1]$, $m(E) = t$, 有

$$\int_{[0,t]} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx.$$

Proof. 直观上是显然的, 但是要写清楚需要具体算一算. 记 $[0, t] = A$,

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx - \int_{[0,t]} f(x) dx &= \int f(x)(\chi_E - \chi_A) dx \\ &= \int f(x)(\chi_{E \setminus A} - \chi_{A \setminus E}) dx \\ &\geq [f(\inf(E \setminus A)) - f(\sup(A \setminus E))]m(E \setminus A) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Problem 6.6 P159.3

设 $f \in L^1((0, +\infty))$, 试证明函数

$$g(x) = \int_{[0, \infty)} \frac{f(t)}{x+t} dt$$

在 $(0, +\infty)$ 上连续.

Proof. 注意细节, 首先积分本身良定 (这个最好提一下). 只要证明内闭连续即可, 然后对 $x > 0$, 考虑 $x_n \rightarrow x$, 当 n 充分大, 用 $\frac{2|f(t)|}{x}$ 当控制函数用 DCT 即可. $\square$

Problem 6.7 P160.6

设 $f_k \in L^1(E)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $f_k(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 若 $m(E) < +\infty$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 这是数分题. 将积分如下放缩即可

$$\left| \int_E (f - f_n) \right| \leq m(E) \sup_x |f_n(x) - f(x)|.$$

$\square$

Problem 6.8 P190.10

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 试证明

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{E+\{y\}} |f(x)| dx = 0.$$

Proof. 用 $|f|$ 做控制函数即可. $\square$

Problem 6.9 P190.12

设 $f \in L(\mathbb{R})$, $a > 0$, 试证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + n\right)$$

在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处绝对收敛, 且其和函数 $S(x)$ 以 a 为周期, 且 $S \in L^1([0, a])$.

Proof. 经典交换次序题, 往年考过类似方法. 首先将级数在 $[0, a]$ 上积分, 用 MCT 交换次序.

$$\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right| dx \stackrel{\text{换元}}{=} a \|f\|_{L^1} < \infty.$$

这就说明级数几乎处处有限 (也就是几乎处处绝对收敛). 良好定义后, 看出级数周期性是显然的. $\square$

Problem 6.10 P191.13

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $p > 0$, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 感觉是实分析特色习题, 先去考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} |f(nx)|.$$

良定性就像6.9一样, 去积分交换次序.

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} |f(nx)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-p} |f(nx)| dx \stackrel{\text{换元}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+p)} \|f\|_{L^1} < \infty.$$

然后用级数收敛的性质就做完了.

不少同学先积分再用 B-C 引理, 这个当然没问题, 而且其实是比较自然的想法, 但是这样做似乎无法让大家记住(背诵)求和这个技巧? 大家复习往年题可能就知道是什么了. $\square$

Problem 6.11 P191.14

设 $x^s f(x), x^t f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可积, 其中 $s < t$, 试证明积分

$$\int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx, \quad u \in (s, t)$$

存在且是 $u \in (s, t)$ 的连续函数.

Proof. 这类权重问题可以想想谁在哪是主导项, 我们不难设计出控制函数

$$x^s |f(x)| \chi_{x < 1} + x^t |f(x)| \chi_{x \geq 1}.$$

然后用 DCT, 存在性和连续性就都出来了. $\square$

Problem 6.12 P191.15

设 $f(x)$ 是 $(0, 1)$ 上的正值可测函数. 若存在常数 c , 使得

$$\int_{[0, 1]} (f(x))^n dx = c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

试证明存在可测集 $E \subset (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 几乎处处等于 $\chi_E(x)$. 再问: 若 $f(x)$ 不是非负的又如何?

Proof. 首先证明 $f \leq 1$ a.e., 这个就是标准的拆测度证明 (参考6.1), 考虑 $E_k := \{f \geq 1 + \frac{1}{k}\}$, 代入条件对 n 取极限就知道 E_k 零测, 再对 k 取极限就得到了上界.

现在再来处理下界, 拆成 $\{f < 1\}$ 和 $\{f = 1\}$ 就行, 代入条件取极限得到 $c = m(\{f = 1\})$, 然后令 $n = 1$ 说明另一块几乎处处为零. 也就是说, $f(x) = \chi_{\{f=1\}}$.

至于不是非负的情况, 考虑 f^2 说明 $f^2 = \chi_E$, 然后令 $n = 1, 2$ 拆开来就行了, 结论是一样的. $\square$

Problem 6.13 P191.16

设 $f \in L^1([0, 1])$, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0$$

($\ln(1 + x^2) \leq x, x \geq 0$).

Proof. 把提示里的不等式带进去用 DCT 就行, 几乎处处收敛到零是显然的 (因为可积函数几乎处处有限). $\square$

Problem 6.14 P191.17

设 $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset \dots, E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, f \in L^1(E_k) (k = 1, 2, \dots)$, 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 注意到 $f \chi_{E_k} \rightarrow f \chi_E$, 用 $|f| \chi_{E_1}$ 控制就行. $\square$

Problem 6.15 P191.18

设 $f \in L^1(E)$, 且 $f(x) > 0$ ($x \in E$), 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f(x))^{1/k} dx = m(E).$$

Proof. 可积函数几乎处处有限, 将 f 拆成

$$f = f\chi_{\{f \geq 1\}} + f\chi_{\{f < 1\}}$$

后分开使用 DCT+MCT 即可. □

Problem 6.16 P191.19

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的非负可积函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 若有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_{[0,1]} f(x) dx,$$

试证明对 $[0, 1]$ 的任一可测子集 E , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 题目有误! 若加上 f 可积, 那么用标准的子列方法. 反证, 存在 E 使得子列 f_{n_k} 没有积分收敛, 那么考虑子子列 (用原本的下标), 有

$$\begin{aligned} \int f &= \lim_n \int f_n \geq \liminf_n \int_E f_n + \liminf_n \int_{E^c} f_n \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \liminf_n \int_E f_n + \int_{E^c} f \\ &\Rightarrow \int_E f \geq \liminf_n \int_E f_n \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f. \end{aligned}$$

这样就导出了矛盾, 可以想想 $\liminf$ 的等价定义. 这里体现我们在用 f 可积性的地方是, 我们将 E^c 上的积分减掉了, 如果 f 不可积, 这一步是不对的. 当然也可以用期中考试参考答案的写法, 这里只是给大家提供不同的书写方式.

如果造反例, 我们考虑让函数整体质量爆破, 且在局部有依测度收敛但不 L^1 收敛的机制, 比如我们考虑

$$f_n = \frac{1}{x} \chi_{[\frac{1}{n}, 1]} + n \chi_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})}.$$

那么在 $E(\frac{1}{2}, 1)$ 上结论就不对了. 我想这样就把这道题的两面都讲清楚了. □

Problem 6.17 P192.20

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可积函数列, 且 $f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x) = 0$. 若有

$$\int_E \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} dx \leq M \quad (k = 1, 2, \dots),$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = 0.$$

Proof. 考虑控制函数 $F(x) = \sup_k f_k$, 这是可积的, 用条件 +MCT 即可. 然后 DCT, 结束了. □

Problem 6.18 P192.21

(依测度收敛型的 Fatou 引理) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

Proof. 书上题目打错了. 做法是子列方法, 取出 $\liminf$ 子列, 然后用 Riesz+Fatou 即可. 之前习题课讲过. $\square$

Remark. 简单的题目答案就简写了, 如果需要及时反馈, 也可以给出完整过程.

Problem 6.19 P189.3

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 若存在 $E_k \subset E$,

$$m(E \setminus E_k) < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

使得极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在 E 上可积.

Proof. 也许有同学想用 Egorov 来做, 但是这个定理有一个问题在于, 你无法控制丢掉的集合的位置 (期中考试就有同学犯过这个错误, Egorov 一般只能给到一个测度估计, 不能直接给出更多的刻画), 因此还是用 Fatou 引理来做. 用 Fatou 引理需要几乎处处收敛来过渡, 而这里本质上是一个依测度收敛的条件 (算是这个题的本质观察), 所以这本质还是一个子列方法的问题, 那就是一个简单问题了. 用 Borel-Cantelli 引理 (或者你看起来依测度收敛), 那么有子列

$$\chi_{E_{n_k}} \rightarrow \chi_E \quad \text{a.e.}$$

然后用 Fatou 引理

$$\int f = \int \liminf f \chi_{E_{n_k}} \leq \liminf \int_{E_{n_k}} f < \infty.$$

这就证完了. $\square$

Problem 6.20 P189.4

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数, 令

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

若 $F \in L^1(\mathbb{R})$, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0.$$

Proof. 不要用 Fubini 定理, 这里 F 非负单增, 可积必须有 $F \equiv 0$, 那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, 也就是 $\int f = 0$. $\square$

Problem 6.21 P190.5

设 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列. 若对任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx,$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx.$$

Proof. 这个实际上可以证明这个序列是几乎处处增的, 令 $E_k = \{f_k > f_{k+1}\}$, 那么

$$\int_{E_k} f_k \stackrel{\text{条件}}{\leq} \int_{E_k} f_{k+1} \stackrel{E_k}{<} \int_{E_k} f_k.$$

那么 $m(E_k) = 0$, 然后零测集的可数并也是零测的, 最后用 MCT 即可. $\square$

Problem 6.22 P190.8

设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)| dx = 0,$$

试证明存在可测集 E , 使得

$$f(x) = \chi_E(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. L^1 收敛推出依测度收敛, 用 Riesz 定理就说明子列 $\{\chi_{E_{n_k}}\}$ 几乎处处收敛到 f , 那就说明 f 几乎处处为 0 或 1. 令 $E = f^{-1}(1)$ 即可. $\square$

Problem 6.23 P184.1

设 $f(x, y)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上可积, 试证明

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

Proof. 这就是 Fubini 定理, 左边积分是在 $0 \leq y \leq x \leq 1$ 上, 右边积分也在 $0 \leq y \leq x \leq 1$ 上, 就证完了. 当然改写成 $\chi_{\{y \leq x\}}$ 也是一样的. $\square$

Problem 6.24 P184.2

设 A, B 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集, 试证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} m((A - \{x\}) \cap B) dx = m(A) \cdot m(B).$$

Proof. 这里的记号有点乱, 应该是指集合 $A - x$, 也就是平移, 而不是 setminus. 注意, 集合的交集可以用示性函数相乘刻画, 因此我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A-x}(y) \chi_B(y) dy dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{A-x}(y) \chi_B(y) dx dy = m(A) \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(y) dy = m(A)m(B).$$

$\square$

Problem 6.25 P193.29

假设 $f(x), g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的可测函数并且 $m(E) < +\infty$, 若 $f(x) + g(y)$ 在 $E \times E$ 上可积, 试证明 $f(x), g(x)$ 都是 E 上的可积函数.

Proof. 由可积性, $f(x)$ 和 $g(y)$ 是几乎处处有限的, 用 slides 的 Fubini 定理, 就有对几乎处处的 y , $f(x) + g(y) \in L^1(E_y)$, 也就是 f 可积. 另一个同理. $\square$

Problem 6.26 P193.30

计算下列积分:

$$(i) \int_{x>0} \int_{y>0} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)}; \quad (ii) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx.$$

Proof. 先算第一个积分, 先对 x 积分 (因为这个显然可积), 积分变为

$$\int_{x>0} \frac{\pi}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} \stackrel{y=t^2}{=} \pi \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

由第一个积分已经算出

$$J = \int_{x>0} \int_{y>0} \frac{dx dy}{(1+y)(1+x^2 y)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

先对 y 积分. 当 $x \neq 1$ 时, 裂项计算积分,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+x^2 y)} = \frac{\ln x^2}{x^2-1}.$$

所以

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2}{x^2-1} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx.$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{J}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

Problem 6.27 P193.31

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $m(E) > 0$, $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 若函数

$$F(x) = \int_E f(x-t) dt$$

在 $\mathbb{R}$ 上可积, 试证明 $f \in L^1$.

Proof. 直接积分,

$$\int F dx = \int_{\mathbb{R}} \int_E f(x-t) dt dx = \int_E \int_{\mathbb{R}} f(x-t) dx dt = m(E) \|f\|_1 < \infty.$$

那么 $f \in L^1(\mathbb{R})$.

□

6.2 补充内容

1. 测度分解的例题 (为了简化描述, 以下三个例题考虑的测度都是有限测度)

Example 6.28 积分的 Hahn 分解

设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的正测度, $f \in L^1(\mu)$. 定义

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{M}.$$

证明

$$P = \{x \in X : f(x) \geq 0\}, \quad N = \{x \in X : f(x) < 0\}$$

给出 ν 的 Hahn 分解, 并且

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu, \quad |\nu|(E) = \int_E |f| d\mu.$$

Proof. 若 $A \subset P$, 则 $f \geq 0$ 于 A 上, 所以

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \geq 0.$$

若 $A \subset N$, 则 $f < 0$ 于 A 上, 所以

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \leq 0.$$

因此 (P, N) 是 ν 的 Hahn 分解. 令

$$\alpha(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \beta(E) = \int_E f^- d\mu.$$

则 α, β 是正测度, 并且

$$\nu = \alpha - \beta.$$

又因为 f^+ 与 f^- 的支撑不相交, 所以 $\alpha \perp \beta$. 由 Jordan 分解的唯一性, 得到

$$\nu^+ = \alpha, \quad \nu^- = \beta.$$

于是

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-,$$

即

$$|\nu|(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

□

Remark. 这个题不会讲, 只是提供一个例子理解 Hahn 分解和 Jordan 分解.

Example 6.29 测度分解的应用

设 ν 是符号测度, 并且

$$\nu = \lambda - \eta,$$

其中 λ, η 是正测度. 证明

$$\lambda \geq \nu^+, \quad \eta \geq \nu^-.$$

从而

$$|\nu| \leq \lambda + \eta.$$

进一步证明：若 $\lambda \perp \eta$, 则

$$\lambda = \nu^+, \quad \eta = \nu^-.$$

Proof. 取 ν 的 Hahn 分解 $X = P \cup N$. 由 Jordan 分解的构造,

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

因为 $\nu = \lambda - \eta$, 所以

$$\nu^+(E) = \lambda(E \cap P) - \eta(E \cap P) \leq \lambda(E \cap P) \leq \lambda(E).$$

因此 $\nu^+ \leq \lambda$. 同理,

$$\nu^-(E) = \eta(E \cap N) - \lambda(E \cap N) \leq \eta(E \cap N) \leq \eta(E),$$

所以 $\nu^- \leq \eta$. 于是

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^- \leq \lambda + \eta.$$

若进一步 $\lambda \perp \eta$, 则存在 $A \in \mathcal{M}$, 使得

$$\lambda(A^c) = 0, \quad \eta(A) = 0.$$

于是当 $E \subset A$ 时,

$$\nu(E) = \lambda(E) \geq 0;$$

当 $E \subset A^c$ 时,

$$\nu(E) = -\eta(E) \leq 0.$$

因此 (A, A^c) 是 ν 的 Hahn 分解. 于是

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \lambda(E \cap A) = \lambda(E),$$

并且

$$\nu^-(E) = -\nu(E \cap A^c) = \eta(E \cap A^c) = \eta(E).$$

故

$$\lambda = \nu^+, \quad \eta = \nu^-.$$

□

Remark. 这个例子也很简单, 希望大家能记住 Jordan 分解是怎么来的. 同时注意, Hahn 分解不唯一, 但是能构造出唯一的 Jordan 分解.

Example 6.30 三角不等式

设 ν 是符号测度, ρ 是正测度. 证明以下两条件等价:

$$|\nu(E)| \leq \rho(E), \quad \forall E \in \mathcal{M},$$

和

$$|\nu| \leq \rho.$$

并用此证明: 若 ν_1, ν_2 是符号测度, 则

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|.$$

Proof. 若 $|\nu| \leq \rho$, 则对任意 $E \in \mathcal{M}$,

$$|\nu(E)| \leq |\nu|(E) \leq \rho(E).$$

反过来, 假设对任意 $E \in \mathcal{M}$ 都有

$$|\nu(E)| \leq \rho(E).$$

用 Hahn 分解, $E = (E \cap P) \cup (E \cap N)$, 那么

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = \nu(E \cap P) - \nu(E \cap N) \leq \rho(E \cap P) + \rho(E \cap N) = \rho(E).$$

故 $|\nu| \leq \rho$. 现在令

$$\rho = |\nu_1| + |\nu_2|.$$

对任意 $E \in \mathcal{M}$,

$$|(\nu_1 + \nu_2)(E)| \leq |\nu_1(E)| + |\nu_2(E)| \leq |\nu_1|(E) + |\nu_2|(E) = \rho(E).$$

由刚才证明的等价性可得

$$|\nu_1 + \nu_2| \leq \rho = |\nu_1| + |\nu_2|.$$

□

Remark. 这个例子是想让大家学会用分解定理处理全变差测度, 以后可能会学到不同的变差刻画, 但至少在这门课, 这样做是很简洁的.

2. Riesz 表示定理与 BV 函数刻画

这个部分介绍一下高维的 BV 函数, 目的是借此给出一些测度分解的例子. 事实上实分析是一个比较软的课程, 没有太多具体的计算, 也没有太多例子. 但数学学习是离不开例子的, 因此这里通过引入一些新概念, 给大家展示一些具体的东西. 没看懂没关系, 有点印象就很好了.

Definition 6.31 BV 函数

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $u \in L^1(\Omega)$. 定义

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |\varphi(x)| \leq 1 \right\}.$$

若 $|Du|(\Omega) < +\infty$, 则称 $u \in BV(\Omega)$.

若 u 足够光滑, 分部积分给出

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \, dx.$$

所以这个定义不是凭空来的: 它是在问“弱导数”能不能被一个有限 Radon 测度控制住. 弱导数的定义上个学期讲过, 简单来说就是把导数丢到测试函数上, 这里不是考虑 Sobolev 函数, 所以也不用要求 L_{loc}^1 .

Theorem 6.32 BV 的 Riesz 表示刻画

设 $u \in L^1(\Omega)$. 则 $u \in BV(\Omega)$ 当且仅当存在一个 $\mathbb{R}^n$ -值有限 Radon 测度 Du 使得

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \cdot dDu, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

此时 $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$ 正是 u 的分布意义导数, 而 $|Du|$ 是向量测度 Du 的全变差测度.

Proof. 证明实际上是 Riesz 表示的直接应用, 把如下泛函

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx$$

看成定义在测试向量场上的线性泛函. BV 条件正好说明这个泛函对 $\|\varphi\|_{\infty}$ 有界, 所以可以用 Riesz 表示定理把它写成 Radon 测度.

若 $u \in BV(\Omega)$, 定义

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx.$$

由 $|Du|(\Omega)$ 的定义,

$$|T(\varphi)| \leq |Du|(\Omega) \|\varphi\|_{\infty}.$$

因此 T 有界. 由 Riesz 表示定理 (这里跳过一个密度论证, 因为 Riesz 表示要求 C_c , 但是这里只有 C_c^1 , 不过没什么关系), 存在一个 $\mathbb{R}^n$ -值有限 Radon 测度 Du , 使得

$$T(\varphi) = - \int_{\Omega} \varphi \cdot dDu.$$

这正是

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \cdot dDu.$$

反过来, 若这样的测度 Du 已经存在, 则对任意 $|\varphi| \leq 1$,

$$\left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} \varphi \cdot dDu \right| \leq |Du|(\Omega).$$

所以定义中的上确界有限, 即 $u \in BV(\Omega)$. □

现在把 Du 看成一个 Radon 测度, 就可以直接使用测度分解定理. 相对于 Lebesgue 测度作 LRN 分解,

$$Du = D_a u + D_s u, \quad D_a u \ll dx, \quad D_s u \perp dx.$$

由 Radon-Nikodym 定理, 存在 $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 使得

$$D_a u = \nabla u \, dx.$$

于是

$$Du = \nabla u \, dx + D_s u.$$

这里 $D_s u$ 就是导数里的奇异部分. 它可能是原子, 也可能是没有原子的奇异连续测度. 其实 LRN 分解应该有三个部分, 但是我忘了在哪本书上看到了, 感兴趣的同学自己搜吧.

Example 6.33 绝对连续部分

设 $u \in W^{1,1}(\Omega)$. 证明

$$Du = \nabla u \, dx, \quad |Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx.$$

Proof. 直观来看, Sobolev 弱导数本来就是 L^1 函数, 所以它给出的测度一定关于 Lebesgue 测度绝对连续. 这个其实就说明了, $W^{1,1}(\Omega) \subset BV$ (这个在后面的 PPT 里是有的).

对任意 $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, 弱导数定义给出

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \, dx.$$

因此 $Du = \nabla u \, dx$. 进一步, 若 $|\varphi| \leq 1$, 则

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx,$$

所以 $|Du|(\Omega) \leq \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx$. 反向不等式可取

$$\varphi_{\epsilon}(x) = \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)| + \epsilon}$$

再用 C_c^1 向量场逼近得到 (要保证定义良好). 令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得

$$|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx.$$

□

Example 6.34 跳跃给出的原子测度

设 $a < b$, $u = \chi_{(a,b)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数. 证明

$$Du = \delta_a - \delta_b, \quad |Du| = \delta_a + \delta_b.$$

Proof. 这个例子其实比较简单, 因为我上个学期就讲过, Heaviside 函数 (在原点跳跃一次) 的弱导数是 δ , 这个就是分部积分的结果.

对任意 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi' \, dx = \int_a^b \varphi'(x) \, dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

另一方面, BV 的积分分部公式为

$$\int_{\mathbb{R}} u \varphi' \, dx = - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dDu.$$

对比知 $Du = \delta_a - \delta_b$. 由 Jordan 分解,

$$|Du| = |\delta_a - \delta_b| = \delta_a + \delta_b.$$

□

Example 6.35 Cantor 函数给出的奇异连续测度

令 $C(x)$ 为 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, κ 为 Cantor 测度. 考虑同胚 $T(x) = \frac{1}{2}(x + C(x))$, 证明

$$m(T(C)) = \frac{1}{2}.$$

Proof. 这个是我们的一个经典例子, 之前的讲法是非常的意识流, 现在就能用比较严谨的语言来讲明白这件事. 在计算之前我们先提一下这个 Cantor 测度, 这个东西的存在不是偶然, 因为在之前的例子我们可以看到, 导数实际上刻画了测度的绝对连续部分, 然后跳跃是原子部分, 那么 Cantor 函数作为一个导数几乎处处为零且没有跳跃的函数, 他的导数必然作为奇异连续测度存在, 因此 κ 的存在是自然的, 具体定义用分部积分写出来就行了.

那么现在对 T 求导, 由导数的线性性, 导数为

$$DT = \frac{1}{2}(dx + d\kappa).$$

求测度就是去积分, 而我们知道 $d\kappa \perp dx$, 那么

$$m(T(C)) = \frac{1}{2} \int_C d\kappa + dx = \frac{1}{2}.$$

□

最后, 我们引入 coarea 公式, 为后面的重排不等式做铺垫. 证明受限于前置内容有所省略, 好在这不是很本质的内容, 知道就行了.

Definition 6.36 有限周长集

若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 且 $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, 则称 E 是有限周长集, 并定义

$$P(E) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n).$$

Example 6.37 光滑区域的周长测度

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界 C^1 区域, 外法向为 ν_E . 证明

$$D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial E}, \quad P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E).$$

这里的边界条件可以弱化到 Lipschitz, 不过要用 Rademacher 定理说明边界法向几乎处处存在, 省事就简化到 C^1 .

Proof. 对任意 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

而 BV 的分部积分公式写成

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot dD\chi_E.$$

比较两式可得

$$D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial E}.$$

由于 $|\nu_E| = 1$, 其全变差为

$$|D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial E}.$$

因此 $P(E) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$. □

在这个基础上, 我们有 coarea 公式:

$$|Du|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{u > t\}; \Omega) \, dt.$$

所以 BV 函数的总变差可以理解为所有上水平集边界面积的积分. 这正是后面对称重排不等式背后的几何原因.

3. 对称重排不等式与变分案例

本节展示对称重排不等式在变分问题中的一个应用. 或许对称重排已经是比较古老的数学内容 (上世纪中叶), 但这不代表这个工具已经过时. 实际上在很多变分问题中, 对称性是自动出现的, 此时用重排不等式来刻画极小化子的性质是自然的.

Definition 6.38 集合的对称重排

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $|A| < +\infty$. 定义 A 的对称重排为以原点为中心、与 A 等测度的开球:

$$A^\# = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_n |x|^n < |A|\},$$

其中 $\omega_n = |B_1(0)|$. 显然

$$|A^\#| = |A|.$$

Definition 6.39 函数的对称递减重排

设 $f \geq 0$ 可测, 且对任意 $t > 0$, 上水平集 $\{f > t\}$ 都有有限测度. 定义

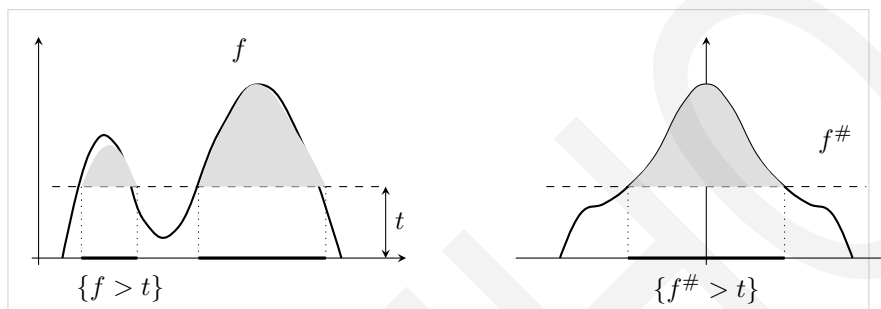
$$f^\#(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{y: f(y) > t\}^\#}(x) dt.$$

也就是说, 对 f 的每一个上水平集先做集合的对称重排, 然后再把这些重排后的水平集叠起来. 等价地, 若

$$\lambda_f(t) = |\{x : f(x) > t\}|, \quad f^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \lambda_f(t) \leq s\},$$

则

$$f^\#(x) = f^*(\omega_n |x|^n).$$



对称递减重排把每个上水平集换成等测度的中心球, 所以 $\{f > t\}$ 与 $\{f^\# > t\}$ 测度相同.

Proposition 6.40 对称递减重排的基本性质

设 $f, g \geq 0$ 可测, 且上水平集测度有限. 则:

1. 能量不变:

$$|\{f^\# > t\}| = |\{f > t\}|, \quad t > 0,$$

从而对 $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f^\#\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

2. 保序性: 若 $f \leq g$, 则 $f^\# \leq g^\#$.

3. L^p 压缩性: 对 $1 \leq p \leq +\infty$, 有

$$\|f^\# - g^\#\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p}.$$

Proof. 这里的第三点证明中我们只证明 L^1 和 L^2 的情况, 其中 L^2 的情况要用到 6.41.

先证明等分布. 由定义,

$$|\{f^\# > t\}| = \lambda_f(t) = |\{f > t\}|.$$

再由 layer-cake 公式, 对 $p \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} |\{f > t\}| dt.$$

把 f 换成 $f^\#$, 并用刚才证明的等分布性, 得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f^\#)^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} |\{f^\# > t\}| dt = p \int_0^\infty t^{p-1} |\{f > t\}| dt = \int_{\mathbb{R}^n} f^p dx.$$

所以 $\|f^\#\|_p = \|f\|_p$.

若 $f \leq g$, 则对每个 $t > 0$,

$$\{f > t\} \subset \{g > t\}.$$

于是

$$\lambda_f(t) \leq \lambda_g(t),$$

从而

$$\chi_{\{f>t\}^\#}(x) \leq \chi_{\{g>t\}^\#}(x).$$

对 t 积分得到 $f^\#(x) \leq g^\#(x)$.

下面证明 L^1 压缩性. 对任意 $a, b \geq 0$,

$$|a - b| = \int_0^\infty |\chi_{\{a>t\}} - \chi_{\{b>t\}}| dt.$$

用 Tonelli 定理,

$$\|f - g\|_1 = \int_0^\infty |\{f > t\} \Delta \{g > t\}| dt.$$

对重排后的函数也有

$$\|f^\# - g^\#\|_1 = \int_0^\infty |\{f^\# > t\} \Delta \{g^\# > t\}| dt.$$

而 $\{f^\# > t\}$ 和 $\{g^\# > t\}$ 都是同心球, 因此

$$|\{f^\# > t\} \Delta \{g^\# > t\}| = ||\{f^\# > t\}| - |\{g^\# > t\}||.$$

由等分布性,

$$||\{f^\# > t\}| - |\{g^\# > t\}|| = ||\{f > t\}| - |\{g > t\}|| \leq |\{f > t\} \Delta \{g > t\}|.$$

对 t 积分即得

$$\|f^\# - g^\#\|_1 \leq \|f - g\|_1.$$

最后证明 L^2 的情形. 由 Hardy–Littlewood 不等式,

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \, dx.$$

又由 L^2 范数保持,

$$\begin{aligned} \|f^\# - g^\#\|_2^2 &= \|f^\#\|_2^2 + \|g^\#\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \, dx \\ &\leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx = \|f - g\|_2^2. \end{aligned}$$

一般 L^p 压缩性可由同样的 layer-cake 思路推广到凸函数 $\Phi(a, b) = |a - b|^p$, 常称为 Hardy–Littlewood–Pólya 重排不等式. $\square$

Theorem 6.41 Hardy–Littlewood 重排不等式

若 $f, g \geq 0$ 可测, 则在积分有意义时,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^\#(x)g^\#(x) \, dx.$$

特别地, 若 $V(x)$ 是径向递减的非负函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x)f(x) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} V(x)f^\#(x) \, dx.$$

Proof. 涉及函数重排, 我们首先要处理水平集的示性函数, 这个想法完全来自定义.

先看集合. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 可测且测度有限, $A^\#, B^\#$ 是与它们等测度的同心球. 则

$$|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\} = |A^\# \cap B^\#|.$$

这里最后一个等号是因为两个球同心, 小球包含在大球里.

对一般 $f, g \geq 0$, 由 layer-cake 公式,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>s\}}(x) ds, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{g>t\}}(x) dt.$$

于是由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty |\{f>s\} \cap \{g>t\}| \, ds dt \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty |\{f>s\}^\# \cap \{g>t\}^\#| \, ds dt. \end{aligned}$$

又由重排的等分布性,

$$\{f>s\}^\# = \{f^\#>s\}, \quad \{g>t\}^\# = \{g^\#>t\}.$$

再用一次 Tonelli 定理,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\{f^\#>s\} \cap \{g^\#>t\}| \, ds dt = \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \, dx.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^\# g^\# \, dx.$$

若 V 是径向递减的非负函数, 则 $V^\# = V$. 在上式中取 $g = V$, 就得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} Vf \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} Vf^\# \, dx.$$

□

Theorem 6.42 Pólya–Szegő 不等式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有限测度开集, $\Omega^\#$ 是与 Ω 等测度的中心球. 若 $u \in H_0^1(\Omega)$, 则 $u^\# \in H_0^1(\Omega^\#)$, 且

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Proof. 这个证明需要使用余面积公式

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega \cap \{u=t\}} f(x) \frac{1}{|\nabla u|} \, dt d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

对于余面积公式, 同学们把他想象成扭曲的 Fubini 定理 (先在水平集上积分, 然后沿着水平集法向积分) 就行, 感觉直觉比其证明重要十倍甚至九倍, 这样学不会冯飞.

先设 $u \in C_c^1(\Omega)$, $u \geq 0$, 且几乎所有水平集都是正则的. 记

$$E_t = \{x : u(x) > t\}, \quad A(t) = |E_t|.$$

由余面积公式,

$$-A'(t) = \int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|} \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

对几乎处处的 t 成立. 同时

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int_0^\infty \int_{\{u=t\}} |\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1} \, dt.$$

对每个这样的 t , Cauchy 不等式给出

$$\begin{aligned} P(E_t)^2 &= \left(\int_{\{u=t\}} 1 d\mathcal{H}^{n-1} \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\mathcal{H}^{n-1} \right) \left(\int_{\{u=t\}} \frac{1}{|\nabla u|} d\mathcal{H}^{n-1} \right). \end{aligned}$$

因此

$$\int_{\{u=t\}} |\nabla u| d\mathcal{H}^{n-1} \geq \frac{P(E_t)^2}{-A'(t)}.$$

另一方面, $u^\#$ 的上水平集 $E_t^\# = \{u^\# > t\}$ 是球, 且 $|E_t^\#| = |E_t| = A(t)$. 对径向递减函数 $u^\#$, 上面的不等式取等号, 于是

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^2 dx = \int_0^\infty \frac{P(E_t^\#)^2}{-A'(t)} dt.$$

由等周不等式,

$$P(E_t^\#) \leq P(E_t).$$

所以

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^2 dx \leq \int_0^\infty \frac{P(E_t)^2}{-A'(t)} dt \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

一般的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 可由 C_c^1 函数逼近得到, 这用到之前证明的重排的 L^2 压缩性. $\square$

Theorem 6.43 Faber–Krahn 不等式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有限测度开集, $\Omega^\#$ 是与 Ω 等测度的中心球. 定义

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

那么有

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^\#).$$

Proof. 取任意 $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 对 $|u|$ 作球对称递减重排. 等分布性给出

$$\int_{\Omega^\#} (u^\#)^2 dx = \int_{\Omega} u^2 dx,$$

Pólya–Szegő 给出

$$\int_{\Omega^\#} |\nabla u^\#|^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

因此 Rayleigh 商下降, 取下确界得

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^\#).$$

也就是说, 同体积区域中球的第一 Dirichlet 特征值最小. $\square$

这个就是椭圆特征值的等周不等式, 可以用来处理一些椭圆特征值问题, 比如彦老师 PDE2 讲义的问题 1.4.3, 当然那道题不应该这样做, 这个做法是因为 25 年的版本中的 hint 有些误导性.

下面给一个椭圆变分问题中的简单应用. 一般来说, 椭圆主特征值变分的极小化子的性质需要用到极值原理进行刻画, 学过上学期 PDE1 的同学应该有一定印象. 这里我们给出一个不同的处理方式, 思路来源于一个熟知的椭圆结论, “区域大小严格增加, 主特征值严格减少”. 当然这个证明一般依赖极值原理, 是用极小化子加上比较原理来证明的 (这是上个学期的 PDE 作业), 我们这里的处理将展示完全不同的想法. 每个人的数学风格是不同的, 希望同学们可以在阅读不同证明的过程中逐渐形成自己的风格.

Example 6.44 奇性椭圆变分问题中的非负极小子(又一碟饺子醋)

令 $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $0 < \mu < 1/4$. 对 $w \in H_0^1(B)$ 定义

$$I[w] = \int_B |\nabla w|^2 dx - \mu \int_B \frac{w^2}{|x|^2} dx,$$

并设

$$\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(B) : \|w\|_{L^2(B)} = 1\}, \quad \lambda_1(\mu) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

假设 $u \in \mathcal{A}$ 是极小子且 $u \geq 0$, 证明 $u > 0$.

$$I[u^\#] \leq I[u].$$

因此只要极小子存在, 就可以在非负函数中寻找极小子; 若需要, 还可以在非负径向递减函数中寻找.

这里的 $\mu < \frac{1}{4}$ 是来自 Hardy 不等式的最佳常数, 同学们把这个想成椭圆性能压制奇性就行.

Proof. 令 $u^\#$ 为 u 的球对称递减重排. 等分布性给出

$$\|u^\#\|_2 = \|u\|_2 = 1.$$

由 Pólya–Szegő 不等式,

$$\int_B |\nabla u^\#|^2 dx \leq \int_B |\nabla u|^2 dx.$$

另一方面, $V(x) = |x|^{-2}$ 是径向递减的非负函数. 对 $f = u^2$ 使用 Hardy–Littlewood 重排不等式,

$$\int_B \frac{(u^\#)^2}{|x|^2} dx \geq \int_B \frac{u^2}{|x|^2} dx.$$

注意势能项前面是负号, 于是

$$I[u^\#] \leq I[u].$$

现在, 如果有 $|\{u = 0\}| \neq 0$, 那么就能找到球 B_r , 使得 $|B_r| = |\{u \neq 0\}|$, 那么就有

$$I[u] \geq I[u^\#] \stackrel{\text{scaling, } u_r = \frac{1}{r^{3/2}} u^\#(x/r)}{=} r^{-2} I[u_r] > I[u_r].$$

这就和极小化子矛盾了.

上面最后的处理意思是, 极小化子 u 如果有正测度为零, 那么我们就用对称重排把他压缩到一个更小的球 B_r 上, 然后球的特征值比较是很容易的, 我们通过 scaling(这个 scaling 保持 L^2 能量) 将此时对称化后的极小化子放到球 B_1 上, 发现能量变小了 (集合大, 特征值小, 能量泛函最低点就是我们的特征值), 那就和之前的极小性矛盾了. $\square$

7 第六次习题课讲义

7.1 作业答案

Problem 7.1 P162.7

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上非负可积, 且有 $E \subset (0, +\infty)$,

$$\int_E f(x) dx = 1,$$

则

$$\int_E f(x) \cos x dx \neq 1.$$

Proof. 反证, 若等号成立, 那么

$$0 = \int_E f(x)(1 - \cos x) dx.$$

但 $f(x)(1 - \cos x) \geq 0$, 所以 $f(x)(1 - \cos x) = 0$ a.e. 于 E . 注意 $\{x > 0 : \cos x = 1\}$ 至多可数, 故 $1 - \cos x > 0$ a.e. 于 E , 从而 $f = 0$ a.e. 于 E , 这就和 $\int_E f = 1$ 矛盾. $\square$

Problem 7.2 P162.8

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ ($n = 1, 2, \dots$), 且有

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 之前的习题课讲过 L^p 收敛推出 a.e. 收敛的证明, 这里是一样的道理. 对任意 $\epsilon > 0$, 令

$$E_n^\epsilon = \{|f_n - f| > \epsilon\},$$

那么由 Chebyshev 不等式,

$$\sum_n m(E_n^\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_n \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dx \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

因此 $m(\limsup_n E_n^\epsilon) = 0$. 这就证明了几乎处处收敛. $\square$

Problem 7.3 P163.9

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| < \ln n$ ($n = 2, 3, \dots$), 则

$$\int_{[2, +\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

Proof. 这种问题一般是先取绝对值用 Tonelli, 说明这个积分是良定的, 然后再用 Fubini, 这个过程是标准的. 那么

$$\int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^{-x} dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n) \int_2^{+\infty} n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

所以可以逐项积分, 于是

$$\int_{[2, +\infty)} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \int_2^{+\infty} n^{-x} dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} n^{-2}.$$

$\square$

Problem 7.4 P163.10

设定义在 $E \times \mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x, y)$ 满足:

1. 对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x, y)$ 是 E 上的可测函数;
2. 对每一个 $x \in E$, $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g \in L^1(E)$, 使得对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 有

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad \text{a.e. } x \in E,$$

则函数

$$F(y) = \int_E f(x, y) dx$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

Proof. 用 DCT. 任取 $y_k \rightarrow y$, 由关于 y 的连续性可知

$$f(x, y_k) \rightarrow f(x, y), \quad x \in E.$$

同时由题设有统一控制 $|f(x, y_k)| \leq g(x) \in L^1(E)$. 因此

$$F(y_k) = \int_E f(x, y_k) dx \rightarrow \int_E f(x, y) dx = F(y).$$

由序列刻画连续性, F 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. □

Problem 7.5 P192.32

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

若有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0,$$

试证明 $F \in L(\mathbb{R})$.

Proof. 由总积分为零, 当 $x > 0$ 时有 $F(x) = -\int_x^{+\infty} f(t) dt$. 因此

$$\int_0^{+\infty} |F(x)| dx \leq \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} |f(t)| dt dx = \int_0^{+\infty} t |f(t)| dt.$$

另一方面,

$$\int_{-\infty}^0 |F(x)| dx \leq \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x |f(t)| dt dx = \int_{-\infty}^0 (-t) |f(t)| dt.$$

右端之和正是 $\|xf\|_{L^1}$, 故 $F \in L^1(\mathbb{R})$. □

Problem 7.6 P192.33

求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx) dx$$

的值.

Proof. 对 $x > 0$, $\arctan(nx) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 且

$$|\cos x \arctan(nx)| \leq \frac{\pi}{2} \cos x \in L^1\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由 DCT,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Problem 7.7 P192.34

设 $f \in L^1((0, a))$,

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt \quad (a > x > 0),$$

试证明 $g \in L^1((0, a))$, 且有

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Proof. 还是标准的, 先证明可积性, 由 Tonelli 定理,

$$\int_0^a |g(x)| dx \leq \int_0^a \int_x^a \frac{|f(t)|}{t} dt dx = \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t dx dt = \|f\|_{L^1(0, a)} < \infty.$$

于是可以用 Fubini 定理交换次序:

$$\int_0^a g(x) dx = \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt dx = \int_0^a \frac{f(t)}{t} \int_0^t dx dt = \int_0^a f(t) dt.$$

□

7.2 补充内容

1. Hardy–Littlewood 极大函数

课上没有用极大函数这个内容来讲微分定理, 感觉是一种遗憾. 因此在这里补充这个内容. 注意, 这不是进阶内容, 而是标准的.

Definition 7.8 Hardy–Littlewood 极大函数

设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. 定义 Hardy–Littlewood 极大函数

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \, dy,$$

其中上确界取遍所有包含 x 的球 $B \subset \mathbb{R}^d$.

这里采用的是非中心球版本. 一般看到的其他定义也是等价的, 因此不做赘述. HL 极大算子不是一个线性算子, 而是满足次线性性:

$$(f + g)^* \leq f^* + g^*, \quad (af)^* = |a|f^*.$$

这来自 $\sup$ 的三角不等式. 同时由定义立刻有

$$\|f^*\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

其实次线性性不是很坏的事情, 因为我们有 Marcinkiewicz 插值定理, 恰好能处理次线性性算子的估计, 当然这里不会讲这个工具.

接下来我们用有限版的 Vitali 覆盖定理证明我们的 HL 极大函数 weak (1,1) 估计. 在证明之后, 我们将简单解释一下超水平集的意义, 一个可能的更好听的名字是尾概率.

Theorem 7.9 Hardy–Littlewood 极大函数的 weak (1,1) 估计

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$, 则

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_d}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Proof. 记

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \lambda\}.$$

先取紧集 $K \subset E_\lambda$. 对每个 $x \in K$, 按定义可取球 $B_x \ni x$, 使得

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| \, dy > \lambda.$$

对这族球使用上面的 Vitali 覆盖引理, 得到两两不交的 $B_1, \dots, B_N$, 且

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N 3B_j.$$

因而

$$m(K) \leq \sum_{j=1}^N m(3B_j) = 3^d \sum_{j=1}^N m(B_j).$$

又因为每个 B_j 上的 $|f|$ 平均值都大于 λ ,

$$m(B_j) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_j} |f(y)| \, dy.$$

由于 B_j 两两不交,

$$m(K) \leq \frac{3^d}{\lambda} \sum_{j=1}^N \int_{B_j} |f(y)| dy \leq \frac{3^d}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

最后对所有紧集 $K \subset E_\lambda$ 取上确界, 由 Lebesgue 测度的内正则性得到结论. $\square$

Remark. 这里如果让同学们证明 E_λ 可测, 同学们不需要用很麻烦的办法. 因为这个 E_λ 实际上是一个开集, 用内点验证即可.

现在我们来讲讲这个尾概率的意义. 这里我们用的记号是

$$\lambda_f(t) = m(|f| > t).$$

一般空间上这个也不是概率, 不过我们就用这个词. 下面列举一些观念性的东西和一些小例子, 让大家简单感受一下超水平集的意义.

1. L^p 范数是尾分布的加权平均, layer-cake 公式给出

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt.$$

此时看 Chebyshev 不等式, 实际上在说, 当 L^p 可积, 超水平集应该有对应的衰减性.

2. 定义 $L^{p,\infty}$ 空间,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{\lambda>0} \lambda m\{|f| > \lambda\}^{1/p}.$$

这个空间更大, 比如我们可以考虑

$$|x|^{-n/p} \notin L_{\text{loc}}^p, \quad |x|^{-n/p} \in L_{\text{loc}}^{p,\infty}.$$

这实际说明我们捕捉了一类临界奇性现象.

3. 尾概率能刻画集中 (concentration) 现象. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的序列

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n/p} \mathbf{1}_{B_\epsilon}(x).$$

则

$$\|f_\epsilon\|_{L^p}^p = \epsilon^{-n} |B_\epsilon| \sim 1.$$

而对于尾概率,

$$m\{|f_\epsilon| > \lambda\} = \begin{cases} |B_\epsilon|, & 0 < \lambda < \epsilon^{-n/p}, \\ 0, & \lambda > \epsilon^{-n/p}. \end{cases}$$

在 PDE 中, 一个能量有限序列的弱收敛可能会多出一个因为集中产生的缺陷测度 (defect measure), 此时尾概率估计刻画了这里的结构.

4. 可以用超水平集, 将局部有界性转化为 “高的超水平集在有限时间后消失”, 而我们又能用能量估计刻画超水平集的大小 (想想 Chebyshev 不等式), 这就是说, 我们居然能用能量估计导出逐点估计. 这算是 De Giorgi-Moser 迭代背后的内容.
5. De Giorgi-Moser 迭代, Calderón-Zygmund 奇异积分理论, 算子的端点估计, Lorentz 空间等都涉及这个概念.
6. 当然, 这个工具也有局限性. 回忆之前讲的弱收敛三种机制 (amplitude direction, physical-space direction, frequency direction), 前两个姑且能用超水平集相关的内容刻画, 最后一种机制实际被完全掩盖了, 比如在 L^2 空间中考虑 $u_n = \phi e^{inx}$, 这里的弱收敛机制完全无法被超水平集和极大函数捕捉.

2. 用极大函数证明 Lebesgue 微分定理

Theorem 7.10 Lebesgue 微分定理

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, 则对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) \, dy = f(x).$$

更强地,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0$$

对几乎处处的 x 成立.

Proof. 先证明 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 的情形. 记

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) \, dy.$$

固定 $\alpha > 0$, 考虑坏集合

$$\Omega_\alpha = \left\{ x : \limsup_{r \rightarrow 0} A_r(|f - f(x)|)(x) > \alpha \right\}.$$

这里 $A_r(|f - f(x)|)(x)$ 的意思是

$$\frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dy.$$

取 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 令 $h = f - g$. 因为 g 连续, 对每个 x 都有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |g(y) - g(x)| \, dy = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} A_r(|f - f(x)|)(x) &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} A_r|h|(x) + |h(x)| \\ &\leq h^*(x) + |h(x)|. \end{aligned}$$

因此

$$\Omega_\alpha \subset \{x : h^*(x) > \alpha/2\} \cup \{x : |h(x)| > \alpha/2\}.$$

由 weak (1,1) 估计和 Chebyshev 不等式,

$$m(\Omega_\alpha) \leq \frac{C_d}{\alpha} \|h\|_{L^1}.$$

现在使用 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 可以让 $\|h\|_1 = \|f - g\|_1$ 任意小, 所以 $m(\Omega_\alpha) = 0$.

对 $\alpha = 1, 1/2, 1/3, \dots$ 取并集, 得到

$$\limsup_{r \rightarrow 0} A_r(|f - f(x)|)(x) = 0$$

对几乎处处的 x 成立. 这就证明了较强形式, 普通的平均值收敛由三角不等式立刻推出.

L^1_{loc} 的情况其实类似, 因为微分定理本身也只是局部性质, 乘一个截断即可. $\square$

Remark. 证明中一个比较好懂的写法应该是, A_r 是线性算子, f^* 是这个算子的极限. 为了引入小性, 我们可以把 $A_r(f)$ 写成

$$A_r(f) = A_r(f - g) + A_r(g) - g + g - f.$$

如果知道 LDT, 要证明第二个结论, 一般的证法是考虑有理数 q , 然后去估计

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - q| \, dy + |f(x) - q| = 2|f(x) - q| \quad \text{a.e.}$$

3. 卷积型极大函数

介绍过 HL 极大函数后, 我们来介绍另一种极大函数, 我们称之为卷积型极大函数. 在具体讲解前, 我们简单说明他的地位. 对于 HL 极大函数, 从定义来看, 他丢失了抵消 (cancellation) 上的信息, 只保留了比较粗糙的尺度信息 (可以想想为什么). 但当我们想要获得更精细的估计时, 我们必然不能把本身振荡相消的部分随意丢掉, 因此我们去考虑卷积极大函数, 抓住抵消结构, 这也是调和分析的入口之一.

现在定义卷积型极大函数

$$M_{\Phi}(f)(x) = \sup_{\epsilon > 0} |(f * \Phi_{\epsilon})(x)|.$$

这里 $\Phi_{\epsilon}(x) = \epsilon^{-d}\Phi(x/\epsilon)$, $\int \Phi dx = 1$. 这里不妨假设 $\Phi \in \mathcal{S}$, 低正则性也可以用, 但为了做推广 (这里不会讲怎么做) 还是考虑好核.

Theorem 7.11 卷积型极大函数的点态控制

$$M_{\Phi}(f) \lesssim f^{*}(x)$$

对所有局部可积的 f 成立.

Proof. 固定 $\epsilon > 0$. 由绝对值估计,

$$|(f * \Phi_{\epsilon})(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| |f(x-y)| dy.$$

把积分区域分成 $B(0, \epsilon)$ 和二进环带

$$A_k(\epsilon) = \{y : 2^k \epsilon \leq |y| < 2^{k+1} \epsilon\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

在 $B(0, \epsilon)$ 上,

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \epsilon)} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| |f(x-y)| dy &\leq \epsilon^{-d} \sup_{|z| < 1} |\Phi(z)| \int_{B(x, \epsilon)} |f(u)| du \\ &\leq C_d \sup_{|z| < 1} |\Phi(z)| f^{*}(x). \end{aligned}$$

对第 k 个二进环带, 有

$$|\Phi(y/\epsilon)| \leq \sup_{2^k \leq |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)|.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{A_k(\epsilon)} \epsilon^{-d} |\Phi(y/\epsilon)| |f(x-y)| dy &\leq \epsilon^{-d} \sup_{2^k \leq |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)| \int_{|u-x| < 2^{k+1} \epsilon} |f(u)| du \\ &\leq C_d 2^{kd} \sup_{2^k \leq |z| < 2^{k+1}} |\Phi(z)| f^{*}(x). \end{aligned}$$

把低频球和所有二进壳加起来, 得到

$$|(f * \Phi_{\epsilon})(x)| \leq C_d [\Phi]_{\text{dyad}} f^{*}(x).$$

最后对 $\epsilon > 0$ 取上确界即可. □

Remark. 不难看出这个 Φ 其实要求不高, 只要

$$|\Phi(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-d-\delta}$$

即可. 个人感觉这个要求还挺常见的.

4. Hardy 不等式

介绍极大函数后, 接下来这个不等式感觉是用的最多的, 而且证明也完全只用到本科实分析, 因此放到这里讲.

Theorem 7.12 Hardy inequality

若 $1 < p \leq \infty$, 则

$$\|f^*\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}.$$

Proof. $p = \infty$ 已经由定义证明过. 下面设 $1 < p < \infty$.

固定 $\lambda > 0$, 分解

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = f\chi_{\{|f| > \lambda/2\}}, \quad f_2 = f\chi_{\{|f| \leq \lambda/2\}}.$$

因为 $\|f_2\|_\infty \leq \lambda/2$, 所以 $f_2^* \leq \lambda/2$. 因而若 $f^*(x) > \lambda$, 由次线性必有 $f_1^*(x) > \lambda/2$. weak (1,1) 给出

$$m(\{f^* > \lambda\}) \leq m(\{f_1^* > \lambda/2\}) \leq \frac{C_d}{\lambda} \int_{\{|f| > \lambda/2\}} |f(y)| dy.$$

用分布函数公式,

$$\|f^*\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\{f^* > \lambda\}) d\lambda.$$

代入上面的分布估计, 再用 Tonelli 定理交换积分次序:

$$\begin{aligned} \|f^*\|_p^p &\leq C_{p,d} \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{|f(y)| > \lambda/2\}} |f(y)| dy d\lambda \\ &= C_{p,d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_0^{2|f(y)|} \lambda^{p-2} d\lambda dy \\ &\leq C_{p,d} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

取 p 次方根即得结论. □

5. 停时论证与 Calderón–Zygmund 分解

最后介绍一下 CZ 分解这个工具, 其实本质是想给同学们展示一下停时论证这个东西, 但是只找到了这个相对简单的例子.

Theorem 7.13 Calderon–Zygmund 分解

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$, 那么有如下分解

$$f = g + b,$$

满足:

1. $|g| \lesssim \lambda$
2. b 支撑在两两不交的方体 $\{Q_k\}$ 上, 且 $\int_{Q_k} b = 0$.
3. $E = \bigcup Q_k$, $m(E) \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$.

Proof. 用停时论证, 因为函数 L^1 , 考虑

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \leq \lambda$$

总能对充分大的二进方体族成立. 现在开始停时, 要么这个不等式一直成立, 要么在有限时间后找到子方体 Q' , 使得

$$\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f| > \lambda.$$

对于这样的子方体, 有如下基本几何观察

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f| \leq 2^d \lambda.$$

现在把所有停时给出的方体求并, 得到集合 E , 在集合 E 上, 由定义, 有

$$f^* > \lambda.$$

那么用 weak (1,1) 估计, 给出

$$m(E) \leq |\{f^* > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1.$$

现在我们构造 g 和 b ,

$$g = f\chi_{E^c} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j} \quad b = \sum_j (f - f_{Q_j})\chi_{Q_j}.$$

很明显我们可以分块来看, 用 LDT, 可见 $|g| \leq \lambda$, b 支撑在 Q_j 上且有抵消性质. 同时我们根据构造不难看出 g 和 b 都是 L^1 的. $\square$

8 第七次习题课讲义

8.1 作业答案

Problem 8.1 P192.22

试证明

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2} \cos 2xt \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proof. 这个题和实分析关系不大, 一种方法是记住 Gaussian 是 Fourier 变换的不动点 (会差一个系数, 看你背哪个定义), 另一种方法是分部积分解 ODE. 这里展示第二种方法. 令

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{2itx} \, dx.$$

对某个 t , 取 $2|x|e^{-x^2}$ 为导数的控制函数, 然后 DCT 得到积分号下求导. 又由分部积分,

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_{\mathbb{R}} 2ixe^{-x^2} e^{2itx} \, dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} (e^{-x^2})' e^{2itx} \, dx = -2tJ(t). \end{aligned}$$

这里边界项为零. 因此 $J(t) = J(0)e^{-t^2} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$. 取实部并注意虚部是奇函数积分, 得

$$2 \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xt \, dx = \sqrt{\pi}e^{-t^2}.$$

□

Problem 8.2 P192.23

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1, 2, \dots$), 且对于任一可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(x) \, dx \leq \int_E f_{k+1}(x) \, dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) \, dx = \int_E f(x) \, dx.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. 这题的条件和之前一个作业题一样. 先证单调性, 在

$$A_k = \{x : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$$

用第一个条件, 可得 $f_k(x)$ 关于 k 递增.

令 $F(x) = \lim_k f_k(x)$. 对任一可测集 E , 由 MCT 作用于 $f_k - f_1 \geq 0$ 可得

$$\int_E (F - f_1) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f_k - f_1) \, dx = \int_E (f - f_1) \, dx.$$

因而对任一可测集 E 都有

$$\int_E (F - f) \, dx = 0.$$

于是 $F = f$ a.e. 这就证明了 $f_k \rightarrow f$ a.e.

□

Problem 8.3 P192.24

设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \quad x \in E,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < +\infty.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 这个题就是广义 DCT, 之前习题课讲过. 这个技巧必须掌握! 考虑对 $g_k + f_k$ 和 $g_k - f_k$ 分别用 Fatou 引理即可. $\square$

Problem 8.4 P193.25

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D . 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

Proof. 由 Lebesgue 定理, 只要证明 D 是零测集. 记 D' 为 D 的极限点集, 那么 D' 可列, $D \setminus D'$ 中的每个点都是 D 的孤立点. 对每个 $x \in D \setminus D'$, 可取有理端点区间 (p_x, q_x) 使得

$$x \in (p_x, q_x), \quad (p_x, q_x) \cap D = \{x\}.$$

不同的 x 对应的有理端点区间不能相同, 所以 $D \setminus D'$ 至多可列. 因此 D 可列, 从而 $m(D) = 0$. $\square$

Problem 8.5 P193.26

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

Proof. 记

$$L(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h).$$

因为这个极限处处存在, f 在 x 处不连续当且仅当 $f(x) \neq L(x)$. 对 $n \geq 1$, 令

$$D_n = \{x \in [a, b] : |f(x) - L(x)| \geq 1/n\}.$$

下面说明 D_n 没有聚点. 若 $x_j \in D_n$, $x_j \rightarrow x_0$, 且 $x_j \neq x_0$, 由 $L(x_0)$ 的定义可知, 当 j 充分大时 $f(x_j)$ 接近 $L(x_0)$. 同时在 x_j 附近取足够小的去心邻域, 其中的函数值仍然接近 $L(x_0)$, 故 $L(x_j)$ 也接近 $L(x_0)$. 于是 $|f(x_j) - L(x_j)| < 1/n$, 矛盾.

因而每个 D_n 在紧区间 $[a, b]$ 中至多可数. 不连续点集

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

至多可数, 所以 $m(D) = 0$. 由 Lebesgue 定理, f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. $\square$

Problem 8.6 P193.27

设 $E \subset [0, 1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是

$$m(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0.$$

Proof. 在 $(0, 1)$ 内部, χ_E 的不连续点正好是 E 的边界点, 那么直接由 Lebesgue 定理就证完了. $\square$

Problem 8.7 P211.1

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L^1([a, b])$, 试问: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数吗?

Proof. 我们默认原函数逐点可导 (因为这个是完全数分的概念), 那么答案是不存在, 因为 Lebesgue 定理, 计算积分得到矛盾. $\square$

Problem 8.8 P211.2

设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$F'(x) > 0, \quad a \leq x \leq b.$$

试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数.

Proof. 本题有两种做法, 如果知道 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 的 precise representative (这说明 F 是绝对连续的), 那么直接用 N-L 公式即可. 具体为

$$H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t) dF(t).$$

任取 $c \in (a, b)$. 当 $x \neq c$ 时,

$$H(x) - H(c) = F(x)G(x) - F(c)G(c) - \int_c^x G(t) dF(t).$$

整理为

$$\frac{H(x) - H(c)}{x - c} = F(x) \frac{G(x) - G(c)}{x - c} - \frac{1}{x - c} \int_c^x (G(t) - G(c)) dF(t).$$

由连续性即可完成证明.

或者你知道 Stieltjes 积分, 那么 F 作为一个 NBV 函数, 可以实现为一个 Borel 测度, 也就是

$$F(x) - F(a) = \mu_F([a, x]).$$

那么只要证明 $\mu_F \ll m$. 利用 LRN 分解和密度定理 (不是这门课学的密度定理), 对 $\mu_{F,s}$ -a.e. x , 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_F(x-r, x+r)}{2r} = F'(x) < \infty.$$

这表明 $\mu_{F,s} = 0$, 那就完成了. $\square$

Remark. 这个题最合实分析这门课的方法其实还是第一种, 后面第七次习题课讲了一个比较形式的证明.

Problem 8.9 P241.2

设 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 试作 $[a, b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

Proof. 对每个 n , 定义

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \chi_{(x_n, b]}(x), & x_n < b, \\ \chi_{\{b\}}(x), & x_n = b. \end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi_n(x)$$

即可. □

Problem 8.10 P241.3

设 $f(x)$ 是 (a, b) 上的递增函数, $E \subset (a, b)$. 若对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $(a_i, b_i) \subset (a, b)$ ($i = 1, 2, \dots$), 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \quad \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \epsilon,$$

试证明

$$f'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

Proof. 这是 BV 函数 Lebesgue 定理的直接应用, 计算 E 上的积分后是显然的. □

Problem 8.11 P232.1

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续, 且有

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b],$$

则

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

Proof. 微积分基本定理, 这是显然的. □

Problem 8.12 P232.2

设 $f(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上. 若有

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|, \quad x, y \in [a, b],$$

则

$$|f'(x)| \leq M, \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

Proof. Lipschitz 蕴含绝对连续, 然后几乎处处可导, 按照定义求导就行. □

Problem 8.13 P232.3

设 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 $[a, b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a, b]$ 上绝对连续.

Proof. 直接走定义可能会稍微麻烦, 我们可以考虑写成积分来做. 注意

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f'_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a).$$

积分有绝对连续性, 那么就做完了. □

Problem 8.14 P218.8

试证明 $f \in BV([a, b])$ 当且仅当存在 $[a, b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq F(x'') - F(x'), \quad a \leq x' < x'' \leq b.$$

Proof. 充分性是显然的, 因为变差能被 F 的变差控制, 而单增函数是有界变差的. 现在看必要性, 由 Jordan 分解, 有两个递增函数 f_1, f_2 满足

$$f = f_1 - f_2.$$

那么不难看出取控制函数为

$$F = f_1 + f_2$$

即可. □

Problem 8.15 P218.10

设 $f \in BV([a, b])$. 若有

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a),$$

试证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增.

Proof. 直接证明, 考虑 $a < x \leq y < b$, 那么有

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= V_a^b f \geq |f(b) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \\ &\geq |f(y) - f(x) - (f(b) - f(a))| + |f(y) - f(x)| \geq |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

这表明 $f(y) \geq f(x)$. □

Problem 8.16 P222.1

设 $E \subset [0, 1]$. 若存在 ℓ 满足 $0 < \ell < 1$, 使得对 $[0, 1]$ 中任意的子区间 $[a, b]$, 均有

$$m(E \cap [a, b]) \geq \ell(b - a),$$

试证明 $m(E) = 1$.

Proof. 这个题考虑示性函数 χ_E , 那么根据条件, 用 Lebesgue 微分定理, 那么

$$\chi_E \geq \ell \quad \text{a.e.}$$

这就是说 $m(E) = 1$. □

Problem 8.17 P222.2

对于 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问: $[0, 1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

Proof. $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. □

8.2 补充内容

这次的补充内容主要讲解一些习题,帮助大家进行期末复习. 部分题目可能之前讲过类似的,我想多讲几次对同学们也许有好处?

1. 收敛定理

这里讲三个方法,一个是子列方法,一个是比较函数,还有一个是截断方法,最后我们 recall 一下之前的一个经典题目.

Example 8.18 子列方法

(依测度收敛型的 Fatou 引理) 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx.$$

Proof. 这里同学们还是要注意, 用 Fatou 的时候要保证函数是正的. 那么我们考虑 $\liminf$ 的定义, 首先找到子列 $\{f_{k_n}\}$, 使得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_{k_n} dx.$$

此时用 Riesz 定理, 我们对 $\{f_{k_n}\}$ 有几乎处处收敛的子列 $\{f_{\ell}\}$ (而且这个子列的极限正是 f), 那么就有

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k dx = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_E f_{\ell} dx \stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_E f dx.$$

□

Remark. 当然子列方法时常和反证法在一起使用, 同学们写作业的时候应该有所感受.

Example 8.19 比较函数方法

(广义 DCT) 设 $\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \quad x \in E,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < +\infty.$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

Proof. 这个地方的证明是考虑两个比较函数 $g_k - f_k$ 和 $g_k + f_k$ 分别用 Fatou 引理, 计算得到

$$\limsup_k \int f_k \leq \int f,$$

$$\liminf_k \int f_k \geq \int f.$$

那么就是

$$\lim_k \int f_k = \int f.$$

□

Remark. 从我改作业来看, 大部分同学已经领会到了这个方法. 唯一要注意的是, 对于上面第二个式子, 我们不能直接对 f_k 使用 Fatou 引理, 因为我们没有说 $f_k \geq 0$.

Example 8.20 截断方法

设 (X, μ) 是测度空间, $p > 1$, 且一族函数 $\{f_n\}$ 满足

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p} \leq C.$$

证明: 对任意 $M > 0$,

$$\sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \leq \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

从而

$$\sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \rightarrow 0, \quad M \rightarrow +\infty.$$

进一步, 如果 $\mu(X) < +\infty$, 则 $\{f_n\}$ 一致可积.

Proof. 在集合 $\{|f_n| > M\}$ 上, 有

$$|f_n| = |f_n|^p |f_n|^{1-p} \leq |f_n|^p M^{1-p}.$$

因此

$$\int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \leq M^{1-p} \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n|^p d\mu \leq M^{1-p} \|f_n\|_{L^p}^p \leq \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

令 $M \rightarrow +\infty$, 右边趋于 0, 这就给出了统一的尾部小性.

如果 $\mu(X) < +\infty$, 那么对任意可测集 E , 继续做截断:

$$\int_E |f_n| d\mu = \int_{E \cap \{|f_n| \leq M\}} |f_n| d\mu + \int_{E \cap \{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu.$$

于是

$$\int_E |f_n| d\mu \leq M\mu(E) + \frac{C^p}{M^{p-1}}.$$

先取 M 大, 使第二项小; 再取 $\mu(E)$ 小, 使第一项小. 这正是一致可积的定义. $\square$

Remark. 这个题某种意义上来说也不是什么截断方法, 截断方法是想说, 我们通过把尾部的一致小性丢掉, 得到了某种紧性, 而有紧性后我们自然大有可为. 这个题目中的有限测度部分部分传达了这一想法.

Example 8.21 Egorov 定理

设 $m(E) < \infty$. 设 $f_n \rightarrow 0$ a.e. in E , 并且存在 $p > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} \leq C.$$

证明

$$\|f_n\|_{L^1(E)} \rightarrow 0.$$

Proof. 对固定的 $\epsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset E$ 满足 $m(E \setminus A) < \epsilon$, 使得 $f_n \rightarrow 0$ on A , 然后我们直接拆积分

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| dx &= \int_A |f_n| dx + \int_{E \setminus A} |f_n| dx \\ &\leq m(A) \sup_A |f_n| + (m(E \setminus A))^{\frac{1}{p'}} \|f_n\|_p. \quad (\text{用一致收敛和 Hölder 不等式}) \end{aligned}$$

然后前面用一致收敛到 0, 后面用 L^p 有界性加测度小性, 由于 ϵ 是任取的, 就完成了证明. $\square$

Remark. 这个题目之前讲过, 其实是实分析经典老题中为数不多要用 Egorov 的题目, 所以同学们题目做不出来的时候也不要乱用 Egorov, 实际上没有几个题要用这个东西.

2. 交换次序

对于交换次序来说, 我们总是会去尝试使用 Fubini 相关的定理, 不过这有时候需要一些观察. 同时同学们还要意识到 σ -有限也是 Fubini 的条件, 对一个不知名测度空间乱用定理可能无法得分.

Example 8.22 参数积分

设 $0 < a < b$. 证明

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}.$$

Proof. 这个题其实是数分题, 不过学了实分析会好写很多. 注意到

$$e^{-ax} - e^{-bx} = \int_a^b x e^{-tx} dt,$$

所以

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-tx} dt.$$

现在被积函数非负, 可以直接用 Tonelli,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-tx} dt dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-tx} dx dt.$$

内层积分是

$$\int_0^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t},$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{dt}{t} = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}.$$

□

Example 8.23 余面积公式

设 $n \geq 2$. 利用余面积公式计算单位球面 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 的面积, 即证明

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Proof. 这个题其实就是极坐标公式, 写成余面积公式只是想让大家去记一下这个定理的表述. 首先我们知道,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j^2} dx_j = \pi^{n/2}.$$

另一方面, 对函数 $u(x) = |x|$ 使用余面积公式 (逼真使用). 因为 $|\nabla u| = 1$ a.e., 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty \int_{\{|x|=t\}} e^{-t^2} d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt.$$

而

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{|x|=t\}) = t^{n-1} \sigma(S^{n-1}),$$

因此

$$\pi^{n/2} = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt.$$

最后换元 $s = t^2$, 有

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{n-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

代回去就得到

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

□

Example 8.24 平移相交

设 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^2$ 可测, 且 $m(E_1), m(E_2) > 0$. 证明: 存在 $h \in \mathbb{R}^2$, 使得

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

Proof. 不妨考虑有限测度, 因为我们的欧氏空间是 σ -有限的, 不然由

$$E_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_i \cap B_k(0))$$

可知存在可测集 $A_i \subset E_i$ 满足 $0 < m(A_i) < +\infty$.

现在考虑函数

$$F(h) = m(A_1 \cap (A_2 + h)).$$

用示性函数写出来就是

$$F(h) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \chi_{A_2}(x-h) dx.$$

因为被积函数非负, Tonelli 定理给出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} F(h) dh &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \chi_{A_2}(x-h) dx dh \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_1}(x) \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A_2}(x-h) dh dx \\ &= m(A_1)m(A_2) > 0. \end{aligned}$$

所以 F 不可能处处为 0, 于是存在 $h \in \mathbb{R}^2$ 使得

$$m(A_1 \cap (A_2 + h)) > 0.$$

由于 $A_i \subset E_i$, 这就推出

$$m(E_1 \cap (E_2 + h)) > 0.$$

□

Remark. 这个题是博资考和夏令营考试原题, 感觉大家还是要知道这个题目.

Example 8.25 弱 L^q 到强 L^p

设 $m(E) < +\infty$, f 可测. 假设存在 $q > 0$, $C > 0$, 使得对所有 $t \geq 1$,

$$m(\{|f| > t\}) \leq Ct^{-q}.$$

证明: 若 $0 < p < q$, 则

$$f \in L^p(E).$$

Proof. 这个题就是用分布函数来控制积分. 由 layer cake 公式,

$$\int_E |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt.$$

我们把右边拆成两段. 在 $0 < t < 1$ 上, 直接用 $m(\{|f| > t\}) \leq m(E)$, 得到

$$p \int_0^1 t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt \leq pm(E) \int_0^1 t^{p-1} dt = m(E).$$

而在 $t \geq 1$ 上, 由题设有

$$p \int_1^\infty t^{p-1} m(\{|f| > t\}) dt \leq pC \int_1^\infty t^{p-1-q} dt.$$

由于 $p < q$, 右边积分收敛. 因此

$$\int_E |f|^p dx < +\infty,$$

这就说明 $f \in L^p(E)$. □

Remark. 这个题目的目的是展示一下 Layer cake 公式的作用, 感觉大家还要记忆一下这个公式本身的证明.

3. 测度分解

测度分解通常来说是水题, 因为我们用 Hahn 分解和 Jordan 分解能解决大多数问题 (看之前的讲义), 这里补充一个不太平凡的题目, 来自有限正测度的 Fourier 变换, 可以在 Methods of Modern Mathematical Physics 的第二卷找到.

Example 8.26 构造测度

我们称函数 f 是正定的, 若其对任意 $N > 0$, $c_i \in \mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^N c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \geq 0.$$

可以证明, 若 ϕ 是非负可积函数, 那么有

$$\int f(x-y)\phi(x)\phi(y) dx dy \geq 0.$$

Proof. 一个错误的想法是, 将 ϕ 写成简单函数, 尝试后不难发现这样无法使用条件. 比较好的处理方式是, 将 ϕdx 理解为一个概率测度. 不考虑平凡情形, 我们设

$$\|\phi\|_1 = 1 \quad \phi(x) dx = d\nu(x).$$

那么 $d\nu$ 就是一个概率测度. 对于分布为 ν 的 i.i.d. X_i , 我们发现

$$\mathbb{E} \sum_{i,j} f(X_i - X_j) \geq 0.$$

展开, 我们注意到

$$\mathbb{E} f(X_i - X_i) = \int f(0) d\nu(x) \geq 0.$$

上面的 $f(0) \geq 0$ 是平凡的, 对条件考虑 $N = 1$ 即可. 我们还注意到

$$\mathbb{E} f(X_i - X_j) = \int f(x-y) d\nu(x) d\nu(y).$$

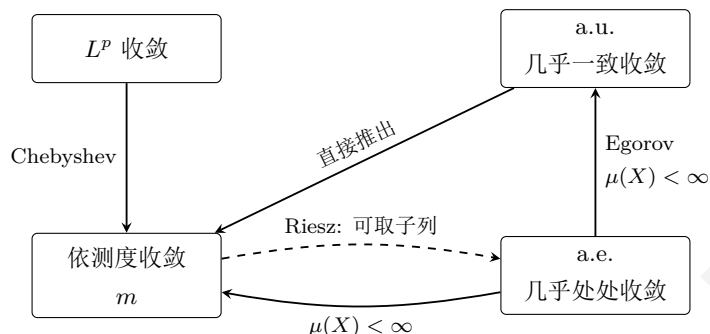
那么我们就得到了

$$0 \leq N\mathbb{E} f(0) + N(N-1) \int f(x-y) d\nu(x) d\nu(y).$$

两边除以 N^2 后令 $N \rightarrow \infty$ 就完成了证明. □

4. 收敛性

本来不想写这个内容, 但是还是放心不下.



反例:

- $m \not\Rightarrow L^p$ 用尖峰函数;
- $m \not\Rightarrow \text{a.e.}$ 用打字机序列;
- $\text{a.e.} \not\Rightarrow m$ 在无限测度空间中用 moving hump.

Example 8.27 Borel–Cantelli 引理

假设 $f \in L^2(0, +\infty)$. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, +\infty).$$

Proof. 这个题似乎以前的答案里做法是直接写成级数然后在单位区间上积分, 但是这未免太技术性了. 我们实际上可以把这个题放回之前的 Borel–Cantelli 引理的框架里, a.e. 收敛理应用这个通用刻画.

观察题目, 我们知道其实只要考虑 $(0, 1]$ 区间. 那么我们现在固定 $\epsilon > 0$, 刻画里面的坏点. 令

$$A_n := \{x \in (0, 1] : |f_n(x)| > \epsilon\}, \quad \text{where } f_n(x) := f(x+n).$$

那么我们用 Chebyshev 不等式, 有

$$|A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

那么求和得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|f\|_2^2 < \infty.$$

那么在 $(0, 1]$ 上就证明了结论. 对每个 $(k, k+1]$ 同理, 最后取可数并即可. $\square$

Remark. 这个题是其实是往年题, 感觉作为例子还是很好的, 因为我记忆中这个题目大伙往往是直接写出级数然后交换次序做, 那个写法很简单但我总觉得不够自然. 如果有同学想用 Calderón–Zygmund 分解来做, 感觉是把两种不同的机制搞混了.

Example 8.28 振荡序列

若 $\lambda_n \rightarrow +\infty$, 则

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x) \text{ 存在}\right\}\right) = 0.$$

Proof. 设收敛集合为

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x) \text{ 存在} \right\}.$$

这个集合可测, 因为这是可测集的下限集. 定义

$$f = \chi_A \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x),$$

由上面的定义, 这个函数也是良定的.

对任意有限测度可测集 E , 由控制收敛定理和 Riemann–Lebesgue 引理,

$$\int_E f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} \sin(\lambda_n x) \, dx = 0.$$

因为这里 E 是任意的, 所以 $f = 0$ a.e.. 当然这里的信息还不够, χ_A 和振荡的信息耦合在一起了, 所以我们看 L^2 , 也就是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap A} \sin^2(\lambda_n x) \, dx = \frac{1}{2} m(E \cap A).$$

但前面已经知道 $f = 0$ a.e., 所以左边也是 0, 从而

$$m(E \cap A) = 0.$$

最后令 $E = [-N, N]$, 再让 $N \rightarrow \infty$, 就得到 $m(A) = 0$. □

Remark. 这个是隔壁班的期中考试题, 讲这个题是因为 PPT 上的过程写的太乱了.

5. 微积分基本定理

这一节稍微补充一点常识, 因为 PPT 上有的结论没有证明. 我个人认为下面这个结论是可以直接用的, 除非要你证明这个东西.

Example 8.29 一维 Sobolev 代表元

设 $u \in W^{1,1}([a, b])$. 证明: 存在一个绝对连续函数 $\tilde{u} \in AC([a, b])$, 使得

$$u = \tilde{u}, \quad \text{a.e.}$$

并且

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x u'(t) \, dt.$$

进一步, 若原函数 u 本身连续, 则 $u = \tilde{u}$ 在每一点成立, 因此 $u \in AC([a, b])$.

Proof. 这个题就是一维 Sobolev 空间里的微积分基本定理. 令

$$v(x) = \int_a^x u'(t) \, dt.$$

那么 $v \in AC([a, b])$, 且 $v' = u'$ a.e.. 于是 $u - v$ 的弱导数为 0. 一维中弱导数为 0 的函数只能几乎处处为常数 (这个不是完全平凡的, 实际上弱导数和经典导数时常不是同一个东西, 因为弱导数要求可积性, 不过这里的条件下问题不大), 因此存在常数 c , 使得

$$u(x) = c + v(x), \quad \text{a.e.}$$

现在定义

$$\tilde{u}(x) = c + \int_a^x u'(t) \, dt,$$

就得到 $\tilde{u} \in AC([a, b])$ 且 $u = \tilde{u}$ a.e.. 同时显然有

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x u'(t) \, dt.$$

最后, 如果 u 本身连续, 那么 $u - \tilde{u}$ 是连续函数, 且几乎处处为 0, 所以只能处处为 0. 这就说明 $u = \tilde{u}$ 在每一点成立. $\square$

Example 8.30 一维 Sobolev 嵌入

设 $u \in W^{1,p}([a,b])$, 其中 $1 \leq p \leq \infty$. 证明 u 有绝对连续代表元, 并且当 $1 < p \leq \infty$ 时, 证明如下 Hölder 型估计:

若 $1 < p < \infty$, 则

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

若 $p = \infty$, 则

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^\infty} |x - y|.$$

Proof. 因为 $[a,b]$ 是有限区间, 所以 $L^p([a,b]) \subset L^1([a,b])$ 对 $1 \leq p \leq \infty$ 成立. 因此 $u \in W^{1,1}([a,b])$, 由上一个例题, u 有绝对连续代表元. 下面我们直接把这个代表元仍然记为 u .

对任意 $x, y \in [a,b]$, 不妨设 $x < y$. 由微积分基本定理,

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t) dt.$$

若 $1 < p < \infty$, 由 Hölder 不等式,

$$|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

若 $p = \infty$, 则直接估计

$$|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^\infty} |x - y|.$$

这就完成了证明. $\square$

Remark. 这里必须要注意一个事, Cantor 函数不是 $W^{1,1}$ 函数, 千万不要搞错了! 这是因为 Cantor 函数的弱导数是 Cantor 测度 κ , 这是一个奇异连续测度, 不是 L^1 函数. 往年题里考虑的是经典导数, 所以和我们说的不是一个事情! 另一个值得注意的点是, 知道这两个结论后, 应该不难自行推导分部积分公式. 至于换元公式, 知道 Lebesgue 测度的仿射性质就行, 比这个容易.

Example 8.31 绝对连续逆函数

设 $f \in AC([a,b])$, 且存在常数 $c > 0$, 使得

$$f'(x) \geq c, \quad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

证明:

1. f 严格递增;
2. $f^{-1} \in AC([f(a), f(b)])$;
3. 对 a.e. $y \in [f(a), f(b)]$, 有

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Proof. 对任意 $a \leq x < y \leq b$, 由微积分基本定理,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt \geq c(y - x) > 0.$$

因此 f 严格递增. 又 f 连续, 所以 f 把 $[a, b]$ 一一映到 $[f(a), f(b)]$, 逆函数存在且连续.

令 $g = f^{-1}$. 上面的估计还给出

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{c}|u - v|, \quad u, v \in [f(a), f(b)].$$

所以 g 是 Lipschitz 函数, 特别地 $g \in AC([f(a), f(b)])$.

最后证明导数公式. 令 N 为 f 不可导的点以及 $f'(x) < c$ 的点的并. 由假设 $m(N) = 0$. 绝对连续函数把零测集映成零测集, 所以 $m(f(N)) = 0$ (这个同学们要会, 用微积分基本定理是一个可行的思路, 下一次讲义里会讲具体做法). 对 $y \notin f(N)$, 记 $x = g(y)$. 这时 f 在 x 处可导, 且 $f'(x) \geq c > 0$. 若 $h \rightarrow 0$, 令 $x_h = g(y + h)$, 则 $x_h \rightarrow x$, 且

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{x_h - x}{f(x_h) - f(x)} \rightarrow \frac{1}{f'(x)}.$$

于是对 a.e. $y \in [f(a), f(b)]$,

$$(f^{-1})'(y) = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

6. L^p 函数

这一部分感觉不需要专门讲什么题目, 用幂函数构造 L^p 空间互不包含太容易了, 而有限测度的包含关系概率论也讲过, 因此就放一个比较简单的题目在这里.

Example 8.32 L^p 范数趋向 L^∞ 范数

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $0 < m(E) < +\infty$, 且 $f \in L^\infty(E)$. 证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Proof. 记

$$M = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

先看上界. 因为 $|f| \leq M$ a.e., 所以

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f|^p dx \right)^{1/p} \leq M m(E)^{1/p}.$$

令 $p \rightarrow \infty$, 得到

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} \leq M.$$

反过来, 若 $M = 0$, 已经结束. 若 $M > 0$, 对任意 $0 < \epsilon < M$, 由本性上确界的定义,

$$A_\epsilon = \{x \in E : |f(x)| > M - \epsilon\}$$

有正测度. 因此

$$\|f\|_{L^p(E)} \geq \left(\int_{A_\epsilon} |f|^p dx \right)^{1/p} \geq (M - \epsilon) m(A_\epsilon)^{1/p}.$$

再令 $p \rightarrow \infty$, 得到

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(E)} \geq M - \epsilon.$$

最后令 $\epsilon \rightarrow 0$, 上下界合在一起就得到结论.

□

7. BV 与 AC 函数

最后我们讲一下 BV 函数和 AC 函数的一些演算性质, 同学们记住简单的例子即可, 往年都没有考太复杂.

Example 8.33 Lipschitz 复合保持性质

设 $u \in BV([a, b])$, Φ 在 $u([a, b])$ 上 Lipschitz. 证明

$$\Phi \circ u \in BV([a, b]),$$

且

$$V(\Phi \circ u) \leq \text{Lip}(\Phi)V(u).$$

进一步证明: 若 $u \in AC([a, b])$, 则

$$\Phi \circ u \in AC([a, b]).$$

Proof. 对任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 直接估计

$$\sum_{i=1}^N |\Phi(u(x_i)) - \Phi(u(x_{i-1}))| \leq \text{Lip}(\Phi) \sum_{i=1}^N |u(x_i) - u(x_{i-1})|.$$

对所有分割取上确界, 就得到

$$V(\Phi \circ u) \leq \text{Lip}(\Phi)V(u) < \infty.$$

因此 $\Phi \circ u \in BV([a, b])$.

如果 $u \in AC([a, b])$, 那么对任意两两不交的小区 (α_j, β_j) ,

$$\sum_j |\Phi(u(\beta_j)) - \Phi(u(\alpha_j))| \leq \text{Lip}(\Phi) \sum_j |u(\beta_j) - u(\alpha_j)|.$$

由 u 的绝对连续性, 右边可以随 $\sum_j (\beta_j - \alpha_j)$ 一起变小, 所以 $\Phi \circ u$ 绝对连续. $\square$

Example 8.34 AC 复合不保持 BV

构造 $\Phi \in AC([0, 1])$ 与 $u \in AC([0, 1])$, 使得

$$\Phi \circ u \notin BV([0, 1]).$$

Proof. 取

$$\Phi(t) = \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1].$$

这是一个绝对连续函数. 下面构造一个绝对连续的级数. 取两两不交的闭区间

$$I_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset (0, 1),$$

只在 0 处可能聚集. 令 ψ_n 是在 I_n 上的帐篷函数: 在端点取 0, 在中点取 1, 分段线性, 在 I_n 外为 0. 于是

$$0 \leq \psi_n \leq 1, \quad V(\psi_n) = 2.$$

定义

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \psi_n(x).$$

简单计算发现这个函数落在 $W^{1,1} \cap C$ 中, 从而 $u \in AC([0, 1])$. 当然也有 $0 \leq u \leq 1$.

但是在每个 I_n 上,

$$\sqrt{u} = \frac{1}{n} \sqrt{\psi_n}.$$

它从 0 上升到 $1/n$, 再下降到 0, 因此

$$V_{I_n}(\sqrt{u}) = \frac{2}{n}.$$

所以

$$V(\Phi \circ u) = V(\sqrt{u}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = \infty.$$

这就说明 $\Phi \circ u \notin BV([0, 1])$. □

Remark. 这个构造不是最好的构造, 放在这里只是为了给出一种不同的思路, 下一次习题课讲义中有一个可能更常规的例子.

Example 8.35 BV 函数的乘积

证明: 若 $f, g \in BV([a, b])$, 则

$$fg \in BV([a, b]),$$

并且

$$V(fg) \leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f).$$

Proof. BV 函数在闭区间上有界, 因此下面的范数都是有限的. 对任意分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^N |f(x_i)| |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &\quad + \sum_{i=1}^N |g(x_{i-1})| |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f). \end{aligned}$$

对分割取上确界, 就得到

$$V(fg) \leq \|f\|_{\infty} V(g) + \|g\|_{\infty} V(f) < \infty.$$

因此 $fg \in BV([a, b])$. □

Example 8.36 必须知道的例子

设 $\alpha, \beta > 0$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明如下刻画:

$$\begin{aligned} f \in C^1([0, 1]) &\iff \alpha > \beta + 1, \\ f \in \text{Lip}([0, 1]) &\iff \alpha \geq \beta + 1, \\ f \in AC([0, 1]) &\iff \alpha > \beta, \\ f \in BV([0, 1]) &\iff \alpha > \beta. \end{aligned}$$

Proof. 首先得把导数算出来, 在 $(0, 1]$ 上,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^{\beta}}.$$

而对于 $x = 0$, 从定义可知, 导数存在当且仅当

$$\alpha > 1,$$

且此时导数为 0.

先看 C^1 . 若 $\alpha > \beta + 1$, 那么上式两项都趋于 0, 而 $f'(0) = 0$, 所以 $f \in C^1([0, 1])$. 反过来, 若 $1 < \alpha \leq \beta + 1$, 取

$$x_n = (2\pi n)^{-1/\beta},$$

则 $\sin(1/x_n^\beta) = 0$, $\cos(1/x_n^\beta) = 1$, 从而

$$f'(x_n) = -\beta x_n^{\alpha-\beta-1}.$$

当 $\alpha < \beta + 1$ 时它无界, 当 $\alpha = \beta + 1$ 时它等于 $-\beta$, 都不可能让 f' 在 0 处连续. 因此 C^1 的条件正是 $\alpha > \beta + 1$.

再看 Lipschitz. 只要考虑 $\alpha = \beta + 1$. 代入导数发现确实逐点有界, 那么用中值定理即可说明. 相反的, 若 f Lipschitz, 那么导数有界, 此时考虑之前的序列, 则给出 $\alpha \geq \beta + 1$.

最后看 AC 和 BV . 第一项 $\alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x^\beta)$ 总是可积的, 真正的问题在第二项. 注意

$$\int_0^\eta x^{\alpha-\beta-1} \left| \cos \frac{1}{x^\beta} \right| dx = \frac{1}{\beta} \int_{\eta^{-\beta}}^\infty t^{-\alpha/\beta} |\cos t| dt.$$

右边收敛当且仅当 $\alpha/\beta > 1$, 即 $\alpha > \beta$. 所以

$$f' \in L^1(0, 1) \iff \alpha > \beta.$$

若 $\alpha > \beta$, 由

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

得到 $f \in AC([0, 1])$, 因而 $f \in BV([0, 1])$.

若 $\alpha \leq \beta$, 上面说明 $f' \notin L^1(0, 1)$. 因此 f 不可能绝对连续. 同时, 对任意 $\eta > 0$, f 在 $[\eta, 1]$ 上是 C^1 函数, 所以

$$V(f; [\eta, 1]) = \int_\eta^1 |f'(x)| dx.$$

令 $\eta \downarrow 0$, 右边发散, 所以 $f \notin BV([0, 1])$. 于是 AC 和 BV 的条件都是 $\alpha > \beta$. □

9 第八次习题课讲义

9.1 作业答案

Problem 9.1 P232.4

设 $f \in BV([0, 1])$. 若对任给 $\epsilon > 0$, $f(x)$ 在 $[\epsilon, 1]$ 上绝对连续, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对连续.

Proof. 这个题的一个看法是, 我们考虑这个函数对应的导数, 绝对连续说明导数是好的, 那么 BV 就说明奇异部分只在 $x = 0$, 而此时函数连续, 那么就没有奇性.

具体来说, 因为 $f \in BV([0, 1])$ 且在 0 处连续, 通过 Jordan 分解等方式可以看出,

$$V_0^\delta(f) \rightarrow 0, \quad \delta \downarrow 0.$$

现在任取 $\eta > 0$. 先取 $\delta_0 > 0$, 使得

$$V_0^{\delta_0}(f) < \frac{\eta}{2}.$$

又因为 f 在 $[\delta_0, 1]$ 上绝对连续, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得任意有限个两两不交区间 $(a_k, b_k) \subset [\delta_0, 1]$ 满足

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta_1$$

时, 有

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\eta}{2}.$$

现在对 $[0, 1]$ 中任意有限个两两不交区间作分割: 落在 $[0, \delta_0]$ 中的部分总贡献不超过 $V_0^{\delta_0}(f)$, 落在 $[\delta_0, 1]$ 中的部分由上面的绝对连续性控制. 取总长度 $\delta < \min(\delta_0, \delta_1)$, 就得到

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \eta.$$

这正是 f 在 $[0, 1]$ 上绝对连续. □

Problem 9.2 P242.4

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上是有界变差函数, 试证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

是 $[0, a]$ 上的有界变差函数.

Proof. 题目原本要证明边值为零, 但这个东西一方面没有道理 (比如你考虑常值函数), 一方面也没有意义 (因为跳跃函数也是 BV 的), 所以我们把这个删去.

由 Jordan 分解, 可写

$$f = f_1 - f_2,$$

其中 f_1, f_2 都是 $[0, a]$ 上的递增函数. 因此只需要证明: 若 f 递增, 则

$$A_f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0$$

是有界变差函数.

对递增 f , 平均函数 A_f 在 $(0, a]$ 上递增. 事实上若 $0 < x < y$, 则

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$$

(这个之前作业应该证明过)

那么实际上就有

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{y} \int_0^y f(t) dt.$$

于是 A_f 在 $(0, a]$ 上单调, 在 0 处至多有一个跳跃, 所以 $A_f \in BV([0, a])$. 对 f_1, f_2 分别应用这一结论, 得到 $F = A_{f_1} - A_{f_2} \in BV([0, a])$. $\square$

Problem 9.3 P242.5

设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数列, 且有

$$V_a^b(f_k) \leq M, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

试证明 $f \in BV([a, b])$, 且满足 $V_a^b(f) \leq M$.

Proof. 这是 BV 函数的下半连续性, 因为这里是一维的, 所以这个结论甚至是平凡的. 任取分划

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

由逐点收敛,

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |f_k(x_i) - f_k(x_{i-1})| \leq M.$$

对所有分划取上确界, 就得到 $V_a^b(f) \leq M$, 特别地 $f \in BV([a, b])$. $\square$

Problem 9.4 P250.3

设 $m(E) < +\infty$, $f(x)$ 是 E 上可测函数, $0 < p_0 < +\infty$, 则

$$\lim_{p \uparrow p_0} \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)|^{p_0} dx.$$

Proof. 我感觉这个题是之前某个作业题.

把区域分成

$$E_1 = \{|f| \geq 1\}, \quad E_2 = \{|f| < 1\}.$$

在 E_1 上, 当 $p \uparrow p_0$ 时, $|f|^p \uparrow |f|^{p_0}$, 由 MCT 得到

$$\int_{E_1} |f|^p dx \rightarrow \int_{E_1} |f|^{p_0} dx.$$

在 E_2 上, 有 $|f|^p \rightarrow |f|^{p_0}$, 且 $|f|^p \leq 1$. 因为 $m(E) < +\infty$, 由 DCT 得到

$$\int_{E_2} |f|^p dx \rightarrow \int_{E_2} |f|^{p_0} dx.$$

两部分相加即得结论. $\square$

Problem 9.5 P253.5

设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数, 且有

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

试证明

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Proof. $q = \infty$ 是显然的, 现在令

$$P = \frac{p}{r}, \quad Q = \frac{q}{r}.$$

由条件可知 $P, Q > 1$ 且

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1.$$

对 $|f|^r$ 和 $|g|^r$ 使用 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \int_E |fg|^r dx &= \int_E |f|^r |g|^r dx \\ &\leq \left(\int_E |f|^{rP} dx \right)^{1/P} \left(\int_E |g|^{rQ} dx \right)^{1/Q} \\ &= \|f\|_p^r \|g\|_q^r. \end{aligned}$$

两边开 r 次方即可. □

Problem 9.6 P289.1

设 $f \in L^\infty(E)$, $w(x) > 0$, 且

$$\int_E w(x) dx = 1,$$

试证明

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_E |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} = \|f\|_\infty.$$

Proof. 带权不等式, 不过和权也没什么关系, 证明是标准的.

记 $M = \|f\|_\infty$. 上界是直接的:

$$\left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p} \leq \left(M^p \int_E w dx \right)^{1/p} = M.$$

反过来, 任取 $\epsilon > 0$, 由本性上确界的定义,

$$A_\epsilon = \{|f| > M - \epsilon\}$$

有正测度. 又因为 $w > 0$ a.e., 所以

$$\int_{A_\epsilon} w dx > 0.$$

因而

$$\left(\int_E |f|^p w dx \right)^{1/p} \geq (M - \epsilon) \left(\int_{A_\epsilon} w dx \right)^{1/p}.$$

令 $p \rightarrow \infty$, 得到下极限不小于 $M - \epsilon$. 再令 $\epsilon \downarrow 0$, 结论成立. □

Problem 9.7 P289.2

设 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若对任意的 $f \in L^2(E)$, 有

$$\|gf\|_2 \leq M\|f\|_2,$$

试证明 $|g(x)| \leq M$, a.e. $x \in E$.

Proof. 反证. 若结论不成立, 则存在 $k \geq 1$, 使得

$$A_k = \left\{ |g| > M + \frac{1}{k} \right\}$$

有正测度. 因为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 σ 有限的, 可取可测集 $B \subset A_k$ 满足

$$0 < m(B) < +\infty.$$

令 $f = \chi_B$, 则 $f \in L^2(E)$. 由题设,

$$\|g\chi_B\|_2 \leq M\|\chi_B\|_2.$$

但另一方面,

$$\|g\chi_B\|_2 \geq \left(M + \frac{1}{k}\right) \|\chi_B\|_2,$$

矛盾. 因此 $|g| \leq M$ a.e.

□

Problem 9.8 P289.4

设 $f \in L^2([0, 1])$, 令

$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}} dt, \quad 0 < x < 1.$$

试证明

$$\left(\int_0^1 g^2(x) dx \right)^{1/2} \leq 2\sqrt{2} \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Proof. 这个题稍微有点意思, 是 Schur 估计. 可能有同学期待证明 g 的良好性, 但我们实际上没法做出好的逐点估计, 还是要把 L^2 搞出来. 记

$$K(x, t) = \frac{1}{|x-t|^{1/2}}.$$

对任意 $x \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^1 K(x, t) dt = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} \leq 2\sqrt{2},$$

同理对任意 $t \in [0, 1]$ 也有

$$\int_0^1 K(x, t) dx \leq 2\sqrt{2}.$$

由 Cauchy 不等式,

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 K(x, t) dt \right) \left(\int_0^1 K(x, t) |f(t)|^2 dt \right) \leq 2\sqrt{2} \int_0^1 K(x, t) |f(t)|^2 dt.$$

再对 x 积分并交换积分次序,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(x)|^2 dx &\leq 2\sqrt{2} \int_0^1 |f(t)|^2 \left(\int_0^1 K(x, t) dx \right) dt \\ &\leq 8 \int_0^1 |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

两边开方即得结论.

□

Problem 9.9 P289.5

试证明下列两个不等式不能同时成立:

$$\int_0^\pi (f(x) - \sin x)^2 dx \leq \frac{4}{9},$$

$$\int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx \leq \frac{1}{9}.$$

Proof. 若二者同时成立, 则由 Minkowski 不等式,

$$\|\sin x - \cos x\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|f - \sin x\|_2 + \|f - \cos x\|_2 \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

但直接计算

$$\|\sin x - \cos x\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 dx = \pi,$$

从而 $\|\sin x - \cos x\|_2 = \sqrt{\pi} > 1$, 矛盾. □

Problem 9.10 P290.8

设 $f, g \in L^3(E)$, 且有

$$\|f\|_3 = \|g\|_3 = \int_E f^2(x)g(x) dx = 1,$$

试证明

$$g(x) = |f(x)|, \quad \text{a.e. } x \in E.$$

Proof. 由 Hölder 不等式,

$$1 = \int_E f^2 g dx \leq \int_E |f|^2 |g| dx \leq \| |f|^2 \|_{3/2} \|g\|_3 = \|f\|_3^2 \|g\|_3 = 1.$$

因此上面两处不等式都是等号. 第一处等号说明在 $\{f \neq 0\}$ 上有 $g \geq 0$ a.e.

第二处是 Hölder 等号情形, 故存在常数 $c \geq 0$, 使得

$$|f|^3 = c|g|^3, \quad \text{a.e.}$$

由 $\|f\|_3 = \|g\|_3 = 1$ 可知 $c = 1$, 所以 $|g| = |f|$ a.e. 结合 $g \geq 0$ a.e. 于 $\{f \neq 0\}$, 并注意 $\{f = 0\}$ 上也有 $g = 0$ a.e., 得到 $g = |f|$ a.e. □

Problem 9.11 P290.15

设 $\{\varphi_k\} \subset L^2(E)$ 是完全标准正交系, 试证明对 $f, g \in L^2(E)$, 有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

Proof. 看起来是默认实值函数.

那么记

$$S_N = \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

因为 $\{\varphi_k\}$ 是完全标准正交系, Fourier 部分和 S_N 在 $L^2(E)$ 中收敛到 f . 于是

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

这就是所需等式. □

9.2 一个必须知道的结论

讲义中大量使用了如下结论, 但是很遗憾的是, 老师上课略过了这个证明, 因此我在此处补上一个 self-contains 的证明. 注意, 这个结论本身比证明重要.

Theorem 9.12 微积分基本定理

若 f 是定义在紧区间 I 上的连续函数, f' 除一个可数集外处处存在且有限, 并且有 $f' \in L^1(I)$, 那么 $f \in AC(I)$.

Proof. 设 $I = [a, b]$, 令

$$N := \{x \in I : f'(x) \text{ 不存在或不有限}\}.$$

由假设 N 至多可数. 把 f' 在 N 上任意定义, 例如定义为 0, 记

$$g(x) := |f'(x)| \in L^1(I).$$

我们先证明一个由 Vitali 覆盖引理推出的估计: 若 $A \subset I \setminus N$ 可测, 则

$$m^*(f(A)) \leq 5 \int_A |f'(x)| dx,$$

其中 m^* 表示 Lebesgue 外测度.

先考虑 $|f'| \leq M$ 于 A 上的情形. 给定 $\eta > 0$, 对每个 $x \in A$, 由 f 在 x 处可微, 存在 $\rho_x > 0$, 使得只要 $|y - x| < \rho_x$, 就有

$$|f(y) - f(x)| \leq (M + \eta)|y - x|.$$

于是若 J 是以 x 为中心且 $5J \subset I$ 、 $|5J| < \rho_x$ 的区间, 则

$$\text{diam } f(5J) \leq (M + \eta)|5J|.$$

取任意开集 $O \supset A$. 由 Vitali 5-覆盖引理, 可以选取两两不交的区间 $\{J_k\}$, 使得 $J_k \subset O$, 且

$$A \subset \bigcup_k 5J_k.$$

因此

$$m^*(f(A)) \leq \sum_k \text{diam } f(5J_k) \leq (M + \eta) \sum_k |5J_k| = 5(M + \eta) \sum_k |J_k| \leq 5(M + \eta)m(O).$$

令 $O \downarrow A$, 再令 $\eta \downarrow 0$, 得到

$$m^*(f(A)) \leq 5M m(A).$$

现在回到一般情形. 对 $r > 0$, 令

$$A_n := A \cap \{(n-1)r < g \leq nr\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

并令 $A_0 := A \cap \{g = 0\}$. 由上一步知

$$m^*(f(A_n)) \leq 5nr m(A_n) \leq 5 \int_{A_n} (g + r) dx.$$

而 A_0 上 $g = 0$, 同理可得 $m^*(f(A_0)) = 0$. 故

$$m^*(f(A)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(f(A_n)) \leq 5 \int_A g dx + 5r m(A).$$

令 $r \downarrow 0$, 得到

$$m^*(f(A)) \leq 5 \int_A |f'(x)| dx.$$

下面证明 f 绝对连续. 任取区间 $[s, t] \subset I$. 由于 f 连续, $f([s, t])$ 是一个区间, 且

$$|f(t) - f(s)| \leq m(f([s, t])).$$

又因为

$$[s, t] = ([s, t] \setminus N) \cup ([s, t] \cap N),$$

其中 $[s, t] \cap N$ 至多可数, 所以 $f([s, t] \cap N)$ 也是至多可数集, 因而测度为 0. 于是由上面的 Vitali 估计,

$$m(f([s, t])) \leq m^*(f([s, t] \setminus N)) \leq 5 \int_s^t |f'(x)| dx.$$

因此

$$|f(t) - f(s)| \leq 5 \int_s^t |f'(x)| dx.$$

现在给定 $\varepsilon > 0$. 由于 $|f'| \in L^1(I)$, Lebesgue 积分绝对连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得只要可测集 $E \subset I$ 满足 $m(E) < \delta$, 就有

$$\int_E |f'(x)| dx < \frac{\varepsilon}{5}.$$

若 $\{(\alpha_j, \beta_j)\}_{j=1}^m$ 是有限个两两不交的开区间, 且

$$\sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) < \delta,$$

则令 $E = \bigcup_{j=1}^m (\alpha_j, \beta_j)$, 由上面的区间估计得到

$$\sum_{j=1}^m |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \leq 5 \sum_{j=1}^m \int_{\alpha_j}^{\beta_j} |f'(x)| dx = 5 \int_E |f'(x)| dx < \varepsilon.$$

这正是 f 在 I 上绝对连续的定义. 因此 $f \in AC(I)$. □

9.3 2025fin

Problem 9.13 2025-1

证明下列等价:

1. $f \in \text{Lip}[a, b]$, 且 Lipschitz 常数为 M ;
2. $f \in AC[a, b]$, 而且 $|f'(x)| \leq M$, a.e. $x \in [a, b]$.

Proof. 这就是作业题. 首先所有人都应该知道 $\text{Lip} \subset AC$ 这个事实. 那么上推下是平凡的, 下推上是 NL 公式. □

Problem 9.14 2025-2

假设 $f \in L^2(0, +\infty)$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, +\infty).$$

Proof. 这个题上次习题课讲了, 我 copy 一下过程.

我们知道其实只要考虑 $(0, 1]$ 区间. 那么我们现在固定 $\epsilon > 0$, 刻画里面的坏点. 令

$$A_n := \{x \in (0, 1] : |f_n(x)| > \epsilon\}, \quad \text{where } f_n(x) := f(x+n).$$

那么我们用 Chebyshev 不等式, 有

$$|A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx.$$

那么求和得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \|f\|_2^2 < \infty.$$

那么在 $(0, 1]$ 上就证明了结论. 对每个 $(k, k+1]$ 同理, 最后取可数并即可. □

Problem 9.15 2025-3

假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx, \quad \forall g \in L^\infty[0, 1].$$

证明: f 是凸函数.

Proof. 这个题上课应该讲过. 任取 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, 1]$, 令

$$g(s) = \begin{cases} x, & 0 \leq s \leq t, \\ y, & t < s \leq 1. \end{cases}$$

则 $g \in L^\infty[0, 1]$, 代入题设得到

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

这正是凸函数的定义. □

Problem 9.16 2025-4

下列命题是否正确? 证明或举反例:

1. 假设 $f, g \in AC[a, b]$, 则 $f(x)g(x) \in AC[a, b]$;
2. 假设 $f, g \in AC[a, b]$, 而且 $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 则 $f(g(x)) \in AC[a, b]$.

Proof. 第一问是正确的. 因为绝对连续函数在紧区间上有界, 且

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{a.e.}$$

右边属于 $L^1[a, b]$, 再用 Newton-Leibniz 公式即可得到 $fg \in AC[a, b]$.

第二问是错误的 (之前给过一个反例, 这里找的更简单). 在 $[0, 1]$ 上取

$$f(x) = \sqrt{x},$$

以及

$$g(0) = 0, \quad g(x) = x^{3/2} \sin^2 \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1.$$

显然 $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. 直接计算可知

$$g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} \sin^2 \frac{1}{x} - 2x^{-1/2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \in L^1(0, 1),$$

所以 $g \in AC[0, 1]$. 另一方面 $f \in AC[0, 1]$, 但

$$f(g(x)) = x^{3/4} \left| \sin \frac{1}{x} \right|.$$

考虑零点 $x_n = (n\pi)^{-1}$ 和峰点 $y_n = (n\pi + \pi/2)^{-1}$, 计算变差, 注意到

$$2y_n^{3/4} \gtrsim n^{-3/4}.$$

求和发散, 所以 $f \circ g \notin BV[0, 1]$, 不可能绝对连续. □

Problem 9.17 2025-5

设 μ 是 σ -有限测度, ν 是有限测度, 而且

$$\nu \ll \mu, \quad \nu \perp \mu.$$

证明: $\nu = 0$.

Proof. 第一行的条件和题目本身没关系. 由 $\nu \perp \mu$, 存在可测集 A , 使得

$$\mu(A) = 0, \quad \nu(X \setminus A) = 0.$$

又因为 $\nu \ll \mu$, 所以 $\nu(A) = 0$. 因而

$$\nu(X) = \nu(A) + \nu(X \setminus A) = 0,$$

即 $\nu = 0$. □

Problem 9.18 2025-6

设 μ 是自然数集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上的计数测度. 假设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y + 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \neq \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x).$$

说明该结果与 Fubini 定理为何不冲突.

Proof. 计数测度下积分就是求和. 固定 y 时,

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x, y) = 1 - 1 = 0,$$

所以

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) = 0.$$

固定 x 时, 若 $x = 1$, 则

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(1, y) = 1;$$

若 $x \geq 2$, 则

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(x, y) = 1 - 1 = 0.$$

因而

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x) = 1.$$

两个累次积分确实不相等.

这和 Fubini 定理不冲突, 因为

$$\sum_{x, y} |f(x, y)| = +\infty,$$

也就是 $f \notin L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Fubini 的绝对可积条件根本没有满足. □

Problem 9.19 2025-7

假设 $f \in AC[a, b]$, 证明: f 将零测集映为零测集.

Proof. 这是绝对连续函数的 Lusin N 性质. 设 $E \subset [a, b]$ 且 $m(E) = 0$. 因为 $f \in AC[a, b]$, 有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad f' \in L^1[a, b].$$

任取 $\epsilon > 0$. 由积分的绝对连续性, 可取开集 $G \supset E$, 使得

$$\int_G |f'(t)| dt < \epsilon.$$

将 G 写成至多可数个两两不交开区间的并:

$$G = \bigcup_k (a_k, b_k).$$

对每个分量,

$$m(f((a_k, b_k))) \leq V(f; (a_k, b_k)) \leq \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt.$$

因此

$$m^*(f(E)) \leq \sum_k m(f((a_k, b_k))) \leq \int_G |f'(t)| dt < \epsilon.$$

令 $\epsilon \downarrow 0$, 得到 $m(f(E)) = 0$. □

Problem 9.20 2025-8

假设 $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$, 记

$$I_n = \left(r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}\right).$$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}(x) \in L^2[0, 1] \setminus R[0, 1].$$

这里 $R[0, 1]$ 通常指 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数类.

Proof. 记

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}(x).$$

先证明 $F \in L^2[0, 1]$. 由单调收敛定理,

$$\begin{aligned} \int_0^1 F^2 dx &= \sum_{n,k=1}^{\infty} m(I_n \cap I_k \cap [0, 1]) \\ &\leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \min\{2^{1-n}, 2^{1-k}\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)2^{1-k} < \infty. \end{aligned}$$

所以 $F \in L^2[0, 1]$.

再看 Riemann 可积性. 实际上 F 在任意非空开区间上都无界. 给定开区间 J , 因为有理数稠密, 可取 $r_{n_1} \in J$, 于是 $J \cap I_{n_1}$ 仍含有非空开区间. 再在这个开区间中取 r_{n_2} , 继续下去. 对任意 N , 可以找到 $n_1, \dots, n_N$, 使得 (这里是每次选不一样的有理数)

$$J \cap I_{n_1} \cap \dots \cap I_{n_N} \neq \emptyset.$$

因而在 J 中有点使 $F \geq N$. 这说明 F 在任何小区间都无界, 所以它不可能是 Riemann 可积函数. □

Problem 9.21 2025-9

假设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是 Cantor 函数.

1. 判断下列是否正确:

- (a) $f \in AC[0, 1]$;
- (b) $f \in BV[0, 1]$;
- (c) $f \in \text{Lip}[0, 1]$;
- (d) f' 几乎处处存在, 而且 $f' \in L^1[0, 1]$.

2. 计算

$$\int_0^1 f'(x) dx - f(1) + f(0).$$

3. 计算:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} f(x), \quad \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} f'(x).$$

4. 计算 $V_0^1 f$.

Proof. (这是一个超级无聊的送分题, 希望期中考试没有造出 Cantor 集的同学能被稳稳接住.)

1. AC 错, 因为 NL 公式不成立
2. BV 对, 因为单调增
3. Lip 错, AC 都不是
4. 对, 因为 $f' = 0$ a.e.

接下来四个计算, 答案为: $-1, 1, 0, 1$. 这太水了.

□

9.4 2024fin

Problem 9.22 2024-1

假设 $f \in C[a, b]$, 证明:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Proof. 一方面这是显然的, 因为 essential supremum 总是不超过通常的 supremum, 而连续函数在紧区间上取到最大值.

反过来, 设

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

取 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $|f(x_0)| = M$. 若 $\operatorname{ess\,sup} |f| < M$, 则取 α 满足

$$\operatorname{ess\,sup} |f| < \alpha < M.$$

由连续性, 存在 x_0 的一个相对邻域 $I \subset [a, b]$, 使得

$$|f(x)| > \alpha, \quad x \in I.$$

但 $m(I) > 0$, 这与 essential supremum 的定义矛盾. 所以

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| = M.$$

□

Problem 9.23 2024-2

假设 $p, q \in [1, +\infty]$ 而且 $p \neq q$, 证明:

$$L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

Proof. 这个题就是两类经典反例: 无穷远处衰减不够快, 或者原点处爆破太快. 下面约定 $1/\infty = 0$.

若 $p > q$, 取

$$\nu \in \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right), \quad f(x) = x^{-\nu} \chi_{(1, \infty)}(x).$$

则

$$\int_1^\infty x^{-p\nu} dx < \infty, \quad \int_1^\infty x^{-q\nu} dx = \infty.$$

当 $p = \infty$ 时, 上面只要理解为 f 有界即可. 因而 $f \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.

若 $p < q < \infty$, 取

$$\mu \in \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right), \quad f(x) = x^{-\mu} \chi_{(0, 1)}(x).$$

则 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 但 $f \notin L^q(\mathbb{R})$. 若 $q = \infty$, 任取 $0 < \mu < 1/p$, 同样有

$$x^{-\mu} \chi_{(0, 1)} \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R}).$$

□

Problem 9.24 2024-3

假设

$$f(x) = \int_0^x t^{-1/2} \sin \frac{1}{t} dt.$$

证明:

$$f \in BV[0, 1].$$

Proof. 积分都看到了, 这就有底了, 而且里面甚至直接是 L^1 函数. 令

$$g(t) = t^{-1/2} \sin \frac{1}{t}, \quad t \in (0, 1].$$

则

$$|g(t)| \leq t^{-1/2} \in L^1(0, 1).$$

因而 $g \in L^1(0, 1)$, 所以

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt$$

是 $[0, 1]$ 上的绝对连续函数. 于是 $f \in AC[0, 1] \subset BV[0, 1]$. □

Problem 9.25 2024-4

考虑函数列

$$\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \dots\},$$

其中 $f_{n,j} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[(j-1)/n, j/n)}(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

该函数列是否以 L^2 收敛, 是否存在子序列几乎处处收敛?

Proof. 这是打字机序列. 计算范数有

$$\|f_{n,j}\|_{L^2[0,1]}^2 = \int_0^1 f_{n,j}(x)^2 dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

所以该函数列在 L^2 中收敛到 0.

范数收敛都有了, 就有依测度收敛, 从而有几乎处处收敛子列. □

Problem 9.26 2024-5

假设 $E \subset [0, 2\pi]$ 是可测集, $a_n \in \mathbb{R}$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sin^2(nt + a_n) dt = \frac{1}{2} m(E).$$

Proof. 先用恒等式

$$\sin^2(nt + a_n) = \frac{1 - \cos(2nt + 2a_n)}{2}.$$

因而只需要证明

$$\int_E \cos(2nt + 2a_n) dt \rightarrow 0.$$

注意

$$\cos(2nt + 2a_n) = \cos(2nt) \cos(2a_n) - \sin(2nt) \sin(2a_n).$$

因为 $\chi_E \in L^1[0, 2\pi]$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\int_0^{2\pi} \chi_E(t) \cos(2nt) dt \rightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} \chi_E(t) \sin(2nt) dt \rightarrow 0.$$

现在相当于变成一个数列问题, x_n 是有界数列, 而 y_n 收敛到 0. 那么 $x_n y_n$ 显然收敛到 0, 这就做完了. □

Problem 9.27 2024-6

假设 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1,$$

而且

$$\varphi(x) = 0, |x| \geq 1; \quad \varphi(x) > 0, |x| < 1.$$

假设 $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$f_n(x) := \int_{\mathbb{R}} n\varphi(n(x-y))f(y) dy.$$

证明: $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, 而且 f_n 以 L^1 收敛到 f .

Proof. 这是标准的磨光核. 先看光滑性. 对任意 $k \geq 0$, 形式求导得到

$$f_n^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} n^{k+1}\varphi^{(k)}(n(x-y))f(y) dy.$$

这一步可以用 DCT 验证, 因为对固定 n, k ,

$$\left| n^{k+1}\varphi^{(k)}(n(x-y))f(y) \right| \leq n^{k+1}\|\varphi^{(k)}\|_\infty |f(y)| \in L^1(\mathbb{R}_y).$$

所以 $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

再看 L^1 收敛. 换元 $z = n(x-y)$ 可得

$$f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)f\left(x - \frac{z}{n}\right) dz.$$

因为 $\int \varphi = 1$, 有

$$f_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \left[f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right] dz.$$

用 Tonelli 定理,

$$\|f_n - f\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) \left\| f\left(\cdot - \frac{z}{n}\right) - f(\cdot) \right\|_{L^1} dz.$$

对每个固定 z , 积分的平移连续性给出

$$\left\| f\left(\cdot - \frac{z}{n}\right) - f(\cdot) \right\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

同时它被 $2\|f\|_{L^1}$ 控制, 而 φ 有紧支撑且可积. 再用 DCT, 得到 $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$. □

Problem 9.28 2024-7

假设 (X, Γ, μ) 是一个测度空间,

$$f \in L^1(X, \mu), \quad 0 \leq f \leq 1.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x)^n d\mu(x) = \mu(f^{-1}(\{1\})).$$

Proof. 逐点看就行:

$$f(x)^n \rightarrow \chi_{f^{-1}(\{1\})}(x).$$

因为 $0 \leq f^n \leq f \in L^1(X, \mu)$, 由 DCT,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x)^n d\mu(x) = \int_X \chi_{f^{-1}(\{1\})} d\mu(x) = \mu(f^{-1}(\{1\})).$$

□

Problem 9.29 2024-8

假设 $f \in C^1[a, b]$. 证明:

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Proof. 先证上界. 对任意分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 由微积分基本定理,

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

对分划取上确界, 得到

$$V_a^b f \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

反过来, 由 $|f'|$ 的连续性, 对任意 $\epsilon > 0$, 可取足够细的分划, 使得任意取标记点的 Riemann 和都与 $\int_a^b |f'|$ 相差小于 ϵ . 对每个小区间, Lagrange 中值定理给出 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}).$$

因而

$$V_a^b f \geq \sum_i |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \geq \int_a^b |f'(x)| dx - \epsilon.$$

令 $\epsilon \downarrow 0$ 即可. □

Problem 9.30 2024-9

假设 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, 而且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx = 0.$$

证明:

$$f = \text{常数}, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Proof. 这个题不能简单说 $f' = 0$, 因为 L^∞ 函数可以有跳跃. 正确做法是用 Lebesgue 点来恢复函数值.

取 $x < y$ 都是 f 的 Lebesgue 点. 因为 $f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$, 由 Lebesgue 点定理,

$$f(x) - f(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(z) dz \right).$$

整理积分区间,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z) dz - \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(z) dz = \int_x^y \frac{f(z) - f(z+h)}{h} dz.$$

因而

$$|f(x) - f(y)| \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| dz = 0.$$

这说明对几乎处处的 x, y , 有 $f(x) = f(y)$. 由 Fubini 定理, 可取一个 Lebesgue 点 x_0 , 使得 $f(y) = f(x_0)$ 对 a.e. y 成立. 因而 f 几乎处处为常数. □

Problem 9.31 2024-附加

假设 $a, b > 0$. 证明:

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{1}{x^a + y^b} dm_2(x, y) < \infty \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1.$$

Proof. 唯一的问题在 $(0, 0)$ 附近. 作换元

$$u = x^a, \quad v = y^b.$$

记 $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, 则积分的敛散性等价于

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} v^{\beta-1}}{u+v} du dv$$

的敛散性.

把区域分成 $v < u$ 和 $u < v$. 在 $v < u$ 上, $u+v \sim u$, 因而对应积分与

$$\int_0^1 \int_0^u u^{\alpha-2} v^{\beta-1} dv du = C \int_0^1 u^{\alpha+\beta-2} du$$

同阶. 这收敛当且仅当 $\alpha + \beta > 1$. 另一半区域 $u < v$ 完全一样. 所以原积分有限当且仅当

$$\alpha + \beta > 1,$$

也就是

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1.$$

□

9.5 2023fin

Problem 9.32 2023-1

举例说明下面两个包含关系均为真包含关系:

$$\text{Lip}[0, 1] \subset AC[0, 1] \subset BV[0, 1].$$

Proof. 前一个真包含取

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

因为 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in L^1(0, 1)$, 所以 $f \in AC[0, 1]$. 但 f 不可能 Lipschitz, 因为

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty.$$

后一个真包含取 Cantor 函数 $C(x)$. 它单调递增, 所以 $C \in BV[0, 1]$. 但 $C' = 0$ a.e. 且 $C(1) - C(0) = 1$, 若 $C \in AC[0, 1]$, 则

$$C(1) - C(0) = \int_0^1 C'(x) dx = 0,$$

矛盾. 因而 $C \notin AC[0, 1]$. □

Problem 9.33 2023-2

已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}, \{g_j\}$ 分别几乎处处收敛到 f, g , 且

$$|f_j(x)| \leq g_j(x).$$

若 $\{g_j\}$ 依 L^1 范数收敛到 g , 试证明 $\{f_j\}$ 也依 L^1 范数收敛到 f .

Proof. 这就是广义 DCT, 不写了. □

Problem 9.34 2023-3

已知有两列非负可积函数 $\{f_j\}, \{g_j\}$ 分别依测度收敛到 f, g , 试判断 $\{f_j g_j\}$ 是否依测度收敛到 $f g$? 解释理由.

Remark. 这个题假设了可积函数, 因此并不需要测度有限.

Proof. 结论是对的. 这个题就是依测度收敛对乘法封闭, 但是要用截断把无界性处理掉.

任取 $\epsilon > 0$. 因为 f, g 可积, 可先取 $M \geq 1$, 使得

$$m(\{|f| > M\}) + m(\{|g| > M\}) < \epsilon.$$

在集合

$$\{|f| \leq M, |g| \leq M, |f_j - f| \leq 1\}$$

上有 $|f_j| \leq M + 1$, 从而

$$|f_j g_j - f g| \leq |f_j| |g_j - g| + |g| |f_j - f| \leq (M + 1) |g_j - g| + M |f_j - f|.$$

因此

$$\begin{aligned} m(\{|f_j g_j - f g| > \epsilon\}) &\leq m(\{|f| > M\}) + m(\{|g| > M\}) + m(\{|f_j - f| > 1\}) \\ &\quad + m\left(\{|g_j - g| > \frac{\epsilon}{2(M+1)}\}\right) + m\left(\{|f_j - f| > \frac{\epsilon}{2M}\}\right). \end{aligned}$$

令 $j \rightarrow \infty$, 后三项趋于 0. 再令 M 取得越来越大, 就得到

$$f_j g_j \rightarrow f g$$

in measure. □

Problem 9.35 2023-4

举例说明 Fubini 定理对一般可测函数不一定正确.

Proof. 可以背诵一下 PPT 或者 25 年的考试题. 设 μ 是 $\mathbb{N}$ 上的计数测度, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y + 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

固定 y 时,

$$\sum_x f(x, y) = 1 - 1 = 0,$$

所以先对 x 求和再对 y 求和得到 0. 固定 x 时, $x = 1$ 给出和为 1, $x \geq 2$ 给出和为 0, 所以反过来的累次积分等于 1. □

Problem 9.36 2023-5

证明 $\mathbb{R}^3$ 中存在可数个互不相交的闭小球 $B_j \subset [0, 1]^3$, 使得

$$m\left([0, 1]^3 \setminus \bigcup_j B_j\right) = 0.$$

Proof. 这就是 Vitali 覆盖定理. 考虑所有包含在 $(0, 1)^3$ 中的闭球组成的族 $\mathcal{B}$. 对 $(0, 1)^3$ 中的任意点 x 和任意 $\delta > 0$, 都存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得

$$x \in B, \quad \text{diam } B < \delta.$$

因而 $\mathcal{B}$ 是 $(0, 1)^3$ 的 Vitali 覆盖.

由 Vitali 覆盖定理, 可取至多可数个两两不交的闭球 $\{B_j\} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$m\left((0, 1)^3 \setminus \bigcup_j B_j\right) = 0.$$

再注意边界 $\partial[0, 1]^3$ 是零测集, 就得到题目结论. □

Problem 9.37 2023-6

设 $f \in L^1(E)$, 写出分布函数 $f_*(t)$ 的定义并证明

$$\int_E |f(x)| dx = \int_0^\infty f_*(t) dt.$$

Proof. 分布函数定义为

$$f_*(t) = m(\{x \in E : |f(x)| > t\}), \quad t \geq 0.$$

对每个 x , 有层蛋糕表示

$$|f(x)| = \int_0^\infty \chi_{\{t < |f(x)|\}} dt.$$

由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)| dx &= \int_E \int_0^\infty \chi_{\{t < |f(x)|\}} dt dx \\ &= \int_0^\infty m(\{x \in E : |f(x)| > t\}) dt \\ &= \int_0^\infty f_*(t) dt.\end{aligned}$$

□

Problem 9.38 2023-7

判断对错并给出理由.

1. 单调递增函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的导数几乎处处存在, 导函数可测且

$$f'(x) \in L^+(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

2. 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调函数, 则

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

3. 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 广义 Riemann 可积, Lebesgue 可积, 则两个积分值相同.

Proof. (1) 错. 单调函数确实几乎处处可导, 且导函数是非负可测函数, 但是不一定可积. 取 $f(x) = x$, 则 $f'(x) = 1 \notin L^1(\mathbb{R})$.

- (2) 错. 取 Cantor 函数 C . 它单调递增, 但 $C' = 0$ a.e., 所以

$$\int_0^1 C'(x) dx = 0 \neq 1 = C(1) - C(0).$$

(3) 对. 在有限区间上 Riemann 可积函数的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分一致. 对广义 Riemann 积分, 先在有限区间上截断, 两种积分一致; 再利用 f 的 Lebesgue 可积性控制尾部, 令截断区间趋于全空间即可. □

Problem 9.39 2023-8

证明 $L^\infty(E)$ 空间是 Banach 空间.

Proof. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^\infty(E)$ 中的 Cauchy 列. 对每个 k , 可取 N_k , 使得当 $m, n \geq N_k$ 时,

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty(E)} < 2^{-k}.$$

去掉一个零测集后, 上式对所有这些可数多个 m, n, k 逐点成立. 因而对几乎处处的 x , $\{f_n(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 定义

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

在这些点上成立, 零测集上的定义不影响.

固定 k 并令 $m \rightarrow \infty$, 得到当 $n \geq N_k$ 时

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k} \quad \text{a.e.}$$

所以

$$\|f_n - f\|_{L^\infty(E)} \leq 2^{-k}, \quad n \geq N_k.$$

这说明 $f_n \rightarrow f$ in $L^\infty(E)$. 同时 $f = f_{N_k} + (f - f_{N_k})$ a.e., 右边属于 L^∞ , 所以 $f \in L^\infty(E)$. 因而 $L^\infty(E)$ 完备. □

Problem 9.40 2023-9

设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明

$$V_0^1 f \leq 3.$$

Proof. 在 $(0, 1]$ 上,

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \sin \frac{1}{x} - x^{-1/2} \cos \frac{1}{x}.$$

于是

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq \frac{3}{2} \int_0^1 x^{1/2} dx + \int_0^1 x^{-1/2} dx \leq 3.$$

因此 $f' \in L^1(0, 1)$, 从而 $f \in AC[0, 1]$, 并且

$$V_0^1 f \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq 3.$$

□

Problem 9.41 2023-10

设 $f \in L^1[a, b]$, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

几乎处处成立.

Proof. Lebesgue 点定理的单侧版本. 由 Lebesgue 点定理, 对 a.e. $x \in (a, b)$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

对这样的 x , 当 $h > 0$ 充分小时,

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 2 \cdot \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0.$$

若考虑 $h < 0$, 只要把区间换成 $[x+h, x]$ 即可, 完全一样.

□

9.6 2022fin

备选题很多不是实分析题, 别看.

9.7 2021fin

Problem 9.42 2021-1

$\mathbb{R}$ 上的广义 Riemann 积分是否一定 Lebesgue 可积? 反之是否成立? 举例说明.

Proof. 都不一定.

广义 Riemann 可积不一定 Lebesgue 可积. 例如

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \chi_{[1, \infty)}(x).$$

其广义 Riemann 积分由 Dirichlet 判别法收敛, 但

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

所以不是 Lebesgue 可积函数.

反过来也不一定. 例如

$$f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}.$$

它 Lebesgue 可积且积分为 0, 但是在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积, 更谈不上通常意义下的广义 Riemann 积分. $\square$

Problem 9.43 2021-2

设 $f \in BV[0, 1]$, 集合

$$E = \{x \in [0, 1] : f'(x) = \infty\}$$

是否 Lebesgue 可测?

Proof. 可测. 事实上这和 $f \in BV$ 关系不大, 只要 f 可测且差商可测即可.

记

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

为差商. 用有理数 $h \rightarrow 0$ 刻画导数为 $+\infty$, 可以写成

$$E = \bigcap_{M=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{0 < |h| < 1/N \\ h \in \mathbb{Q}}} \{x : D_h f(x) > M\},$$

端点处可以只在定义域内取 h . 右边是可测集的可数次并交, 因而可测. $\square$

Problem 9.44 2021-3

设 $f, g \in AC[0, 1]$ 且 $g([0, 1]) \subset [0, 1]$, 是否一定有 $f \circ g \in AC[0, 1]$?

Proof. 不一定. 这个题和 9.16 是同一个反例. $\square$

Problem 9.45 2021-4

设 $f \in L(E)$, 证明

$$\int_E |f(x)|^p dx = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Proof. 对每个 x , 有

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} p \lambda^{p-1} d\lambda = \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \chi_{\{|f(x)| > \lambda\}} d\lambda.$$

对 x 积分并用 Tonelli 定理, 得到

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p dx &= \int_E \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \chi_{\{|f(x)| > \lambda\}} d\lambda dx \\ &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.\end{aligned}$$

□

Problem 9.46 2021-5

设有抽象正测度 μ , 定义

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \mu)} = \inf\{M > 0 : \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > M\}) = 0\}.$$

1. 对 $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ 和 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度 m , 证明

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, m)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

2. 对 Dirac 测度 δ_0 , 举例说明 (1) 不对.

3. 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, 是否一定存在 $g \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f = g$ a.e. $x \in \mathbb{R}$?

Proof. (1) 这个之前讲过了.

(2) 取

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

则 $f(0) = 0$, 所以

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \delta_0)} = 0,$$

但 $\sup_{\mathbb{R}} |f| = 1$.

(3) 不一定. 这是作业题. 取 $f = \chi_{[0, \infty)}$. 若存在连续函数 g 使得 $f = g$ a.e., 则 $g = 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 的一个稠密子集上成立, 由连续性得 $g = 0$ on $(-\infty, 0)$. 同理 $g = 1$ on $(0, \infty)$. 这与 g 在 0 处连续矛盾. □

Problem 9.47 2021-6

设 $\{f_k\}$ 为 E 上可数可测函数列, 满足

$$\int_E f_k^2 dx \leq 2021, \quad \int_E f_k f_j dx = 0, \quad \forall k \neq j.$$

证明: 对 $\beta > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n^2} \int_E \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 dx \leq \frac{2021}{n^{2\beta-2}},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 = 0 \quad \text{a.e.}$$

Proof. 第一个估计直接算:

$$\sum_{k=1}^{n^2} \int_E \left(\frac{1}{n^\beta} f_k \right)^2 dx = \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{k=1}^{n^2} \int_E f_k^2 dx \leq \frac{2021 n^2}{n^{2\beta}} = \frac{2021}{n^{2\beta-2}}.$$

令

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{1}{n^\beta} f_k(x) \right)^2.$$

取二进制子列. 由上式,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_E S_{2^m}(x) dx \leq 2021 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(2\beta-2)} < \infty.$$

因而

$$\sum_m S_{2^m}(x) < \infty \quad \text{a.e.},$$

特别 $S_{2^m}(x) \rightarrow 0$ a.e.

若 $2^m \leq n < 2^{m+1}$, 则

$$S_n(x) \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^{2m+2}} f_k(x)^2}{2^{2\beta m}} = 2^{2\beta} S_{2^{m+1}}(x).$$

右边 a.e. 趋于 0, 所以 $S_n \rightarrow 0$ a.e. □

Problem 9.48 2021-7

设 $f, g \in \mathcal{L}^+(E)$, 满足

$$m(\{x \in E : g(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_{\{x \in E : g(x) > t\}} f(x) dx.$$

对 $\forall p \in (1, +\infty)$, 证明:

$$\left(\int_E g(x)^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_E f(x)^p dx \right)^{1/p}.$$

Proof. 这是一个 Hardy 型估计. 记 $A_t = \{x \in E : g(x) > t\}$. 由分布函数公式和题设,

$$\begin{aligned} \int_E g^p dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} m(A_t) dt \\ &\leq p \int_0^\infty t^{p-2} \int_{A_t} f(x) dx dt \\ &= p \int_E f(x) \int_0^{g(x)} t^{p-2} dt dx \\ &= \frac{p}{p-1} \int_E f(x) g(x)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

用 Hölder 不等式,

$$\int_E f g^{p-1} dx \leq \|f\|_p \|g\|_p^{p-1}.$$

若 $\|g\|_p = 0$ 则结论显然, 否则两边除以 $\|g\|_p^{p-1}$ 即可. □

Problem 9.49 2021-8

设 E 零测, 开集列 $\mathcal{O}_k \supset E$, $m(\mathcal{O}_k) < 2^{-k}$, 令

$$\Phi(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t) dt.$$

证明 $\Phi(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\Phi'(x) = \infty$, $x \in E$.

Proof. 原本的题目结论错了, 这里已做修改.

令

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t).$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_k) < \infty,$$

有 $h \in L^1(\mathbb{R})$. 因而

$$\Phi(x) = \int_0^x h(t) dt$$

是绝对连续函数, 特别 $\Phi \in C(\mathbb{R})$.

但若 $x \in E$, 则对任意 N , 因为 $x \in \mathcal{O}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_N$ 且这些集合都是开集, 存在 $\delta_N > 0$, 使得当 $|t - x| < \delta_N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_k}(t) \geq N.$$

于是对 $0 < |h| < \delta_N$,

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \geq N.$$

因为 N 任意, 所以导数为 $+\infty$. □

Problem 9.50 2021-9

设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测函数, 且 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = 1$. 通过估计

$$\int_{|x| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy dx$$

证明存在 $|x_0| \leq 1$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y)}{|y-x_0|} dy < 2021.$$

Proof. 原本的提示有点问题, 这里也改了.

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|y-x|} dx dy \\ &\leq \int_{|y| \leq 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x-y|} dx dy + \int_{|y| > 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x-y|} dx dy \\ &\leq \int_{|y| \leq 2} |f(y)| \int_{|z| \leq 3} \frac{1}{|z|} dz dy + \int_{|y| > 2} |f(y)| \int_{|x| \leq 1} 1 dz dy \\ &\leq 6\pi \int_{|y| \leq 2} |f(y)| dy + \pi \int_{|y| > 2} |f(y)| dy \leq 6\pi \|f\|_1. \end{aligned}$$

如果对所有 $|x| \leq 1$ 都有

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{|y-x|} dy \geq 2021,$$

那么左边再对 $x \in B(0, 1)$ 积分至少为 2021π , 与 6π 矛盾. 因而存在 $|x_0| \leq 1$ 使得上面积分小于 2021 . □

Problem 9.51 2021-10

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f' \in L^2(\mathbb{R})$. 证明:

1. 任给闭区间 $[a, b]$, 有 $f \in AC[a, b]$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Proof. 用上次习题课讲的小结论, 这个函数当然绝对连续.

现在证明无穷远处趋于 0. 由第一问, f^2 在任意紧区间上绝对连续, 且

$$(f^2)' = 2ff' \in L^1(\mathbb{R})$$

(这里用 Cauchy-Schwarz). 因而对 $x < y$,

$$f(y)^2 - f(x)^2 = 2 \int_x^y f(t)f'(t) dt.$$

因为 $ff' \in L^1(\mathbb{R})$, 当 $x, y \rightarrow +\infty$ 时右边趋于 0, 所以 $f(x)^2$ 在 $+\infty$ 处有极限 (因为 Cauchy 列). 但 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 这个极限只能是 0, 否则尾部积分发散. 因而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

□

9.8 2020fin

Problem 9.52 2020-1

设 $\{f_i\}_{i \in I}$ 是可测函数族, $g = \sup_{i \in I} f_i$. 当 I 是可数集时, g 是否可测? I 是不可数集时, g 是否可测? 证明你的结论.

Proof. 当 I 可数时可测. 因为对任意 $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x : g(x) > a\} = \bigcup_{i \in I} \{x : f_i(x) > a\},$$

右边是可数个可测集的并, 所以可测.

当 I 不可数时不一定可测. 取一个不可测集 $V \subset [0, 1]$, 对每个 $t \in V$ 令

$$f_t(x) = \chi_{\{t\}}(x).$$

每个 f_t 都是可测函数, 但

$$\sup_{t \in V} f_t(x) = \chi_V(x),$$

而 χ_V 不可测. 所以不可数族的上确界不一定可测. □

Problem 9.53 2020-2

证明: 非空完全集不可数.

Proof. 这个是刚上课的时候的作业题, 完全集是完备的, 如果可数, 就与 Baire 纲矛盾. □

Problem 9.54 2020-3

设 X 是无穷集, 证明: X 与 $X \times X$ 等势.

Proof. 集合论不讲, 我也不熟. □

Problem 9.55 2020-4

设有可积函数列 f_n 和 f , 满足

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n.$$

证明 $f_n \rightarrow f$ a.e.

Proof. 这都把 BC 引理送到嘴边了.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| < \infty$$

对 a.e. x 成立. 级数收敛当然推出其通项趋于 0, 所以 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e. □

Problem 9.56 2020-5

证明: 存在 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 满足 f' 存在且可积, 并满足不等式

$$\int_0^1 f'(x) dx < f(1) - f(0).$$

Proof. 这个题目是错的, 应该是导数几乎处处存在. Cantor 函数即可. $\square$

Problem 9.57 2020-6

证明: 存在不可测集 W , 其可测子集必是零测集.

Proof. 取 $[0, 1]$ 中的一个 Vitali 集 W , 即按等价关系 $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ 每个等价类取一个代表元. 这样的 W 不可测.

现在设 $A \subset W$ 且 A 可测. 若 $m(A) > 0$, 由 Steinhaus 定理, $A - A$ 包含 0 的一个邻域. 于是存在非零有理数 $q \in A - A$, 即有 $a, b \in A$ 使得 $a - b = q$. 但 $A \subset W$, 而 W 中任意两个不同点不可能相差有理数, 矛盾. 因此 $m(A) = 0$. $\square$

Problem 9.58 2020-7

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 (1+x^{2n})^{1/n} dx.$$

Proof. 第一个直接换元 $u = \sqrt{nx}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx} dx &= \frac{2}{n} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= \frac{2}{n} (\sqrt{n} - \arctan \sqrt{n}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

第二个用控制收敛. 对 $x \in [0, 1]$, $(1+x^{2n})^{1/n} \rightarrow 1$; 对 $x \in (1, 2]$,

$$(1+x^{2n})^{1/n} = x^2(1+x^{-2n})^{1/n} \rightarrow x^2.$$

又

$$(1+x^{2n})^{1/n} \leq 2 \max\{1, x^2\},$$

右边在 $[0, 2]$ 上可积. 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 (1+x^{2n})^{1/n} dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{10}{3}.$$

$\square$

Problem 9.59 2020-8

设 $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 满足: 对任意 n , 任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ 都有

$$\left| \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq 1.$$

证明 $f = 0$ a.e.

Proof. 这个题的表述有点小问题, 因为如果允许取同一个点, 那就是 $f \equiv 0$. 如果不允许的话, 那就考虑 $\{f > \frac{1}{k}\}$ 这样的集合, 这样的集合在条件下显然零测. 总之是水题. $\square$

Problem 9.60 2020-9

设 $\mathbb{R}$ 上 $m(E) < \infty$, f 为 E 上的可测函数, 证明: 对任意 $\varepsilon > 0$ 存在有界可测函数 g , 使得

$$m\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Proof. 这和标准的 Lusin+Tietze 做法只相差了一个有界性. 这可以用测度的连续性, 考虑

$$E_N := \{x \in E : |f(x)| \leq N\}$$

即可. □

Remark. 这个题加上有界就是隔壁班期中考试题, 个人认为 Lusin+Tietze 的处理是学实分析的时候必须学会的方法.

Problem 9.61 2020-10

设 C 为标准 Cantor 集. 证明 C 没有内点, $\{(x, y) : e^x y \in C\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的可测集. 并进一步证明: 存在没有内点的正测度集.

Proof. 这个题关于 Cantor 集和 Cantor-like set 的部分是平凡的. 映射

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = e^x y$$

连续, 而 C 闭, 所以

$$\{(x, y) : e^x y \in C\} = F^{-1}(C)$$

是闭集, 特别是 Lebesgue 可测集. □

9.9 2019fin

Problem 9.62 2019-1

下列说法是否正确 (证明或举反例): 存在严格单调增加函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = 0.$$

Proof. 这是任老师 PPT 上的例子, 即

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \chi_{(q_k, \infty)}(x).$$

不过这里不是所谓的逐项微分, 应该把级数在 N 处截断, 然后前面逐项微分, 后面用 BV 函数的 Lebesgue 定理得到 2^{-N} 的小性. 还可以用别的测度论办法, 但这超出了这门课的内容. $\square$

Problem 9.63 2019-2

给出 Tonelli 定理在下列特殊情形的详细证明: 假设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中的紧子集, χ_K 是 K 上的特征函数, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy \right) dx.$$

Proof. 先看开集. 若 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是有界开集, 可把 U 分解成至多可数个两两不交的半开小矩形的并. 对一个矩形 $Q = I \times J$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_Q dx dy = |I||J| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_Q(x, y) dy \right) dx.$$

对有限并由可加性得到, 对可数并再用单调收敛定理得到

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_U dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_U(x, y) dy \right) dx.$$

现在回到紧集 K . 令

$$U_n = \{z \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(z, K) < 1/n\}.$$

则 U_n 是有界开集, 且 $U_n \downarrow K$. 由上一步,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{U_n} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_n}(x, y) dy \right) dx.$$

左边由测度连续性趋于 $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K dx dy$. 对固定 x , 截面 $(U_n)_x$ 下降到 K_x , 所以

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{U_n}(x, y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy.$$

又所有 U_n 都包含在某个大矩形中, 右边的截面积函数有一个可积控制. 由控制收敛定理, 右边也收敛到

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_K(x, y) dy \right) dx.$$

于是得到所需等式. $\square$

Problem 9.64 2019-3

设 $L^2[0, 2\pi]$ 是区间 $[0, 2\pi]$ 上实值平方可积函数全体, 其内积定义为

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

1. 写出 $L^2[0, 2\pi]$ 的一组标准正交基.
2. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x), \sin(nx) \rangle = 0$.

Proof. (1) 在这个归一化内积下, 一组标准正交基是

$$1, \quad \sqrt{2} \cos nx, \quad \sqrt{2} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) 先对三角多项式 P 看. 若 P 只含到 N 阶三角函数, 则当 $n > N$ 时

$$\langle P, \sin nx \rangle = 0.$$

对一般 $f \in L^2[0, 2\pi]$, 由三角多项式在 L^2 中稠密, 任取 $\varepsilon > 0$, 可取 P 使得 $\|f - P\|_2 < \varepsilon$. 于是当 $n > N$ 时,

$$|\langle f, \sin nx \rangle| = |\langle f - P, \sin nx \rangle| \leq \|f - P\|_2 \|\sin nx\|_2 \leq \varepsilon.$$

所以 $\langle f, \sin nx \rangle \rightarrow 0$. □

Problem 9.65 2019-4

假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调增加函数, 而且对于所有 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

存在, 其值为实数或无穷. 利用 Vitali 覆盖引理证明

$$m(\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = \infty\}) = 0.$$

Proof. 记 $E = \{x : f'(x) = \infty\}$. 只要证明 $E \cap [a, b]$ 零测即可. 固定 $M > 0$. 对每个 $x \in E \cap [a, b]$, 由 $f'(x) = \infty$ 可知存在任意小的 $h > 0$, 使得

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > M.$$

取中心区间 $I = (x-h, x+h)$, 并令 h 足够小使得 $I \subset (a-1, b+1)$. 这些 I 构成 $E \cap [a, b]$ 的 Vitali 覆盖.

由 Vitali 覆盖引理, 可取两两不交的区间 $I_k = (x_k - h_k, x_k + h_k)$, 使得

$$m\left((E \cap [a, b]) \setminus \bigcup_k I_k\right) = 0.$$

对每个 k 有

$$f(x_k + h_k) - f(x_k) > M h_k = \frac{M}{2} |I_k|.$$

又区间 $(x_k, x_k + h_k)$ 两两不交并且都在 $(a-1, b+1)$ 中, 所以由 f 单调递增,

$$\frac{M}{2} \sum_k |I_k| < \sum_k (f(x_k + h_k) - f(x_k)) \leq f(b+1) - f(a-1).$$

因而

$$m(E \cap [a, b]) \leq \sum_k |I_k| \leq \frac{2(f(b+1) - f(a-1))}{M}.$$

令 $M \rightarrow \infty$, 得 $m(E \cap [a, b]) = 0$. 再对有理端点区间取并, 得 $m(E) = 0$. □

Problem 9.66 2019-5

假设对于所有 $n \in \mathbb{N}$, 函数 f_n, f 是 $\mathbb{R}$ 上非负 Lebesgue 可积函数, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Proof. 考虑 $|f_n - f| \leq f_n + f$, 用广义 DCT 即可. □

Problem 9.67 2019-6

假设 α, β 是正常数, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数满足

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad x \in (0, 1].$$

如果 $f \in BV[0, 1]$, 证明 $f \in AC[0, 1]$.

Proof. 上次习题课讲过了, 不写了. □

Problem 9.68 2019-7

假设 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, 计算全变差 $V_0^1 f$.

Proof. 因为

$$f'(x) = 1 - x \geq 0, \quad x \in [0, 1],$$

所以 f 在 $[0, 1]$ 上单调增加. 因而

$$V_0^1 f = f(1) - f(0) = \frac{1}{2}.$$

□

10 26fin

如果意识到自己存在伪证, 漏掉 $q = \infty$, 或错误使用交换次序的同学, 请不要来查卷. 查卷时间有限.

Problem 10.1 题 1(10 分)

设 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. 若 $F'(x)$ 几乎处处存在, 且 $F' \in L^1([a, b])$, 是否必然有

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt, \quad x \in [a, b]?$$

Proof. 显然不, 考虑 Cantor 函数.

参考给分标准:

1. (2') 不是
2. (3') 举例 Cantor 函数
3. (5') 验证图中两个条件: 导数, 积分

□

Problem 10.2 题 2(10 分)

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集, 且 $1 \leq p < q \leq \infty$. 讨论 $L^p(E)$ 与 $L^q(E)$ 之间的包含关系.

Proof. 注意分情况讨论. 零测空间平凡 (这个不写算了), 有限测度是包含关系, 无限测度没有包含关系. 这个例子讲过. 注意, 这个题表述不清晰, 无限测度时考虑标准的 $\mathbb{R}$ 即可.

参考给分标准:

1. (5') 写出 Hölder 不等式得到包含关系 $\|f\|_p \leq |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$
2. (5') 举出无限测度时互不包含的例子, 其中 $q = \infty$ 占 1 分

完整的正常处理如下 (你们就当这个题出错了就行, 感觉很多人也没意识到问题):

We first show that $L^p(E) \not\subset L^q(E)$. Since $|E| = \infty$, there exists a measurable subset $F \subset E$ such that

$$0 < |F| < \infty.$$

By the non-atomicity of Lebesgue measure, we may choose pairwise disjoint measurable sets $A_k \subset F$ with prescribed small measures.

If $q < \infty$, choose a constant $c > 0$ sufficiently small so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} c 2^{-kq} < |F|.$$

Take pairwise disjoint measurable sets $A_k \subset F$ satisfying

$$|A_k| = c 2^{-kq}.$$

Define

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mathbf{1}_{A_k}.$$

Then

$$\|f\|_{L^p(E)}^p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} |A_k| = c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} 2^{-kq} = c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(q-p)} < \infty,$$

because $q > p$. However,

$$\|f\|_{L^q(E)}^q = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kq} |A_k| = c \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Thus $f \in L^p(E)$ but $f \notin L^q(E)$.

If $q = \infty$, choose $c > 0$ sufficiently small so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} c 2^{-2kp} < |F|.$$

Take pairwise disjoint measurable sets $A_k \subset F$ satisfying

$$|A_k| = c 2^{-2kp}.$$

Define

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mathbf{1}_{A_k}.$$

Then

$$\|f\|_{L^p(E)}^p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} |A_k| = c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} 2^{-2kp} = c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} < \infty.$$

On the other hand, f is not essentially bounded, since it takes the value 2^k on A_k and $|A_k| > 0$ for every k . Hence

$$f \in L^p(E), \quad f \notin L^\infty(E).$$

Therefore,

$$L^p(E) \not\subset L^q(E).$$

Next we show that $L^q(E) \not\subset L^p(E)$. Since $|E| = \infty$, we may choose pairwise disjoint measurable sets $B_k \subset E$ such that

$$|B_k| = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

If $q < \infty$, define

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1/p} \mathbf{1}_{B_k}.$$

Then

$$\|g\|_{L^p(E)}^p = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

However,

$$\|g\|_{L^q(E)}^q = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q/p} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-q/p} < \infty,$$

because $q/p > 1$. Thus

$$g \in L^q(E), \quad g \notin L^p(E).$$

If $q = \infty$, take

$$g = \mathbf{1}_E.$$

Then

$$\|g\|_{L^\infty(E)} = 1,$$

but

$$\|g\|_{L^p(E)}^p = \int_E 1 \, dx = |E| = \infty.$$

□

Problem 10.3 题 3(10 分)

记 $\mathcal{R}[0, 1]$ 为 $[0, 1]$ 上所有 Riemann 可积函数构成的空间. 在 $\mathcal{R}[0, 1]$ 上定义

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

严格地说, 我们把几乎处处相等的函数视为同一个元素. 证明: $\mathcal{R}[0, 1]$ 在 $\|\cdot\|_2$ 范数下不是完备空间.

Proof. 这个题去构造一个 L^2 序列就行. 比如

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/3} \chi_{[1/n, 1]} \\ n^{1/3} \chi_{[0, 1/n]} \end{cases}$$

积分简单放缩后显然 Cauchy.

参考给分标准:

1. (5') 构造例子
2. (5') 计算验证 Cauchy 列, 极限, 与不是 Riemann 可积

□

Problem 10.4 题 4(10 分)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为单调增加函数. 记

$$E_\infty = \{x \in (a, b) : f'(x) = +\infty\},$$

其中导数允许取扩展实数值. 利用 Vitali 覆盖定理证明:

$$m(E_\infty) = 0.$$

Proof. 讲过一模一样的题目. 固定某个大的 M , 然后利用导数定义覆盖 E_∞ , 用 Vitali 覆盖后上界被变差控制. 然后令 $M \rightarrow \infty$ 就得到测度为零.

参考给分标准:

1. (3') 写出导数无穷的刻画 ($> M$)
2. (4') 用 Vitali 覆盖
3. (3') 不等式得到测度为零

□

Problem 10.5 题 5(10 分)

设 $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a, b]$ 为闭区间. 记 $AC(I)$ 为 I 上的绝对连续函数全体. 设 $g \in AC(I)$, $f \in AC(J)$, 并且复合函数 $f \circ g$ 在 I 上有定义, 即

$$g(I) \subset J.$$

是否必有

$$f \circ g \in AC(I)?$$

请证明或给出反例.

Proof. 讲过反例, 比如 $f = \sqrt{x}$, $g = x^4 \sin \frac{1}{x^2}$.

参考给分标准:

1. (3') 知道是造反例
2. (4') 分别验证 f, g 是 AC 函数
3. (3') 验证复合函数不是 AC 函数

□

Problem 10.6 题 6(10 分)

设非负函数 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 并由 f 定义绝对连续测度 μ , 即

$$d\mu = f dx.$$

也就是说, 对任意可测集 $A \subset \mathbb{R}$, 有

$$\mu(A) = \int_A f(t) dt.$$

设 $x \in \mathbb{R}$ 是 f 的一个 Lebesgue 点, 即

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

证明:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu((x-r, x+r))}{2r} = f(x).$$

Proof. 送分题. 整理出积分平均后用 LDT 即可.

参考给分标准:

1. (5') 整理出积分平均
2. (5') 用 LDT

□

Problem 10.7 题 7(10 分)

设 $E \subset \mathbb{R}^2$ 为可测集, 且

$$0 < |E| < \infty.$$

对 $x \in \mathbb{R}$, 定义垂直切片

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}.$$

设

$$A(t) = |\{x \in \mathbb{R} : |E_x| > t\}|.$$

证明:

$$|E| = \int_0^\infty A(t) dt.$$

Proof. 和 Layer-cake 公式没什么区别. 首先

$$|E_x| = \int \chi_E(x, y) dy.$$

而

$$|E| = \int \chi_E \, dy \, dx = \int |E_x| \, dx.$$

这里用 Layer-cake 公式重写

$$|E| = \int |E_x| \, dx = \int_0^\infty m\{|E_x| > t\} \, dt = \int_0^\infty A(t) \, dt.$$

参考给分标准:

1. (5') 知道 $|E|$ 用 $|E_x|$ 表示
2. (5') 用 Layer-cake 公式

□

Problem 10.8 题 8(10 分)

设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个测度空间, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列非负可测函数,

$$f_n : X \rightarrow [0, \infty],$$

并且满足

$$\sum_{n=1}^\infty \int_X f_n \, d\mu < \infty.$$

设 $\{h_N\}_{N=1}^\infty$ 是一列非负可测函数, 满足

$$h_N(x) \leq \sum_{n=N}^\infty f_n(x) \quad \text{for a.e. } x \in X,$$

并且

$$h_N(x) \rightarrow h(x) \quad \text{for a.e. } x \in X.$$

证明:

$$h = 0 \quad \text{a.e.}$$

Proof. 这就是 DCT. 因为 h 显然非负, 用 MCT 知道 $\sum_n f_n$ 是可积的, 因此是控制函数. 那么

$$\int h = \lim_n \int h_n \leq \lim_n \int \sum_{k \geq n} f_k = \lim_n \sum_{k \geq n} \int f_k \rightarrow 0.$$

中间求和积分交换次序这里不能用 Fubini, 因为 $\mathcal{A}$ 不一定 σ -有限.

参考给分标准:

1. (5') 用 MCT 找到控制函数, 用 Fubini/Tonelli/逐项积分 (本质 Fubini) 扣三分, 不加说明使用交换次序扣两分
2. (5') 用积分证明 $h = 0$ a.e.

因为 Fubini 定理只能统一 σ -有限空间的天下.

□

Problem 10.9 题 9(10 分)

设 $1 \leq p < \infty$. 在 $[0, 1]$ 上构造一系列函数 $\{f_n\}$, 使得

$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{a.e.,}$$

但

$$\|f_n\|_{L^p([0,1])} \not\rightarrow 0.$$

进一步构造例子使得

$$\|f_n\|_{L^p([0,1])} \rightarrow \infty.$$

Proof. 构造质量爆破但是支集缩小的例子即可, 比如 $f_n(x) = n^2 \chi_{[0,1/n]}$.

参考给分标准:

1. (5') 造例子, 一步到位也行
2. (5') 验证例子, 几乎处处收敛到 0, 范数爆破

□

Problem 10.10 题 10(10 分)

设 (X, Γ, μ) 为测度空间. 设 $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty.$$

证明: 几乎每个点 $x \in X$ 至多属于有限多个 E_n .

Proof. 这就是 BC 引理. 为什么会是第十题.

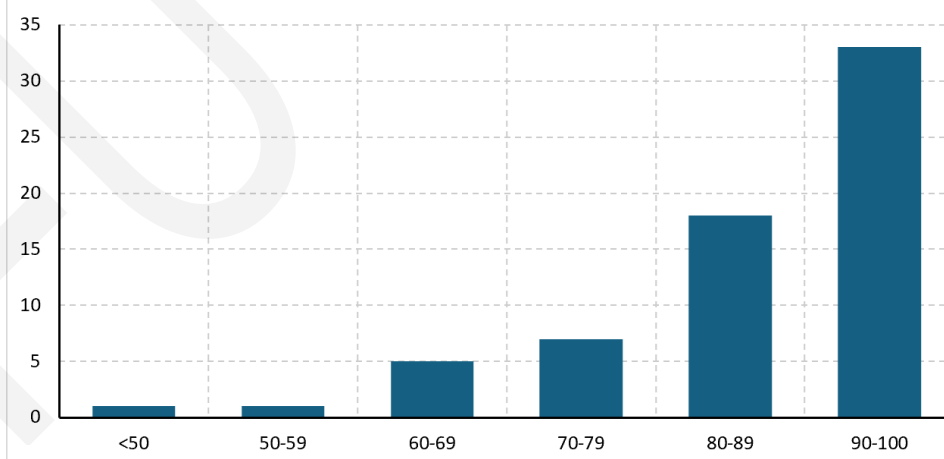
参考给分标准:

1. (8') 用 BC 引理
2. (2') 取补集

少数同学也用到 Fubini/Tonelli 等, 扣三分.

□

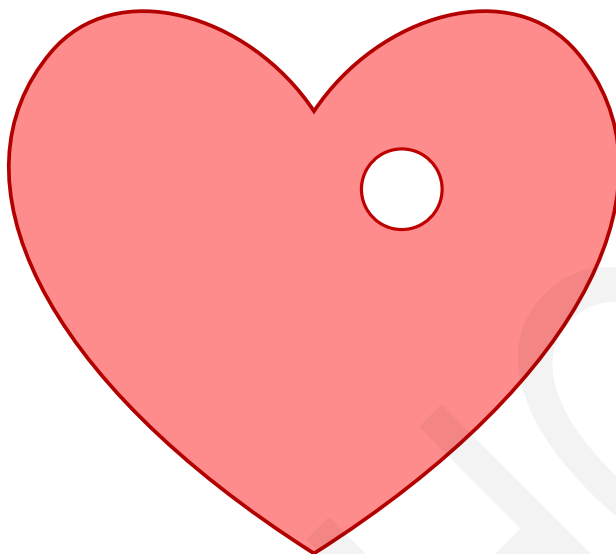
期末试卷分数分布 (100分制)



请输入文本. 给分很宽松了, 实际上考的比较糟糕的同学还是有迹可循, 平时有没有用心本人一眼就看出来了, 所以还是不要自己骗自己(推入水中).

11 终曲

最后, 让我再整一次上学期 PDE1 的烂活.



$$\pi_1(\text{无瑕之心}) \simeq \{e\} \longrightarrow \pi_1(\text{有痕之心}) \simeq \mathbb{Z}$$

无瑕之心纯粹, 有痕之心不凡.

天涯一曲远, 曲终人不散. 同学们, 我们饭后分析 (H) 见!



泛函喝杯摩卡, 数分了

QQ: 758701183