26春实分析(H)习题课讲义

分析是极限的艺术

Author: 周芾

Last Update: 2026 年 4 月 18 日

目录

1 第一次习题课讲义

1.1 作业答案

Problem 1.1 P13.1

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 记 $f_1=f$, $f_n=f\circ f_{n-1}$, $n\geq 2$. 若存在 $n_0\geq 1$, 使得 $f_{n_0}(x)=x$, 则 f 是双射.

Proof. "左逆单, 右逆满." 由 $f_{n_0}=f\circ f_{n_0-1}=f_{n_0-1}\circ f=\mathbf{Id}$ 可知 f 是双射. □

Problem 1.2 P13.2

不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f, 它在无理数集 $R\setminus\mathbb{Q}$ 上是单射, 而在 $\mathbb{Q}$ 上不是单射.

Proof. 反证法. 设 $q_1<_2\in\mathbb{Q}$, 使得 $f(q_1)=f(q_2)$, f 不是常值函数, 因此存在 $x_0\in(q_1,q_2)$ 为 f 在 $[q_1,q_2]$ 上的极值点. 由值域的连通性, 以及 f 在无理数上单射, 可以构造映射 $q:(q_1,x_0)_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\to(x_0,q_2)_{\mathbb{Q}}$, 使得 $f(\alpha)=f(q(\alpha))$, 这里 $\alpha\in(q_1,x_0)_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. 由 f 在无理数上单射, q 是一个单射, 但是 $(q_1,x_0)_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ 的基数是 $\mathfrak{c}$, 而 $(x_0,q_2)_{\mathbb{Q}}$ 的基数是 $\aleph_0$, 因此这是不可能的. □

Problem 1.3 P13.3

$f:X\to Y$ 是满射当且仅当对任意的真子集 $B\subseteq Y$, 有 $f(f^{-1}(B))=B$.

Proof. 等式推满射只要考虑 B 为单点集即可, 另一侧显然. □

Problem 1.4 P54.4

设 $f:X\to Y$, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, 试问: 下列等式成立吗?

1. $f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(B)$.
2. $f(X\setminus A)=f(X)\setminus f(A)$.

Proof.

1. 这里指出一个基本的集合论事实, f^{-1} 与集合的并, 交, 补 (差) 是交换的, 这个事实可以直接使用, 证明可自行验证. 因此结论成立.
2. 设 $f\equiv c$, $A\subsetneq X$ 即为反例.

□

Problem 1.5 P50.1

设 $E\subseteq R$ 是非空完全集, 试证明对任意的 $x\in E$, 存在 $y\in E$, 使得 $x-y$ 为无理数.

Proof. E 为完全集意为, $E=E'$. 这个题实际上只要证明, 完全集是一个不可数集. 这里给出一个用 Baire 纲定理的证法. 考虑 $E\subseteq\mathbb{R}$, 那么 E 是一个完备度量空间, 若 E 可数, 那么 $E=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$, 也即 $E=\cup_n\{x_n\}$, 这与 Baire 纲定理矛盾, 因此 E 是不可数集. □

Problem 1.6 P50.2

试证明 $x=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{13}$ 属于 Cantor 集.

Proof. 考虑 Cantor 集的三进制表示, 那么 $\frac{1}{4}=(0.\dot{0}\dot{2})_3$, $\frac{1}{13}=(0.\dot{0}0\dot{2})_3$. □

Problem 1.7 P38.3(Stein)

Cantor sets of constant dissection. Consider the unit interval $[0,1]$, and let ξ be a fixed real number with $0<\xi<1$ (the case $\xi=1/3$ corresponds to the Cantor set C in the text).
In stage 1 of the construction, remove the centrally situated open interval in $[0,1]$ of length ξ. In stage 2, remove two central intervals each of relative length ξ, one in each of the remaining intervals after stage 1, and so on.
Let C_ξ denote the set which remains after applying the above procedure indefinitely.[a]

1. Prove that the complement of C_ξ in $[0,1]$ is the union of open intervals of total length equal to 1.
2. Show directly that $m_*(C_\xi)=0$.

Hint: After the k^{th} stage, show that the remaining set has total length $=(1-\xi)^k$.

[a] The set we call $\mathcal{C}_\xi$ is sometimes denoted by $C_{\frac{1-\xi}{2}}$.

Proof. 稍作归纳, 第 n 步中移除的小区间长度为 $\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1}\xi$, 从而补集的长度为

$$\sum_{n=1} 2^{n-1}\left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{n-1}\xi=1.$$

对于外测度, 注意到第 n 步时, 集合长度为 $(1-\xi)^n$, 取极限即可. □

Problem 1.8 P38.4(Stein)

Cantor-like sets. Construct a closed set $\hat{C}$ so that at the k^{th} stage of the construction one removes 2^{k-1} centrally situated open intervals each of length ℓ_k, with

$$\ell_1+2\ell_2+\cdots+2^{k-1}\ell_k<1.$$

1. If ℓ_j are chosen small enough, then

   $$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\ell_k<1.$$

   In this case, show that $m(\hat{C})>0$, and in fact,

   $$m(\hat{C})=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\ell_k.$$

2. Show that if $x\in\hat{C}$, then there exists a sequence of points $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $x_n\notin\hat{C}$, yet $x_n\to x$ and $x_n\in I_n$, where I_n is a sub-interval in the complement of $\hat{C}$ with $|I_n|\to 0$.
3. Prove as a consequence that $\hat{C}$ is perfect, and contains no open interval.
4. Show also that $\hat{C}$ is uncountable.

Proof. 1. 自己算.

2. 其实题干指出了 x_n 的构造, 因为 $x\in\hat{C}\subseteq\hat{C}_k$, 这里取 $x_k\in\hat{C}_k\setminus\hat{C}_{k+1}$ 就行了 (当然在第 k 步中 x_k 与 x 在同一个区间里).

3. 由于 $\hat{C}$ 闭, 有 $\hat{C}' \subseteq \hat{C}$, 另一方面, 利用截断 $\hat{C}_k = \bigcup_{n=1}^{2^k} F_n$, 注意到端点总是留在 Cantor 集中, 选离 x 最近的端点就证明了 $\hat{C} \subseteq \hat{C}'$. 而第二问指出 $\hat{C}$ 当然不含开区间.

4. 完全集不可数.

□

1.2 补充内容

1. 测度正则性: 我们如何定义测度?

在课上我们已经知道了抽象测度的定义方法, 或者说, 一个抽象的定义方法 (关于 $\pi-\lambda$ 系统, 预测度的内容就不讲了, 没意思):

$$2^X \text{ 上的外测度} + \text{Carathéodory 条件} \Rightarrow \sigma-\text{代数上的测度}$$

但是为什么是 Carathéodory 条件, 为什么还长成这个样子? 而且很糟糕的事情是, 凭什么这个条件是有效的, 测度常常是符合直觉的对象, 他的定义为什么反而是抽象的. 这就是本话题将讨论的问题. 接下来我们有时会将背景空间假设为 X, 我们总假设他是一个 Hausdorff 空间, 把它想象成 $\mathbb{R}^d$ 或者 $[0,1]^d$ 也行.

首先对于开集 U, 我们先用如下方式定义开集的 (Lebesgue) 测度

$$m(U) = \sup\{\int f : f \in C_c(U),\ 0 \le f \le 1\}.$$

Remark. 这样定义的测度就是 Lebesgue 测度, 如果直接假设 $\mu : \mathcal{T}_X \to [0,+\infty]$, 那么则是一个抽象 Radon 测度.

可以证明, 这里的 m 满足单调性, 紧有限性, 连续性, 次可加性 (w.r.t. 开集). 接下来我们定义外测度和内测度, 这里的定义和课上讲的测度正则性是一样的.

$$\text{外测度 } m^*(E) = \inf\{m(U) : E \subseteq U,\ U \text{ is open.}\} \quad \text{内测度 } m_*(E) = \sup\{m^*(K) : K \subset\subset E.\}$$

那么根据定义, 对开集 U, 有

$$m(U) = m^*(U).$$

我们接下来称集合 E 是 m-正则的, 若 $m^*(E) = m_*(E)$.

Lemma 1.9

任意开集 $U \subset \mathbb{R}^d$ 都是 m-正则的.

Proof. 只要证明 $m_*(U) \ge m(U)$. 比较两个 sup 的定义即可. □

Theorem 1.10

m^* 在 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 上是一个测度. 它的完备化记作 $(\mathcal{M}, m)$, 称为 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Lebesgue 测度**. $\mathcal{M}$ 中的元素称为 **Lebesgue 可测集**. 此外, 对每个有界集合 $E \in \mathcal{M}$, 都有

$$m(E) < +\infty.$$

这个定理的证明是1.20和1.21的直接推论, 不在此处证明.

接下来我们稍微抽象一些, 直接造抽象的 Radon 测度. 这里我们首先要手动的加上所谓的开集正则性.

$$\mu(U) = \mu^*(U) \text{ for every } U \text{ is open.}$$

为了不产生歧义, 我们整理如下.

Definition 1.11 Radon premeasure

我们称 $\mu : \mathcal{T}_X \to [0,+\infty]$ 是一个 Radon 预测度, 若 μ 满足:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.

2. (单调性) 若 $U \subset V \subset X$ 且 U, V 都开, 则 $\mu(U) \le \mu(V)$.

3. (可数次可加性) 对可数多个开集 $U_1, U_2, \ldots$, 有

$$\mu\Big(\bigcup_n U_n\Big) \le \sum_n \mu(U_n).$$

4. (可加性) 若 U_1, U_2 是互不相交的开集, 则

$$\mu(U_1 \cup U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Remark. 这里的可数次可加性和可加性蕴含了分离可数可加性 (w.r.t. 开集), 同时, 整个定义中 (带上开集正则性) 不难看出外测度和内测度的单调性.

现在, 我们的目标是, 证明 μ^* 在 $\mathcal{B}_X$ 上有可数可加性. 这里值得一提的是, 一种常见的策略是去考虑所有的正则集, 但这样就不太好讲可数可加性, 同时背景空间是否测度有限也会影响我们的证明 (很多实分析定理往往要求测度的 σ 有限性, 也许你可以想想这里的道理), 因此我们采取下面的证明策略.

Proposition 1.12

μ^* 是次可加的.

Proof. 用 $\epsilon/2^n$ 技巧. 不妨设 $\mu^*(E_n) < \infty$, 对任意 $\epsilon > 0$, 有开集 $E_n \subseteq U_n$ 使得

$$\mu(U_n) \le \mu(E_n) + \epsilon/2^n.$$

那么

$$m^*(\cup E_n) \le m^*(\cup U_n) \le \sum m^*(U_n) \le \sum m^*(E_n) + \epsilon/2^n = \sum m^*(E_n) + \epsilon.$$

□

接下来证明内测度的可数超可加性.

Proposition 1.13

设 K_1, K_2 是分离的紧集, 那么 $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$.

Proof. 只要证明反向不等式 $\mu(K_1 \cup K_2) \ge \mu(K_1) + \mu(K_2)$. 取开集 $K_1 \cup K_2 \subseteq U$, 做截断得到不交开集 U_i 使得 $K_i \subseteq U_i \subseteq U$, 做不等式即可. □

Proposition 1.14

μ_* 是分离超可加的.

Proof. 由归纳法, 只要证明 $\mu_*(E_1 \cup E_2) \ge m_*(E_1) + m_*(E_2)$. 用1.13即可. □

Corollary 1.15

E_n 是一族不交的 μ-正则集, 那么他们的并集也是 μ-正则的.

Proof. 这是1.12和1.14的直接推论. □

接下来的结论真正刻画了什么是正则性.

Corollary 1.16 Regularity

设 $E \subset X$ 满足 $\mu^*(E) < +\infty$. 则 E 是 μ-正则的, 当且仅当对任意 $\epsilon > 0$, 都存在紧集 K 与开集 U

使得
$$K \subset E \subset U \qquad 且 \qquad \mu(U \setminus K) < \epsilon.$$

这个结果有其微妙之处, 因为从定义来看, 我们一直考虑的是 $\mu(U)-\mu(K)$ 是什么, 而这里是 $\mu(U\setminus K)$. 同时注意, 这个结论在无限测度时自然失效.

Proof. 由定义, 我们可以考虑 $\mu(U)-\mu(K)$ 小, 这时注意到, U 和 $U \setminus K$ 都是开集, 而 K 是紧集, 因此都是 μ-正则的, 从而由1.15, 有 $\mu(U)=\mu(K)+\mu(U\setminus K)$. □

接下来的引理是本话题的主定理的一个特殊情况, 但是证明是相对容易的.

Lemma 1.17

设 E_1, E_2 是 μ-正则子集, 且
$$\mu(E_1) < +\infty, \qquad \mu(E_2) < +\infty.$$
则 $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_2 \setminus E_1$ 都是 μ-正则的.

Proof. 注意到 $E_1 \cap E_2 = E_2 \setminus (E_2 \setminus E_1)$ 和 $E_1 \cup E_2 = E_1 \sqcup (E_2 \setminus E_1)$, 只要证明 $E_2 \setminus E_1$ 是 μ 正则的即可. 我们要用1.16来证明此时的结论, 通过一些画图观察, 可知应该考虑集合 $(U_2 \setminus K_1) \setminus (K_2 \setminus U_1)$. 而这里我们通过集合估计得到
$$(U_2 \setminus K_1) \setminus (K_2 \setminus U_1) = U_2 \cap K_2^c \cap U_1 \cap K_1^2 \subseteq (U_2 \setminus K_2) \cup (U_1 \setminus K_1),$$
这就完成了证明. □

接下来我们希望用这个方式造出合适的 σ 代数, 但是出现了一个问题, 如果全空间测度无限, μ 正则集其实不是一个好的假设, 因此我们引入如下概念.

Definition 1.18 Local regular

设 $E \subset X$, 若对每个满足 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的开集 $\Omega \subset X$, 都有
$$\mu^*(E \cap \Omega) = \mu_*(E \cap \Omega),$$
则称 E 是**局部 μ-正则**的.

如果对某些可数相关的拓扑性质熟悉的话, 不难意识到下面的引理.

Lemma 1.19

设 $E \subset X$ 且 $\mu^*(E) < +\infty$, 则 E 是 μ-正则的, 当且仅当 E 是局部 μ-正则的.

Proof. 先设 E 局部正则. 由于 $\mu^*(E) < +\infty$, 存在开集 $\Omega \supset E$ 使得 $\mu(\Omega) < +\infty$. 于是 $E \cap \Omega$ 是正则的, 从而 E 是正则的.

反之, 设 E 正则. 令 $\Omega \subset X$ 是满足 $\mu(\Omega) < +\infty$ 的开集. 由于 Ω 是 μ-正则的, 根据1.17$E \cap \Omega$ 是正则的. 所以 E 是局部正则的. □

接下来叙述本话题的主定理.

Theorem 1.20

设 $\mu : \mathcal{T}_X \to [0, +\infty]$ 满足预测度和开集正则性. 令 $\mathcal{M}_\mu$ 为 X 中所有局部 μ-正则子集所成的集合.

则 $\mathcal{M}_\mu$ 是一个包含 $\mathcal{B}_X$ 的 σ-代数, 并且 μ^* 在 $\mathcal{M}_\mu$ 上是一个完备测度. 我们把该测度空间记作

$$(\mathcal{M}_\mu, \mu).$$

Remark. 其实考虑 Lebesgue 测度就知道, 集合的外测度和内测度未必一样, 这也是我们在所谓可测集上是考虑 $\mu = \mu^*$ 的原因. 若此时的背景空间 X 为局部紧 Hausdorff 空间, 且 μ 在紧集上有限, 那么我们称 μ 是 $\mathcal{B}_X$ 上的一个 Radon 测度.

Proof. **第 1 步: 证明 $\mathcal{M}_\mu$ 是一个 σ-代数.** 这是平凡的集合验证, 用1.17和1.15即可.

第 2 步: 证明 $\mathcal{M}_\mu$ 包含 $\mathcal{B}_X$, 并且 μ^* 在其上是测度. 由开集正则性, 每个开集都是正则的, 因此也局部正则. 所以 $\mathcal{M}_\mu$ 包含 $\mathcal{T}_X$, 从而包含

$$\mathcal{B}_X = \sigma(\mathcal{T}_X).$$

验证测度只要说明可数可加性, 设

$$E = \cup_n E_n$$

不妨设 $\mu^*(E) < \infty$. 此时有 $\mu^*(E_n) < \infty$, 由1.15, 得到了可数可加性.

第 3 步: 证明 μ^* 在 $\mathcal{M}_\mu$ 上完备. 这是外测度天然的性质. □

这里我们看到, 我们通过局部正则性, 造出了一个包含 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备测度空间, 一个自然的问题是, 这个完备测度空间是不是 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备化呢? 下面的结论表明, 在大多数情况下, 这里的构造都是恰到好处的.

Proposition 1.21

假设 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 是 σ-有限的, 则 $(\mathcal{M}_\mu, \mu)$ 就是 $(\mathcal{B}_X, \mu)$ 的完备化.

Proof. 从证明中我们可以看出条件的道理. 利用 σ 有限性, 考虑 $E = \cup_n E_n$, 这里 $\mu(E_n) < \infty$. 利用内正则性, 有 $\mu(E_n \setminus K_j) < \frac{1}{j}$, 此时考虑 $F_k = \cup_{j=1}^k K_j$, 以及 $F = \cup_{k=1}^\infty F_k$(想想为什么要求两次并集). 可以知道 F 是一个 Borel 集, 并且 $\mu(E_n \setminus F) = 0$. 这时用完备性就说明 E_n 在 $\mathcal{B}_X$ 的完备化中, 从而完成了证明. □

最后, 让我们回答最开始的问题, 我们通过局部正则性定义的可测集, 和之前用 Carathéodory 条件定义的可测集是不是同一个东西.

Theorem 1.22

设 $E \subset X$. 则下列两条等价:

1. E 是局部 μ-正则的.

2. E 是 Carathéodory 意义下的 μ^*-可测集, 也就是说, 对任意 $A \subset X$, 都有

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A).$$

Proof. **(2)⇒(1).** 我们证明一个更强的结论: 局部正则性等价于 Carathéodory 条件限制在有限测度的开集上. 先设 Ω 是包含 E 的有限测度开集 (这里并不假设 E 的性质), 那么我们能证明

$$\mu_*(E) = \mu(\Omega) - \mu^*(\Omega \setminus E).$$

由定义, 两边均为上确界, 因此只要证明,

$$\sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ 为紧集}\} = \sup\{\mu(\Gamma) : \Gamma \text{ 在}\Omega\text{ 中闭, 且}\Gamma \subset E\}.$$

对于 $\leq$ 一侧, 结论是显然的. 而对于另一侧, 对任意 $\epsilon > 0$, 有紧集 $K \subset \Gamma$ 使得

$$\mu(K) > \mu(\Gamma) - \epsilon.$$

因此 $\geq$ 也成立.

那么改到一般的有限测度开集 Ω, 就是

$$\mu_*(\Omega \cap E) = \mu(\Omega) - \mu^*(\Omega \setminus E).$$

那此时考虑局部正则性的定义, 我们就证明了局部正则性的等价条件, 从而证明了 (2) 到 (1).

(1)⇒(2). 此时只要证明 $\leq$, 并且我们不妨假设 $\mu^*(A) < \infty$. 由定义, 我们只要证明对开集 $\Omega \supseteq A$ 有

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \leq \mu(\Omega).$$

即可, 又根据单调性, 我们只要证明

$$\mu^*(\Omega \cap E) + \mu^*(\Omega \setminus E) = \mu(\Omega).$$

而这正是局部正则性. □

就写到这里吧, 对测度正则性有个基本的认识就行, 能不把测度论当成集合论小游戏就足以证明本讲义没白写.

2. Jordan“测度”: 时代的眼泪.

在数学分析 B3 中似乎引入了 Jordan“测度”(其实应该是叫容量) 的概念, 这里通过一个习题说明这个概念的落后性. 为了方便, 我们只考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Jordan 容量.

首先是 Jordan 外容量,

$$J^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{N} |I_n|,$$

这里 inf 遍历 E 的有限覆盖 $\cup_{n=1}^{N} I_n$, 其中 I_n 都是区间.

由于这里是有限覆盖, 因此我们立刻看出, $J^*(E) = J^*(\bar{E})$. 此时问题就大了, 因为这意味着

$$J^*([0,1]_{\mathbb{Q}}) = J^*(\overline{[0,1]_{\mathbb{Q}}}) = J^*([0,1]) = 1.$$

而同时 Jordan 内容量其实应该对应定义为内部的简单集合膨胀, 也就是说 $J_*([0,1]_{\mathbb{Q}}) = 0$, 因此 $[0,1]_{\mathbb{Q}}$ 不是 Jordan 可测集. 同时这也自动说明了, Jordan 容量不具有可数可加性, 或者说没有合适的 σ 代数, 所以不能被称为测度.

3. σ 代数的基数

这个题目灵感来自课上例题, Borelσ 代数的基数是 $\mathfrak{c}$, 那一般的无限 σ 代数呢? 事实上可以证明, 无限 σ 代数的基数至少是 $\mathfrak{c}(= 2^{\aleph_0})$.

设 σ 代数 Σ 可数, 那么 $\Sigma = \{A_1, \cdots, A_n, \cdots\}$. 对 $x \in X$, 定义

$$C_x = \left(\bigcap_{x \in A_i} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{x \notin A_j} A_j^c\right).$$

可自行验证如下性质:

1. $C_x \in \Sigma$.
2. C_x, C_y 要么不交, 要么相同.
3. 每个 $A \in \Sigma$ 可以写成若干 C_x 的并集.

若 C_x 是无限个两两不交的集合, 此时做并集就说明 $|\Sigma| \geq 2^{\aleph_0}$, 若 C_x 只有有限个两两不同的集合, 那么 A_n 本身也是有限个, 因此无限 σ 代数至少有连续统基数.

2 第二次习题课讲义

2.1 作业答案

Problem 2.1 P25.14

试证明全体超越数的基数是 $\mathfrak{c}$.

Proof. 首先, 代数数是整系数多项式的根集, 而超越数是代数数的补集. 因此只要说明代数数是可数的. 我们考虑截断, 设 A_n 是次数 $\leq n$ 的整系数多项式的根集, 注意到系数取值是可数的, 而每个多项式的根是有限的, 因此 A_n 是可数集. 进一步, $\cup_n A_n$ 也是可数的. 因此代数数可数, 超越数不可数. □

Problem 2.2 P43.2

$\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是一类标准的实分析习题, 将函数问题集合表示, 然后变成测度问题或者积分问题. 因为这里没有极限函数, 所以要考虑 Cauchy 列. 这里注意, 收敛是有限项后要有小性, 因此是用上限集刻画. 也就是

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m\geq N}^{\infty} \{|f_n - f_m| \leq \frac{1}{l}\}.$$

所谓 $\epsilon \to 0$ 就是对 l 取极限, 从而有

$$\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{n,m\geq N}^{\infty} \{|f_n - f_m| \leq \frac{1}{l}\}}_{\text{closed}}.$$

这里的闭性是因为连续性等价于闭集的原像是闭的, 上课应该讲过. □

Problem 2.3 P55.19

设 f 在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性, 并且对任意的 $r \in \mathbb{Q}$, 点集 $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = r\}$ 是闭集, 试证明 $f \in C(\mathbb{R})$.

Proof. 如果我们能证明 $\{f \leq q\}$ 是闭集, 那么就能证明

$$\{f \leq a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}, a\leq q} \{f \leq q\}$$

是闭集, 那么我们就完成了证明 (因为我们只要对拓扑基验证原像性质). 而由对称性, 我们只要证明 $A_q := \{f < q\}$ 是开集. 反证法, 若不然, 存在 $x_0 \in A_q$, 使得有点列 $x_n \notin A_q$, 满足 $x_n \to x_0$, 且 $f(x_n) \geq q$, 而由介值性, 就有 y_n 在 x_0 和 x_n 之间, 满足 $f(y_n) = q$, 并且 $y_n \to x_0$. 但是 $\{f = q\}$ 是闭集, 这就说明 $q > f(x_0) = \lim_n f(y_n) = q$, 矛盾! 因此我们完成了证明. □

Problem 2.4 p55.30

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数, 且对于任意的 $t \in R$, $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = t\}$ 是闭集, 试证明 $f'(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

Proof. 用 Darboux 中值定理, 我们知道 f' 有介值性, 由2.3即可. □

Problem 2.5 P94.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}$, 且存在 $0 < q < 1$, 使得对任一区间 (a,b), 都有开区间列 $\{In\}$:

$$E \cap (a,b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_k) < (b-a)q,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 本题有不同的看法, 如果已经知道群里的外测度的密度定理, 这里就相当于在说, 一个有正外测度的集合密度显然不小于 1, 因此完成了证明. 但是我们这里不引用这个结论, 而是考虑迭代的办法,

$$E \subseteq (a,b) \Rightarrow E \subseteq \bigcup_{n} I_n \Rightarrow E \cap I_n \subseteq \bigcup_{m} I_{n,m} \cdots$$

在测度侧我们相当于有

$$m^*(E \cap (a,b)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} m(I_{n,m}) \leq (a,b)q^2.$$

右侧的 2 是我们的迭代次数, 因为 $q < 1$, 我们就说明了 $m^*(E \cap (a,b)) = 0$. 从而 $m(E) = 0$.

另一种证法是考虑开集 $U \supset E$, 满足 $m^*(E) + \epsilon > m(U)$, 然后由开集结构定理, 记 $U = \cup_n I_n$, 那么对每一个 I_n, 都有

$$m^*(E \cap I_n) < q|I_n|.$$

求和即为

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n) < q \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = qm^*(U) < q(m^*(E) + \epsilon).$$

令 $\epsilon \to 0$ 即可得到 $m^*(E) = 0$.

Remark. 这里没说 E 的可测性, 在证明零测集前别乱写 $m(E)$! 最后一种证法中, 需要先利用欧氏空间的 σ 有限性做截断, 然后再用外正则性论证. 证明中跳过了这一步, 考试时如果碰到类似情况需要指出仅需要考虑测度有限情形. 事实上绝大多数欧氏空间的测度问题都可以第一步简化到有限或有界情形.

□

Problem 2.6 P94.2

设 $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_1 \subseteq A_2$, A_1 是可测集, 且 $m(A_1) = m^*(A_2) < \infty$, 试证明 A_2 是可测集.

Proof. 如果知道等测包的概念, 这里大概是在说, 有等测核的集合是可测的, 因此等测包和等测核的地位并不对等. 证明就是走 Carathéodory 条件.

$$m^*(A_2) = m^*(A_2 \cap A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1) \Rightarrow m^*(A_2 \setminus A_1) = 0.$$

这表明 $A_2 \setminus A_1$ 可测, 从而 $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ 可测. □

Problem 2.7 P94.7

$\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列, 若 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty$, 试证明:

$$m(\limsup_{k\to\infty} E_k) \geq \limsup_{k\to\infty} m(E_k).$$

Proof. 这个结论在大家学了 Fatou 引理后可能会有不同的看法. 不过这里是直接的计算.

$$\begin{aligned} m(\limsup_{k\to\infty} E_k) &= m(\bigcap_{l=1}\bigcup_{k\geq l} E_k) \\ &= \lim_{l\to\infty} m(\bigcup_{k\geq l} E_k) \\ &= \limsup_{l\to\infty} m(\bigcup_{k\geq l} E_k) \\ &\geq \limsup_{l\to\infty} m(E_l). \end{aligned}$$

□

Problem 2.8 P94.8

设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集合列, $m(E_k)=1(k=1,2,\cdots)$, 试证明:

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1.$$

Proof. 这道题看起来和 Baire 纲说的事有点像, 不过这是形式上的看法. 我们直接计算

$$\begin{aligned} m(\bigcap_{k} E_k) &= 1 - m(\bigcup_{k} E_k^c) \\ &\geq 1 - \sum_{k} m(E_k^c) = 1. \end{aligned}$$

□

2.2 补充内容

1. 可测集与不可测集

这里我们主要关心函数和可测性的关系, 首先我们回忆定义.

Definition 2.9 Measurable functions

$f:(X,\mathcal{M},\mu)\to(\mathbb{R},\mathcal{B},m)$ 是可测函数, 若对任意 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 子集 U, 都有 $f^{-1}(U)$ 是 μ-可测的.

这个定义其实隐含一个想法, "原像往往是好的, 而像集则未知". 我们先处理原像. 由定义, 连续函数的原像能保持开集, 闭集, Borel 集 (因为 f^{-1} 可以和集合运算交换), Lebesgue 可测集. 不过, 零测集并不是稳定的.

Example 2.10

对于连续 (或可测) 函数, 零测集的原像未必零测.

考虑常值函数即可.

接下来我们考虑像的性质. 首先是最经典的例子.

Example 2.11

可测函数在可测集上的像未必可测.

考虑 Cantor 集 $\mathcal{C}$, Vitali 集 N, 我们知道 $\mathcal{C}$ 的基数是 $\mathfrak{c}$, Vitali 集的基数也是 $\mathfrak{c}$(这时因为每个等价类的基数是可数的, 而他们的并集是不可数的), 因此这里存在一个满射 $g:\mathcal{C}\to N$, 现在我们构造函数

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathcal{C} \\ 0 & x\notin\mathcal{C}. \end{cases}$$

这个函数是可测的, 因为可测函数可以修改零测集上的取值但不改变可测性, 而常值函数可测, 因此这个函数可测. 因此我们实际上说明了, 可测函数可以把零测集打到不可测集. 当然, 实际上有一个更应该记忆的例子, 就是连续函数可以把零测集打到不可测集.

Example 2.12

连续函数可以把零测集打到不可测集.

考虑 Cantor 函数 $f:[0,1]\to[0,1]$, Vitali 集 N, 那么令 $E=f^{-1}(N)\cap\mathcal{C}$, 我们有

$$f(E)=N,$$

这是因为任意 $y\in N$, 由于 $f(\mathcal{C})=[0,1]$, 存在 $x\in\mathcal{C}$, 使得 $f(x)=y$, 因此 $x\in E$. 其实我们稍微延拓一下, 可以造出一个例子, 使得连续函数把正测度集打到不可测集.

Example 2.13

连续函数可以把正测集打到不可测集.

我们对 Cantor 函数做常值延拓, 也即

$$\tilde{f}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ f(x) & x\in[0,1] \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

E 还是2.12的定义, 令 $A=[-1,0]\cup E$, 那么 $m(A)=1$, 而 $\tilde{f}(A)=\{0\}\cup E$ 还是不可测的. 最后用这个延拓后的函数, 我们还能说明连续函数能把不可测集打到正测集.

Example 2.14

连续函数可以把不可测集打到正测集.

仍然用 $\tilde{f}$, 现在我们考虑 $N'\subseteq[2,3]$, 也就是平移后的 Vitali 集合. 那么 $E'=\mathcal{C}\cup N'$ 就是一个不可测集, 但是 $\tilde{f}(E')=[0,1]$.

总之, 原则就是像集的性质可以很古怪, 构造例子尝试用 Cantor 函数和 Cantor 集就行了, 一般都能试出来的.

2. Borel-Cantelli 引理的应用

这里我们展示一些与 Borel-Cantelli 引理有关的例题, 希望以此反映一些分析和概率论中的想法. 在做题中至少应该知道, Borel-Cantelli 是为数不多能用来证明 a.e.(a.s.) 收敛的工具. 在讲例题之前, 我们先把 Borel-Cantelli 引理的表述写一下.

Theorem 2.15 Borel-Cantelli lemma

若一列可测集 $\{E_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$, 那么

$$m(\limsup_{k\to\infty} E_k)=0.$$

为什么这个定理能帮助证明几乎处处收敛呢? 首先我们知道, 几乎处处收敛就是除去零测集后的逐点 (pointwise) 收敛, 而处处收敛意思实际上是, 除去有限项后的收敛, 因此可以被下限集刻画, 而对偶的考虑不收敛点 (因为几乎处处收敛是要刻画这个集合零测), 那么就自然是考虑上限集. 因此 Borel-Cantelli 引理的出现是合情合理的. 接下来的例题中, 我们将不再重复这里的论证过程.

接下来的例子大多数取材于概率论, 或许可以把这些内容当成概率论习题课.

Example 2.16 矩有界

设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是随机变量列. 若存在 $p>0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}|X_n|^p<\infty,$$

证明

$$X_n\to 0 \qquad \text{a.s.}$$

Proof. 任取 $\epsilon>0$. 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}(|X_n|>\epsilon)\leq\frac{\mathbb{E}|X_n|^p}{\epsilon^p}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>\epsilon)\leq\epsilon^{-p}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}|X_n|^p<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\mathbb{P}\big(|X_n|>\epsilon\ \text{i.o.}\big)=0.$$

□

Remark. 本题其实和 2025 年实分析 (H) 期末第二题是相同的道理.

Example 2.17 矩带速率

设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 满足: 存在 $p>0,\delta>0,C>0$ 使得

$$\mathbb{E}|X_n|^p \leq Cn^{-1-\delta}, \qquad n\geq 1.$$

证明 $X_n \to 0$ a.s.; 并进一步证明: 对任意

$$0<\alpha<\frac{\delta}{p},$$

都有

$$n^\alpha X_n \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

Proof. 先证 $X_n \to 0$ a.s.. 对任意 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}(|X_n|>\epsilon) \leq \epsilon^{-p}\mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p}n^{-1-\delta}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n|>\epsilon)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理, $X_n \to 0$ a.s.

再证带速率的结论. 对任意 $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}\big(|n^\alpha X_n|>\epsilon\big)=\mathbb{P}\big(|X_n|>\epsilon n^{-\alpha}\big) \leq \epsilon^{-p}n^{\alpha p}\mathbb{E}|X_n|^p \leq C\epsilon^{-p}n^{-1-\delta+\alpha p}.$$

由于 $\alpha<\delta/p$, 故 $-1-\delta+\alpha p<-1$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\big(|n^\alpha X_n|>\epsilon\big)<\infty.$$

再次应用 Borel-Cantelli 引理可得

$$n^\alpha X_n \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

□

Example 2.18 四阶矩与强大数律

设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1=0, \qquad \mathbb{E}X_1^4<\infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

Proof. 由独立性, 同分布性及 $\mathbb{E}X_1=0$, 展开四次方可得

$$\mathbb{E}S_n^4 = n\,\mathbb{E}X_1^4 + 6\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbb{E}(X_i^2X_j^2) = n\,\mathbb{E}X_1^4 + 3n(n-1)(\mathbb{E}X_1^2)^2.$$

故存在常数 $C>0$ 使得

$$\mathbb{E}S_n^4 \leq Cn^2.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$, 由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \epsilon\Big) = \mathbb{P}(|S_n| > \epsilon n) \le \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\epsilon^4 n^4} \le \frac{C}{\epsilon^4 n^2}.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \epsilon\Big) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

□

Remark. 从级数求和那一步可以看出, 本题的四阶矩是绰绰有余的, 这个数主要是可以用二项式定理把奇次项的矩消去, 从这个角度看, 要降低矩条件的一个自然策略是把尾概率先丢掉从而提升可积性.

Example 2.19 方差条件到强大数律

设 $\{X_n\}_{n\ge 1}$ 相互独立, 满足

$$\mathbb{E}X_n = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

记

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

证明

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

这里形式上出现了 $\frac{X_k^2}{k^2}$ 的求和, 因此我们需要补充一个 Kronecker 引理, 证明可以点这里或这里.

Lemma 2.20

若序列 $\{x_n\}$ 求和收敛到有限数 s, 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s < \infty,$$

那么对一列实数 $0 < b_1 < b_2 < \cdots$, $b_n \to \infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = s.$$

同时, 这里涉及到一个方差估计, 因此我们还要引入 Kolmogorov 最大不等式, 一个不涉及鞅的证明是停时 (stopping-time) 论证, 接下来有一次习题课应该会讲一些停时的内容, 因此这里暂时不写出证明, 可以参考这里.

Theorem 2.21 Kolmogorov inequality

设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量列, 满足 $\mathbb{E}X_i = 0$ 和 $\mathrm{Var}(X_i) < \infty$, 那么记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, 就有

$$\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n} |S_k| > \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Proof. 考虑级数

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

只需证明 $\{T_n\}$ 几乎处处收敛, 再由 Kronecker 引理推出 $S_n/n \to 0$ a.s.

下面证明 $\{T_n\}$ 几乎处处是 Cauchy 列. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Var}\Big(\frac{X_k}{k}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2} < \infty,$$

可取严格递增整数列 $\{N_j\}_{j\ge1}$, 使得

$$\sum_{k>N_j} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{-3j}, \qquad j \ge 1.$$

定义事件

$$A_j := \left\{ \sup_{m\ge N_j} \left| \sum_{k=N_j+1}^{m} \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j} \right\}.$$

对任意 $M > N_j$, 由 Kolmogorov 最大不等式,

$$\mathbb{P}\left(\max_{N_j<m\le M} \left| \sum_{k=N_j+1}^{m} \frac{X_k}{k} \right| > 2^{-j} \right) \le 2^{2j} \sum_{k=N_j+1}^{M} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2}.$$

令 $M \to \infty$, 得

$$\mathbb{P}(A_j) \le 2^{2j} \sum_{k>N_j} \frac{\mathrm{Var}(X_k)}{k^2} < 2^{2j} \cdot 2^{-3j} = 2^{-j}.$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理和最开始的转化, 我们完成了证明. □

Example 2.22 高阶矩估计

设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 独立同分布, 满足

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \qquad \mathbb{E}|X_1|^p < \infty$$

其中 $p > 2$. 记

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

证明: 对任意 $\alpha > \frac{1}{2}$, 都有

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

这个例题在估计 p 阶矩的时候要用 Rosenthal 型不等式, 变体太多因此就不列出定理, 这里用到的其实是, 当 $p \ge 2$, 对一列独立且 $\mathbb{E}X_i = 0$ 的随机变量, 有

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p \le C_p \left(\mathbb{E}|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right).$$

一个参考是这里. 这个定理本身还是比较符合直觉的, 一个联想是稀疏波 (频率支撑在不同的二进环带上) 的平方函数计算, 也许学过调和分析会比较有感觉?

Proof. 由 Rosenthal 最大不等式, 存在只依赖于 p 和 $\mathbb{E}|X_1|^p$ 的常数 $C_p > 0$, 使得对任意 $m \geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq k\leq 2^m} |S_k|^p\Big] \leq C_p\, 2^{mp/2}.$$

于是对任意 $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\big[\max_{1\leq k\leq 2^m} |S_k|^p\big]}{\epsilon^p 2^{m\alpha p}} \leq C_p \epsilon^{-p} 2^{-mp(\alpha-\frac{1}{2})}.$$

由于 $\alpha > \frac{1}{2}$, 故

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq 2^m} |S_k| > \epsilon 2^{m\alpha}\right) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$\frac{1}{2^{m\alpha}} \max_{1\leq k\leq 2^m} |S_k| \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

现取任意 n, 令 m 满足 $2^m \leq n < 2^{m+1}$. 则

$$\frac{|S_n|}{n^\alpha} \leq \frac{\max_{1\leq k\leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{m\alpha}} = 2^\alpha \cdot \frac{\max_{1\leq k\leq 2^{m+1}} |S_k|}{2^{(m+1)\alpha}}.$$

右端几乎处处趋于 0, 故

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \to 0 \qquad \text{a.s.}$$

□

Remark. 这里用到的应该是叫二进子列法, 不用这个方法就要处理 $n^{-p(\alpha-1/2)}$ 的收敛性, 那么对 α 的要求就变成了 $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ 了.

Example 2.23 高斯尾估计

设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 独立, 且 $X_n \sim N(0,1)$. 证明: 对任意 $\epsilon > 0$,

$$|X_n| \leq (1+\epsilon)\sqrt{2\log n}$$

几乎处处最终成立.

Proof. 记

$$t_n := (1+\epsilon)\sqrt{2\log n}.$$

标准高斯尾估计表明: 存在常数 $C > 0$, 使得对一切 $t \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t) \leq C\frac{e^{-t^2/2}}{t}.$$

(不用复杂的估计, 凑个 $\frac{t}{t} \leq \frac{x}{t}$ 进去分部积分就行了, 概率论作业里有 Mills 比有关的证明, 道理是类似的)

取 $t = t_n$, 则当 n 足够大时,

$$\mathbb{P}(|X_n| > t_n) \leq C\frac{e^{-t_n^2/2}}{t_n} = C\frac{n^{-(1+\epsilon)^2}}{(1+\epsilon)\sqrt{2\log n}}.$$

由于 $(1+\epsilon)^2 > 1$, 故

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > t_n) < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|X_n| > (1+\epsilon)\sqrt{2\log n}$$

只会发生有限次. 换言之,

$$|X_n| \leq (1+\epsilon)\sqrt{2\log n}$$

几乎处处最终成立. □

Example 2.24 L^p **收敛和几乎处处收敛**

设 $p>0$, f_n, f 是测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的可测函数, 并满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

证明

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{for a.e. } x \in X.$$

Proof. 任取 $\epsilon>0$, 定义

$$E_n^{\epsilon} := \{x \in X: \ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}.$$

由 Chebyshev 不等式,

$$\mu(E_n^{\epsilon}) \le \frac{1}{\epsilon^p}\int_X |f_n - f|^p \, d\mu = \frac{1}{\epsilon^p}\|f_n - f\|_p^p.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^{\epsilon}) \le \epsilon^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理,

$$|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$$

只会对几乎处处的 x 发生有限次.

再对所有正有理数 ϵ 取可数交, 得

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{for a.e. } x \in X.$$

□

Remark. 从本题可以自然得到一个从 L^p 收敛序列抽取出几乎处处收敛子列的办法.

3. Lebesgue 外测度的密度

本部分讲解课程群中提到的外测度的密度, 一般这类证明都会用到覆盖定理 (看过 Evans 的测度论就知道套路了), 因此这里先介绍我们要用到的工具. 这一工具一般叫做 Vitali covering 定理或者 $5r$-covering 定理.

Lemma 2.25 $5r$ **covering lemma**

设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一族开球, 并且这些球的半径有统一上界. 则存在一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, 使得

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

其中若 $B = B(x,r)$, 则 $5B := B(x, 5r)$.

Theorem 2.26

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是任意集合, m^* 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 外测度. 则对m^*-几乎处处的 $x \in E$, 有

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} = 1,$$

其中 $|B(x,r)|$ 表示该球的 Lebesgue 测度.

Proof. 一般来说, 这类证明都要定义一个坏点集, 然后通过覆盖定理证明坏点集能被覆盖住并且覆盖本身具有小性.

因此我们固定 $t \in (0,1)$, 定义坏点集

$$A_t := \left\{ x \in E : \liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} < 1 - t \right\}.$$

我们先证明

$$m^*(A_t) = 0.$$

一旦这一点成立, 定理便立刻推出. 因为,

$$\left\{ x \in E : \liminf_{r \downarrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} < 1 \right\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_{1/n},$$

故左边这个集合有零外测度. 另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和任意 $r > 0$, 总有

$$0 \le \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} \le 1,$$

因此

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} \le 1.$$

所以在 E 中除去一个零外测度集后, 上述比值的 $\liminf$ 至少为 1, 而 $\limsup$ 至多为 1, 从而极限存在且等于 1.

下面证明 $m^*(A_t) = 0$.

我们不妨假设 $A = A_t$ 有界, 这是因为

$$A_t = \bigcup_{N=1}^{\infty} \big(A_t \cap B(0,N)\big).$$

固定 $\epsilon > 0$. 由于 A 有界, 故 $m^*(A_t) < \infty$. 由外测度的定义, 可取开集 $U \supset A$, 使得

$$|U| < m^*(A) + \epsilon.$$

我们注意到, 若 $X \subset U$ 是 Lebesgue 可测集, 则

$$m^*(A \cap X) \ge |X| - \epsilon.$$

这是因为

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap X) + m^*(A \setminus X) \le m^*(A \cap X) + m^*(U \setminus X) \\ &= m^*(A \cap X) + m^*(U) - m^*(X) < m^*(A \cap X) + m^*(A) + \epsilon - m^*(X). \end{aligned}$$

现在任取 $x \in A$. 因为 $x \in A_t$, 由 A_t 的定义可知

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{m^*(E \cap B(x,r))}{|B(x,r)|} < 1 - t.$$

又由于 U 是开集且 $x \in U$, 故可取 $r_x > 0$, 使得

$$r_x < 1, \qquad B(x, r_x) \subset U,$$

并且

$$m^*(E \cap B(x, r_x)) < (1-t)|B(x, r_x)|.$$

记

$$B_x := B(x, r_x).$$

于是 $\{B_x\}_{x\in A}$ 是覆盖 A 的一族开球, 且所有半径都被 1 所控制.

由 $5r$ covering lemma, 可从中选出一个至多可数的两两不交子族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, 满足

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

令

$$X := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

则 $X \subset U$, 且 X 是可测集. 因为这些球两两不交, 所以

$$|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|.$$

接下来从上估计 $m^*(A \cap X)$. 由于 $A \subset E$, 由外测度的可数次可加性,

$$m^*(A \cap X) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap B_i) < (1-t) \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = (1-t)|X|.$$

另一方面, 因为 $X \subset U$ 且 X 可测, 由前面得到的观察可知

$$m^*(A \cap X) \ge |X| - \epsilon.$$

合并这两个不等式, 得

$$|X| - \epsilon < (1-t)|X|,$$

从而

$$|X| < \frac{\epsilon}{t}.$$

最后, 由于

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i,$$

所以

$$m^*(A) \le \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |5B_i| = 5^d \sum_{i=1}^{\infty} |B_i| = 5^d |X| < \frac{5^d}{t}\epsilon.$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意, 便得到

$$m^*(A) = 0.$$

这就完成了证明. $\square$

3 第三次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P78.1

设 $E \subset [0,1]$, 若 $m(E)=1$, 试证明 $\bar{E}=[0,1]$; 若 $m(E)=0$, 试证明 $\mathring{E}=\varnothing$.

Proof. 第一部分是直接的, 因为

$$1 = m([0,1]) \geq m(\bar{E}) \geq m(E) = 1 \Rightarrow m(\bar{E}) = 1.$$

第二部分是反证法, 若 E 有内点, 就有开球 $B \subset E$, 但是 $0 < m(B) \leq m(E) = 0$, 这不可能! □

Problem 3.2 P78.2

设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n \subset A_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Proof. 这个题相当于用分离性让外测度具有分离可加性, 某种意义上来说, 能从外测度的定义直接看出来. 当然更直接的办法是用 Carathéodory 条件去拆这个集合.

$$\begin{aligned}
m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_1\right) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_1\right) \\
&= m^*(B_1) + m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) \\
&= \cdots \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} m^*\left(B_n\right).
\end{aligned}$$

对 N 取极限即可得到

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

用次可加性得到另一侧不等式, 从而完成了证明.

Remark. 同学们一定要熟练使用 Carathéodory 条件, 很多外测度定义上讲不清楚的事情其实可以直接简化成集合计算, 失去直观性得到的就是论证的极大简化. 以及同学们别把 Carathéodory 条件和 Carathéodory 定理搞混了, 后者是指从外测度构造完备测度的定理.

□

Problem 3.3 P78.5

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0 < \alpha < m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F, 使得 $m(F)=\alpha$.

Proof. 本题需要指出的是, 直接使用测度连续性构造出来的集合不一定是紧集, 应该先用内正则性收缩出紧集, 然后再用连续性. 首先内正则性, 得到紧集 $K \subset E$, 满足 $\alpha < m(K) < m(E)$. 构造正半轴上的函数 $f(x) = m(K \cap [-x,x])$. 这个函数是连续的, 因为

$$f(x+\delta) - f(x) = m(K \cap [-x-\delta, x+\delta]) - m(K \cap [-x,x]) = m(K \cap ([-x-\delta, x)) \cup (x, x+\delta]) \leq 2\delta.$$

因此我们利用介值性, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $m(K \cap [-x_0, x_0]) = \alpha$. 现在令 $F = K \cap [-x_0, x_0]$, 那么 $m(F) = \alpha$. □

Problem 3.4 P94.9

设 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, 且有

$$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k-1,$$

试证明

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) > 0.$$

Proof. 一般来说并集比交集好处理一些 (因为定义里唯一非平凡内容就是并集), 因此我们考虑补集. 此时条件就变成了

$$1 > \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i^c) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right).$$

而这正好等价于题目结论. □

Problem 3.5 P84.2

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, $B \subset \mathbb{R}^n$. 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Proof. 由 Carathéodory 条件, 有

$$m^*(B) = m * (A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A).$$

上下相减即得结论. 其中第一个等式来自 B 用 A 拆分, 第二个等式来自 $A \cup B$ 用 A 拆分. □

Problem 3.6 P95.12

$\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集合列, $m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

Proof. 如果要模仿测度连续性的证明, 那拆集合的时候出现的不等号就会比较麻烦, 因此这里通过等测包给出一个更干净的证明. 设 H 是 A 的等测包, 那么

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \leq m(H \cap B) + m(H \setminus B) = m(H) = m^*(A).$$

这就说明 $H \cap B_k$ 是 E_k 的等测包. 从而有

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \to \infty} m^*(H \cap B_k) = \lim_{k \to \infty} m^*(H \cap B) = m^*(E).$$

本题也有一个不用等测包的方法, 要利用3.5. 不妨设 B_k 测度有限 (不然用不了连续性).

$$\begin{aligned}\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) &= \lim_{k \to \infty} m^*(A \cap B_k) = \lim_{k \to \infty} \left(m^*(A) + m^*(B_k) - m^*(A \cup B_k)\right) \\ &\leq m^*(A) + m^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) - m^*(A \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)) = m^*(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)) = m^*(E).\end{aligned}$$

这样就给出了上界, 而下界是显然的, 从而完成了证明 (道理上就是用两次 Carathéodory 条件, 因此也可以不用3.5).

Remark. 改作业的时候改到了海量不同证法, 其中参考3.2也是一种比较好的证法, 总之这道题本质还是去用 Carathéodory 条件去拆集合, 感觉用等测包反而不是一个很合适的办法 (所以同学们在参考往年答案的时候应该带着自己的思考). 同时这道题在改的时候发现很多同学不加证明/引用的使用了周民强书上的外测度的 Fatou 引理 (这个的证明思路就是用外正则性去扰动, 然后用测度的 Fatou 引理), 这种习惯不太好, 会给读者带来了不必要的负担, 考试的时候完全不建议这样写.

□

Problem 3.7 P95.13

$E \subset \mathbb{R}^n$, $H \supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H - E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

Proof. 取 E 的等测包 $H' \subset H$, 那么

$$m(H) = m(H') + m(\underbrace{H \setminus H'}_{\subset H \setminus E}) = m(H') = m^*(E).$$

□

Problem 3.8 P95.14

试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2, $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Proof. 其实本题是第一次习题课的补充内容. 根据条件, 存在一列开集 $\{G_n\}_{n\geq 1}$, $G_n \supset E$, 使得

$$m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

令

$$G = \bigcap_{n\geq 1} G_n,$$

那么

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

故 $G - E$ 是零测集 (外测度为零), 故可测, 从而

$$E = G - (G - E)$$

也是可测. 另一方面, 由于 E, E^c 可测, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2, $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 - E) < \frac{\epsilon}{2}, \quad m(G_2 - E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

从而

$$m(G_1 \cap G_2) = m\big((G_1 - E) \cup (G_2 - E^c)\big) < \epsilon.$$

□

(以上内容将不在习题课讲评, 同学们自行对照)

Problem 3.9 P107.1

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且

$$\{x \in E : f(x) > 0\}$$

是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

Proof. 直接按照定义来, 稍微做一下分类即可. 若 $a > 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f^2 > a^2\} \cap \{f > 0\}.$$

若 $a \le 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f > 0\} \cup \{f^2 < a^2\}.$$

□

Problem 3.10 P109.6

设 $f \in C([a, b])$. 若有定义在 $[a, b]$ 上的函数 $g(x)$: $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a, b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

Proof. 当然不是, 考虑 $f = \chi_{[0,1]}$, 而 g 为 Dirichlet 函数, 那么 $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [0, 1]$, 但是 Dirichlet 函数不是几乎处处连续的.

Remark. 这个题说明, 零测集的扰动完全破坏了连续函数的刚性. 函数的刚性是一个可以感知到的性质, 一个好的例子是去对比连续泛函演算和 Borel 泛函演算的谱映照定理, 当刚性被破坏, 好的性质应该在什么意义下去考虑.

□

Problem 3.11 P126.2

设 $z = f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$$

是 $[a, b]$ 上的可测函数.

Proof. 要证明可测性只要看像空间的基的原像是否可测, 这里 F 实际上可以看成 $F = f \circ h$, $h(x) = (g_1(x), g_2(x))$. 由于 f 是连续函数, 现在只要验证 h 是可测函数. $\mathbb{R}^2$ 上的拓扑基是开矩体, 那么对任意开矩体 $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, 有

$$h^{-1}(R) = g_1^{-1}(\alpha, \beta) \cap g_2^{-1}(\gamma, \delta),$$

因为 g_1, g_2 都是可测的, 这个集合是可测的.

改作业改到用开圆盘论证的, 但是就应该写成 $\{(g_1(x) - a)^2 + (g_2(x) - b)^2 < r^2\}$ 是可测的, 不过似乎没人这样写. 用开集结构定理的方法不赖, 和用生成元是类似的. □

Problem 3.12 P126.3

设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a, b)$ 上的可测函数.

Proof. 右导数就是右差商的极限, 因此实际上我们只要证明右连续函数是可测函数就可以了. 这里我们不假设同学们学过拓扑学 (因为用 Sorgenfrey 拓扑的 Lindelöf 性质就是显然的了). 现在我们考虑 $A = \{f > a\}$, 那么根据右连续性, 容易知

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + \delta_x) = A,$$

但是这样重叠太多了, 没有办法证明这里能挑出一个可数覆盖从而证明可测性, 因此这里我们需要给 $\delta_x > 0$ 加一些条件,

$$\delta_x := \sup\{\delta : f(x) > a,\ f(x+\delta) > a\}.$$

那么此时我们知道 $[x, x+\delta_x)$ 与 $[y, \delta_y)$ 要么有包含关系要么完全不交, 因此我们就能取出代表元作为覆盖, 而这个覆盖一定是可数的, 因为覆盖中的每一个元素都包含了有理数, 相当于天然得到了一个从代表元到 $\mathbb{Q}$ 的嵌入, 因此是可数的, 那么我们就得到了可测性.

还有一种比较好的做法, 就是考虑阶梯函数逼近

$$\phi_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k + 1/2^n)\chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n)}(x).$$

证明这个函数逐点收敛要注意

$$x \le x_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n} < x + \frac{1}{2^n}.$$

那么有

$$\phi_n(x) = f(x_n) \to f(x).$$

Remark. 这里我把做题思路写出来了, 希望没有完全做出来的同学能好好看看这里的思路.

□

Problem 3.13 P119.1

设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E?$$

Proof. 首先要想到怎么把 a.e. 相等变成一个可以估计的测度问题, 也就是去考虑

$$m(\{|f-g| > \epsilon\}) \overset{?}{=} 0.$$

然后这里我们就要用集合的三角不等式,

$$\{|f-g| > \epsilon\} \subset \{|f-f_n| > \epsilon/2\} \cup \{|f_n - g| > \epsilon/2\}.$$

因此我们就做完了, 因为

$$\begin{aligned} m(|f-g| > \epsilon) &\overset{\forall n}{\le} m(|f-f_n| > \epsilon/2) + m(|f_n - g| > \epsilon) \\ &\overset{\text{condition}}{\le} \limsup_n m(|f-f_n| > \epsilon/2) + m(|f_n - g| > \epsilon/2) = 0. \end{aligned}$$

另一种做法是用 Riesz 定理, $f_n \to f$ a.e., 而又有子列 $f_{n_k} \to f$ a.e., 那么 $f = g$ a.e.. □

Problem 3.14 P119.4

试问: $f_n(x) = \cos^n x$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

Proof. 是的, 直观上看就是端点附近是 1, 然后其他地方都能收敛到 0, 因此我们直接证明 f_n 依测度收敛到 0. 按照如下计算即可.

$$m(|f_n| > \epsilon) \le 2m([0, \arccos \epsilon^{1/n})) \to 0.$$

□

Problem 3.15 P127.12

设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

Proof. 其实也是集合的三角不等式, 因为

$$\{|f_n g_n|>\epsilon\}\subset\{|f_n|>\sqrt{\epsilon}\}\cup\{|g_n|>\sqrt{\epsilon}\}.$$

然后和3.13一样就行了. □

Problem 3.16 P109.7

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g\in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}?$$

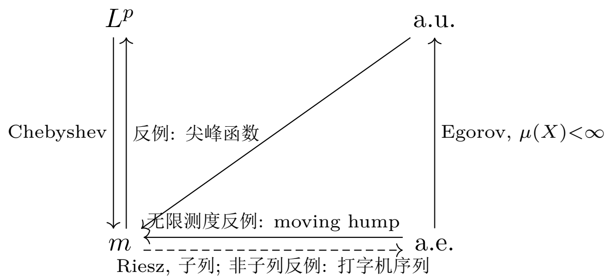
Proof. 当然不存在, 因为可以考虑 $f=\chi_{[0,\infty]}$. 这时任何一个连续函数 g 在跳跃点 $x=0$ 处都有邻域 U, 使得 g 在 U 上的扰动 $<1/2$, 那么就给出一个正测集 $U\cap(-\infty,0)$, 使得 $g\neq f$.

Remark. 不过同学们要意识到, 这里如果是允许一个小测度的误差, 那么是可以构造的, 方法是用 Lusin 定理 +Tietze 扩张.

□

3.2 补充内容

1. 收敛性关系与例子



(助教画图能力有限, 将就看吧, 一个画图工具链接点这里)

先回忆一下各种收敛性的定义和等价测度刻画.

设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是测度空间, f_n, $f : X \to \mathbb{R}$ 为可测函数.

1. **几乎处处收敛, a.e.**

   定义是

   $$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

   用集合语言刻画就是上限集测度为零, 这个推导见2.15下方, 也即对任意 $\epsilon > 0$,

   $$\mu\big(\limsup_{n\to\infty}\{|f_n - f| > \epsilon\}\big) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

2. **依测度收敛, in measure(注意不是convergence of measure)**

   定义就是测度刻画

   $$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \to 0.$$

3. **几乎一致收敛, almost uniformly**

   这个定义来自 Egorov 定理, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在集合 $E \subset X$ 满足 $\mu(X \setminus E) < \epsilon$, 且

   $$f_n \to f \quad \text{在} E \text{ 上一致收敛.}$$

   等价可以写成, 对任意 $\epsilon > 0$, 有

   $$\lim_k \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{|f_j - f| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

   从这里可以看出 a.u. 收敛蕴含依测度收敛.

4. **L^p 收敛,** $1 \leq p < \infty$

   这个比较直接, 就是

   $$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0.$$

   同学们一定不要记成 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, 这两个东西要互推需要加条件!

现在我们给出上述图中的三个反例.

1. **尖峰函数**

   这个就是说, 能量集中在一点. 令

   $$f_n = n\chi_{[0,1/n]},$$

   那么 $||f_n||_1 = 1$, 但是 f_n 依测度收敛到 0, 因为支集在缩小. 因此说明了反例.

2. **打字机序列**

   这个字面来看就是从左往右来回扫过. 令

$$f_{n,k} = \chi_{[(k-1)/2^n, k/2^n)},$$

   其中 $1 \le k < 2^n$. 不难看出这个序列依测度收敛到 0, 因为函数的支集在缩小. 但是函数在 $[0,1)$ 上无处收敛, 因为每隔一段时间就要从 0 变成 1, 从而说明了反例.

3. **moving hump**

   这个的意思是质量滑向无穷远, 接下来将指出, 这是一个弱收敛的标准模型, 同时一道经典考题 (来自泛函分析 H) 就是用的这里的构造思路.

   令

$$f_n = \chi_{[n,n+1]},$$

   那么函数列几乎处处收敛到 0, 但是无法控制的测度一直是 1, 因此说明了反例.

2. 如何使用收敛定理 (本部分由于课程顺序和时间关系, 不一定在习题课上讲, 但是希望同学们在备考时适当参考)

实分析大手子彦哥指出, 先用 DCT, DCT 用不了的用 Fatou, 再用不了就只能 Egorov, 再再用不了就得弱收敛或者这题有问题. 我觉得他说的对.

DCT 例题

以下默认考虑欧氏空间与 Lebesgue 测度

Example 3.17 高度

设 $f \in L^1(E)$. 证明

$$\int_E f(x)\,\mathbf{1}_{\{|f(x)| \le n\}}\,d\mu \longrightarrow \int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Proof. 令

$$f_n(x) ::= f(x)\mathbf{1}_{\{|f(x)|\le n\}}.$$

则对几乎处处的 $x \in E$, 当 $n \to \infty$ 时有

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{a.e. on } E.$$

同时

$$|f_n(x)| \le |f(x)|, \qquad |f| \in L^1(E).$$

于是由控制收敛定理,

$$\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

即

$$\int_E f(x)\mathbf{1}_{\{|f(x)|\le n\}}\,\mathrm{d}\mu \to \int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是有界函数.

Example 3.18 尾部

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 证明

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0.$$

Proof. 令

$$f_n(x) := |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f(x)|>n\}}.$$

对几乎处处的 $x \in E$, 因为 $|f(x)| < \infty$ a.e., 所以当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathbf{1}_{\{|x|>n\}} \to 0,$$

从而

$$f_n(x) \to 0 \qquad \text{a.e. on } E.$$

并且

$$0 \le f_n(x) \le |f(x)|, \qquad |f| \in L^1(E).$$

由 DCT,

$$\int f_n \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

即

$$\int |f(x)| \mathbf{1}_{\{|x|>n\}} \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$

□

Remark. 本题相当于说可积函数差不多是紧支函数.

Example 3.19 Fourier 变换

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}x, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

证明 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

Proof. 本题主要是要知道在欧氏空间证明连续性只需要证明序列连续性.

任取 $t_n \to t$. 对每个 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{e}^{it_n x} \to \mathrm{e}^{itx},$$

从而

$$f(x)\mathrm{e}^{it_n x} \to f(x)\mathrm{e}^{itx}.$$

又注意到

$$|f(x)\mathrm{e}^{it_n x}| = |f(x)|.$$

由于 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 $|f|$ 可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{it_n x} \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{itx} \, \mathrm{d}x.$$

即

$$F(t_n) \to F(t).$$

故 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续. □

Example 3.20 平移连续

设 $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. 对 $h \in \mathbb{R}^d$, 记

$$\tau_h f(x) := f(x-h).$$

证明

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0).$$

Proof. 这题的标准做法是: 先在好函数类上证明, 再用稠密性推广.

第零步: $C_c(\mathbb{R}^d) \overset{\textbf{dense}}{\subset} L^p$

这里我不想重复下一题的证明, 因此给出另一种证明思路. 可积函数可以被有界函数逼近, 因为3.17. 然后这里用简单函数逼近, 但是还做不到连续性, 因此用一下3.16下的注记, 也就是用 Lusin+Tietze 就能得到一个连续函数. 最后算一下积分误差, 我们能注意到其实只对一个小测度集上做了扰动, 而因为我们提前说了有界性, 因此这个扰动是可以接受的, 从而完成了证明. 过程可以自己算一下, 这个结论一般不需要证明.

第一步: 先设 $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

对每个固定的 $x \in \mathbb{R}^d$, 由连续性,

$$f(x-h) \to f(x) \qquad (h \to 0).$$

因此

$$|f(x-h) - f(x)|^p \to 0 \qquad \text{for every } x \in \mathbb{R}^d.$$

下面找支配函数. 因为 f 具有紧支撑, 所以当 $|h| \le 1$ 时, 函数 $x \mapsto f(x-h)$ 的支撑都落在某个固定的大球 $B(0,R)$ 中. 又由于 f 连续且紧支撑, 因此有界, 设

$$|f(x)| \le M \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

于是当 $|h| \le 1$ 时,

$$|f(x-h) - f(x)|^p \le (2M)^p \,\mathbf{1}_{B(0,R)}(x),$$

而右边可积. 由 DCT,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \to 0.$$

第二步: 推广到一般 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

由 $C_c(\mathbb{R}^d)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中稠密, 任给 $\epsilon > 0$, 可取 $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 使得

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

于是

$$\|\tau_h f - f\|_p \le \|\tau_h (f-g)\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p.$$

又因为平移保持 L^p 范数,

$$\|\tau_h (f-g)\|_p = \|f - g\|_p < \epsilon.$$

故

$$\|\tau_h f - f\|_p \le 2\epsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

由第一步知, 当 $h \to 0$ 时,

$$\|\tau_h g - g\|_p \to 0.$$

所以

$$\limsup_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_p\le 2\epsilon.$$

由于 $\epsilon>0$ 任意, 得

$$\|\tau_h f-f\|_p\to 0.$$

□

Example 3.21 光滑化

设 $\eta\in L^1(\mathbb{R}^d)$, 满足 $\eta\ge 0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d}\eta(x)\,dx=1.$$

定义

$$\eta^\epsilon(x):=\epsilon^{-d}\eta(x/\epsilon),\qquad \epsilon>0.$$

1. 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^d)(1\le p<\infty)$, 证明

$$\eta^\epsilon * f\to f\qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

2. 若 $f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 且在点 x 处连续, 证明

$$(\eta^\epsilon * f)(x)\to f(x).$$

Proof. **(1) 证明 L^p 收敛.**

先积分换元, 把卷积写成

$$(\eta^\epsilon * f)(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\,f(x-\epsilon y)\,\mathrm{d}y.$$

于是

$$(\eta_\epsilon * f)(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\big(f(x-\epsilon y)-f(x)\big)\,\mathrm{d}y.$$

因此由 Minkowski 积分不等式,

$$\|\eta_\epsilon * f-f\|_p\le\int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\,\|\tau_{\epsilon y}f-f\|_p\,\mathrm{d}y.$$

对每个固定的 $y\in\mathbb{R}^d$, 当 $\epsilon\to 0$ 时有 $\epsilon y\to 0$, 由上一题的平移连续性,

$$\|\tau_{\epsilon y}f-f\|_p\to 0.$$

另一方面,

$$\|\tau_{\epsilon y}f-f\|_p\le\|\tau_{\epsilon y}f\|_p+\|f\|_p=2\|f\|_p.$$

故

$$0\le\eta(y)\,\|\tau_{\epsilon y}f-f\|_p\le 2\|f\|_p\,\eta(y),$$

而 $2\|f\|_p\,\eta(y)\in L^1(\mathbb{R}^d)$. 于是对变量 y 应用 DCT, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}\eta(y)\,\|\tau_{\epsilon y}f-f\|_p\,\mathrm{d}y\to 0.$$

从而

$$\|\eta_\epsilon * f-f\|_p\to 0.$$

(2) 证明连续点处的点态收敛.

固定 x, 有

$$(\eta_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y) f(x - \epsilon y)\, \mathrm{d}y.$$

于是

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \eta(y)\big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big)\, \mathrm{d}y.$$

因为 f 在 x 处连续, 所以对每个固定的 y, 当 $\epsilon \to 0$ 时,

$$f(x-\epsilon y) \to f(x).$$

因此

$$\eta(y)\big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big) \to 0 \qquad \text{for every } y \in \mathbb{R}^d.$$

又因为 $f \in L^\infty$, 设 $\|f\|_\infty \le M$, 则

$$\big|\eta(y)\big(f(x-\epsilon y) - f(x)\big)\big| \le 2M\, \eta(y),$$

而 $2M\,\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$. 由 DCT,

$$(\eta_\epsilon * f)(x) - f(x) \to 0.$$

即

$$(\eta_\epsilon * f)(x) \to f(x).$$

□

Remark. 这两个题往年考过类似的, 务必掌握, 至少掌握 L^1 版本的计算.

Fatou 例题

任爷曾说过, 这个 Fatou 引理就像我们科大的学生, 在校内看不出什么, 拿到社会上就变得很厉害. 同学们要相信自己的实力, 即使哪门课没学好, 或者早早放弃基数, 都不代表任何能力上的缺失, 不过是选择一条适合自己的路 (所以不要不知道选啥方向就选基数, 这很糟糕).

一般来说, Fatou 引理是天然的下半连续性, 在变分法中起到保持能量有界的作用. 等号不成立的一些例子是逃逸 ($\chi_{[n,n+1]}$) 或者消散 ($\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$) 再或者集中 ($n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$), 这能联想到一些深刻的分析内容, 但和我们的课程内容无关. 以上是题外话.

Example 3.22 函数列有比较关系

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有

$$f_n \ge h_n \quad \text{a.e.}$$

又设

$$f_n \to f \quad \text{a.e.}, \qquad h_n \to h \quad \text{a.e.},$$

并且

$$\int h_n \,\mathrm{d}\mu \to \int h \,\mathrm{d}\mu > -\infty.$$

证明

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Proof. 令
$$u_n := f_n - h_n.$$
则 $u_n \geq 0$ a.e., 且由 $f_n \to f$ 和 $h_n \to h$ a.e. 可得
$$u_n \to f - h \quad \text{a.e.}$$
由 Fatou 引理,
$$\int (f-h)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (f_n - h_n)\,\mathrm{d}\mu.$$
于是
$$\int f\,\mathrm{d}\mu - \int h\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\Big(\int f_n\,\mathrm{d}\mu - \int h_n\,\mathrm{d}\mu\Big) = \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu - \int h\,\mathrm{d}\mu.$$
也就是
$$\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$
□

Remark. 仿照这里的过程, 可以证明广义 DCT: 设 f_n, g_n, f, $g \in L^1$, 且 $f_n \to f$ a.e., $g_n \to g$ a.e., 且 $|f_n| \leq g_n$, $\int g_n \to \int g$, 那么 $\int f_n \to \int f$. 提示是对 $g_n + f_n \geq 0$ 和 $g_n - f_n \geq 0$ 分别使用 Fatou 引理.

Example 3.23 依测度收敛取子列

设 f_n, h_n 为可测函数, 且对每个 n 都有
$$f_n \geq h_n \quad \text{a.e.}$$
又设
$$f_n \to f \quad \text{in measure}, \qquad h_n \to h \quad \text{in measure},$$
并且
$$\int h_n\,\mathrm{d}\mu \to \int h\,\mathrm{d}\mu > -\infty.$$
证明
$$\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Proof. 设
$$L := \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$
若 $L = +\infty$, 结论显然成立. 下设 $L < +\infty$.

任取满足
$$\int f_{n_k}\,\mathrm{d}\mu \to L$$
的子列 $\{f_{n_k}\}$. 由于 $f_{n_k} \to f$ in measure, 由子列原则可取进一步子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$, 使得
$$f_{n_{k_j}} \to f \quad \text{a.e.}$$
再对对应的 $\{h_{n_{k_j}}\}$ 应用子列原则, 可再取进一步子列, 仍记为 $\{n_{k_j}\}$, 使得
$$h_{n_{k_j}} \to h \quad \text{a.e.}$$
于是沿着这条子子列, 已满足第 1 题的全部假设, 从而
$$\int f\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{j\to\infty}\int f_{n_{k_j}}\,\mathrm{d}\mu.$$

但右边恰好等于 L, 因为 $\int f_{n_k}\,\mathrm{d}\mu \to L$, 这是我们之前选好的. 故

$$\int f\,\mathrm{d}\mu \le L = \liminf_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

证毕. □

上面两个题就是比较经典的 Fatou 引理例题了, 一个是构造正的比较函数, 一个是取子列, 考试中也基本是这些方法. 下面补充一个用广义 DCT 的题目.

Example 3.24 依范数收敛与范数收敛

设 $f_n \to f$ a.e., 且 $||f_n||_1 \to ||f||_1$, 那么 $||f_n - f||_1 \to 0$.

Proof. 由条件, 有 $f_n \in L^1$, 那么 $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \in L^1$, 由广义 DCT, 就有

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

□

Egorov

一般来说用到 Egorov 定理的题目都是有点难度的题目了.

Example 3.25 高阶矩有界 + 逐点收敛得到一阶矩收敛

设 $m(E) < \infty$. 设 $f_n \to 0$ a.e. 于 E, 并且存在 $p > 1$ 和常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} \le C.$$

证明

$$\|f_n\|_{L^1(E)} \to 0.$$

Proof. 对固定的 $\epsilon > 0$, 由 Egorov 定理, 存在可测集 $A \subset E$ 满足 $m(E \setminus A) < \epsilon$, 使得 $f_n \rightrightarrows f$ on A, 然后我们直接拆积分

$$\begin{aligned}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}x &= \int_A |f_n|\,\mathrm{d}x + \int_{E\setminus A} |f_n| \\ &\le m(A)\sup_A |f_n| + (m(E\setminus A))^{\frac{1}{p'}}||f_n||_p. \quad \text{(用一致收敛和 Höleder 不等式)}\end{aligned}$$

然后前面用一致收敛到 0, 后面用 L^p 有界性加测度小性, 由于 ϵ 是任取的, 就完成了证明. □

另一个很好的例子是有限测度空间中 L^1 有界 + 一致可积推出 L^1 弱紧性的证明, 其实一致可积就是值域的尾部小性, 也就是防止函数的能量集中到一点, 使得紧性缺失. 不过受限于课程内容就不展开讲了. 这个证明可参考 Evans 的 Measure Theory, Theorem 1.44.

3. 收敛性与例子

a.e. 收敛的题目在上次习题课讲了很多 (Borel-Cantelli 引理), 然后依测度收敛的题目主要是3.23, 3.13和3.15, 因此这里主要讲 L^p 收敛相关的内容, 最后介绍一些弱收敛的内容. 其实如果不是做题, 感觉 L^p 收敛和弱收敛才是最常用的.

Example 3.26 范数极限

设 $1 \le p < \infty$, 且 $f \in L^p \cap L^\infty$. 于是对每个 $q > p$, 都有 $f \in L^q$. 证明

$$\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q.$$

Proof. 记

$$M := \|f\|_\infty.$$

先证上极限不超过 M. 对任意 $q > p$, 由 $|f| \le M$ a.e., 得

$$|f|^q = |f|^{q-p}|f|^p \le M^{q-p}|f|^p.$$

两边积分可得

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \le M^{q-p}\int |f|^p = M^{q-p}\|f\|_p^p.$$

于是

$$\|f\|_q \le M^{1-p/q}\|f\|_p^{p/q}.$$

令 $q \to \infty$, 得

$$\limsup_{q\to\infty} \|f\|_q \le M.$$

再证下极限不小于 M. 任取 $\epsilon > 0$, 令

$$A_\epsilon := \{x : |f(x)| > M - \epsilon\}.$$

由于 M 是本性上确界, 所以 $\mu(A_\epsilon) > 0$. 因而对每个 $q > p$,

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \ge \int_{A_\epsilon} |f|^q \ge (M-\epsilon)^q \mu(A_\epsilon).$$

于是

$$\|f\|_q \ge (M-\epsilon)\mu(A_\epsilon)^{1/q}.$$

令 $q \to \infty$, 注意到 $\mu(A_\epsilon)^{1/q} \to 1$, 得

$$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \ge M - \epsilon.$$

再令 $\epsilon \downarrow 0$, 得

$$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \ge M.$$

综合上下极限, 即得

$$\lim_{q\to\infty} \|f\|_q = M = \|f\|_\infty.$$

□

Example 3.27 Vitali 收敛定理

设 $1 \le p < \infty$, 且 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p(X)$. 证明: $\{f_n\}$ 在 L^p 范数下是 Cauchy 列的充要条件是下面三条同时成立:

1. $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 即对每个 $\eta > 0$,

$$\mu\big(\{|f_n - f_m| \ge \eta\}\big) \to 0 \qquad (m, n \to \infty).$$

2. $\{|f_n|^p\}$ 一致可积. 也就是说, 对每个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_n \int_A |f_n|^p \, d\mu < \epsilon.$$

3. 对每个 $\epsilon > 0$, 存在可测集 $E \subset X$, 使得 $\mu(E) < \infty$, 且

$$\int_{E^c} |f_n|^p \, d\mu < \epsilon \qquad \text{for } \forall n.$$

Proof. 分必要性和充分性两部分.

必要性. 设 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列.

(i) 证明 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的.

任取 $\eta > 0$. 由 Chebyshev 不等式,

$$\mu\big(\{|f_n - f_m| \geq \eta\}\big) \leq \frac{1}{\eta^p} \int |f_n - f_m|^p \, d\mu = \frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{\eta^p}.$$

由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 右边当 $m, n \to \infty$ 时趋于 0. 故 (i) 成立.

(ii) 证明 $\{|f_n|^p\}$ 一致可积.

这个的思路是用 Cauchy 列和积分的绝对连续性, 讲后面的序列粘起来. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

又因为 $|f_N|^p \in L^1$, 所以存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta_0$, 就有

$$\int_A |f_N|^p \, d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是对 $n \geq N$, 若 $\mu(A) < \delta_0$, 则

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int_A |f_n - f_N|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_A |f_N|^p \, d\mu < 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} + 2^{p-1} \cdot \frac{\epsilon}{2^p} = \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \ldots, N-1$, 因为每个 $|f_n|^p \in L^1$, 可分别取 $\delta_n > 0$, 使得 $\mu(A) < \delta_n$ 时

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu < \epsilon.$$

令

$$\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}\},$$

则只要 $\mu(A) < \delta$, 对所有 n 都有

$$\int_A |f_n|^p \, d\mu < \epsilon.$$

故 (ii) 成立.

(iii) 证明有限测度截断条件.

这个思路和上面一步思路类似, 尾序列都用第 N 项粘住, 有限项随便处理就行. 任取 $\epsilon > 0$. 由于 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 的, 可取 N, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\|f_n - f_N\|_p^p < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

因为 $|f_N|^p \in L^1$, 存在可测集 $E_0 \subset X$, 使得

$$\mu(E_0) < \infty, \qquad \int_{E_0^c} |f_N|^p \, d\mu < \frac{\epsilon}{2^p}.$$

于是当 $n \geq N$ 时,

$$\int_{E_0^c} |f_n|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_n - f_N|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_{E_0^c} |f_N|^p \, d\mu < \epsilon.$$

对有限多个 $n = 1, \ldots, N-1$, 可分别取可测集 $E_n \subset X$, 使得

$$\mu(E_n) < \infty, \qquad \int_{E_n^c} |f_n|^p \, d\mu < \epsilon.$$

令

$$E := E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_{N-1}.$$

则 $\mu(E) < \infty$, 且由于 $E^c \subset E_0^c$ 以及 $E^c \subset E_n^c$, 对所有 n 都有

$$\int_{E^c} |f_n|^p \, d\mu < \epsilon.$$

故 (iii) 成立.

充分性. 现设 (i), (ii), (iii) 都成立. 证明 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. 我们的思路是, 将积分按机制拆分, 主部 E 的估计可以用依测度收敛拆成大误差和小误差, 小误差直接算, 大误差放到一致可积里, 然后主部外 E^c 基本可以丢掉, 那么就做完了.

任取 $\epsilon > 0$. 我们要证明当 m, n 充分大时,

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

由 (iii), 可取可测集 $E \subset X$, 使得

$$\mu(E) < \infty, \qquad \int_{E^c} |f_k|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p} \quad \text{对所有} k.$$

再取 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

由 (ii), 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $\mu(A) < \delta$, 就有

$$\sup_k \int_A |f_k|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

由 (i), 因为 $\{f_n\}$ 在测度意义下是 Cauchy 的, 可取 N, 使得当 $m, n \geq N$ 时,

$$\mu\big(\{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}\big) < \delta.$$

记

$$A_{mn} := \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \lambda\}.$$

现在把积分分成三部分:

$$\int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu = \int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p \, d\mu + \int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p \, d\mu + \int_{E^c} |f_n - f_m|^p \, d\mu.$$

对第一部分, 因为在 $E \setminus A_{mn}$ 上有 $|f_n - f_m| < \lambda$, 所以

$$\int_{E \setminus A_{mn}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \leq \lambda^p \mu(E) < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第二部分, 由 $|a-b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$, 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \le 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_n|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_{A_{mn}} |f_m|^p \, d\mu.$$

由于 $\mu(A_{mn}) < \delta$, 由 (ii) 得

$$\int_{A_{mn}} |f_n|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}, \qquad \int_{A_{mn}} |f_m|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3 \cdot 2^p}.$$

故

$$\int_{A_{mn}} |f_n - f_m|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

对第三部分, 同样由 $|a-b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$, 得

$$\int_{E^c} |f_n - f_m|^p \, d\mu \le 2^{p-1} \int_{E^c} |f_n|^p \, d\mu + 2^{p-1} \int_{E^c} |f_m|^p \, d\mu < \frac{\epsilon^p}{3}.$$

三部分相加可得, 当 $m, n \ge N$ 时,

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu < \epsilon^p.$$

因此

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon.$$

故 $\{f_n\}$ 在 L^p 中是 Cauchy 列. □

最后, 我们来通过弱收敛, 加强我们对收敛性的理解. 其实这样说是有原因的, 因为弱收敛中有三种标准机制, 使其区别于强收敛 (一般称 L^p 收敛为强收敛).

Definition 3.28 收敛性

设 X 是赋范线性空间, $x_n, x \in X$.

强收敛. 称 x_n 强收敛到 x, 记作

$$x_n \to x,$$

如果

$$\|x_n - x\| \to 0.$$

弱收敛. 称 x_n 弱收敛到 x, 记作

$$x_n \rightharpoonup x,$$

如果对每个连续线性泛函 $f \in X^*$, 都有

$$f(x_n) \to f(x).$$

Remark. 这里可以想的简单一些, 就考虑 $(L^p)* = L^{p'}$, 这里 $1 \le p < \infty$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 承认这个事情, 对于理解下面的内容够用了.

强收敛一定推出弱收敛. 因为若 $\|x_n - x\| \to 0$, 则对任意 $f \in X^*$,

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\| \, \|x_n - x\| \to 0.$$

但是反过来一般不成立. 这种现象只会在无限维空间中出现. 在有限维空间里, 弱收敛与强收敛是等价的.

从直观上看, 强收敛要求 "整体上靠近", 而弱收敛只要求 "在测试意义下逼近". 因此, 如果一个序列能够通过某种方式躲过这些测试, 就可能出现 "弱收敛但不强收敛".

这种躲避有三种典型方式:

振荡, 逃逸, 集中.

下面分别讨论.

模型一：振荡

考虑 $L^2(0,2\pi)$ 中的函数列

$$u_n(x)=\sin(nx).$$

首先,

$$\|u_n\|_{L^2(0,2\pi)}^2=\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)\,dx=\pi,$$

因此 $\|u_n\|_{L^2}$ 恒定不变, 所以 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, u_n 却弱收敛到 0. 直观上说, $\sin(nx)$ 的频率越来越高, 正负振荡越来越快, 积分后测试函数被抵消了. 当然严格来讲就是 Riemann-Lebesgue 引理

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

因此

$$u_n\rightharpoonup 0\quad\text{in }L^2(0,2\pi).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把 “不收敛的部分” 藏在越来越细的振荡里.

模型二：逃逸

考虑 $L^p(\mathbb{R})$, 其中 $1<p<\infty$. 取一个固定函数 $\phi\in L^p(\mathbb{R})$, 定义

$$u_n(x)=\phi(x-n).$$

由于平移不改变 L^p 范数, 有

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R})}=\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

因此 u_n 不可能强收敛到 0.

但是, 当 $n\to\infty$ 时, 图像整体向右平移, 越来越远离原点附近. 对任意固定的测试函数 φ, u_n 与 φ 的重叠越来越少, 所以

$$\int_{\mathbb{R}}u_n(x)\varphi(x)\,dx\to 0.$$

因此

$$u_n\rightharpoonup 0.$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列让质量逃逸到无穷远.

Remark. 习题课的时候我提到了一个消散 (vanish) 的机制, 这个其实也应该算作逃逸的例子, 因为能量也是在往无穷远转播.

模型三：集中

考虑 $L^p(0,1)$, 其中 $1<p<\infty$, 定义

$$u_n(x)=n^{1/p}\mathbf{1}_{(0,1/n)}(x).$$

直接计算可得

$$\|u_n\|_{L^p(0,1)}^p=\int_0^{1/n}n\,dx=1,$$

因此

$$\|u_n\|_{L^p(0,1)}=1.$$

于是 u_n 不可能强收敛到 0.

另一方面, u_n 的支集越来越小, 全部质量都集中到 $x=0$ 附近越来越窄的区域. 对任意固定测试函数 $\varphi \in L^{p'}(0,1)$, 有

$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx \to 0.$$

因此

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(0,1).$$

这个例子说明, 弱收敛允许序列把质量压缩到越来越小的尺度中. 从线性观测的角度看, 这种集中仍然可能不可见.

接下来讲一个弱收敛的例子, 其实约等于 Riemann-Lebesgue 引理.

在 ℓ^2 中考虑标准基

$$e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots),$$

其中第 n 个分量为 1, 其余分量为 0.

显然

$$\|e_n\|_{\ell^2} = 1,$$

所以 e_n 不可能强收敛到 0.

但是, 对任意 $y=(y_k)\in \ell^2$, 有

$$\langle e_n, y\rangle = y_n \to 0,$$

因为 $y\in\ell^2$ 有 $y_k\to 0$. 因此

$$e_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^2.$$

这个例子可以看作 "滑行无穷远" 的抽象版本. 它不是在实线上向右平移, 而是在坐标方向上跑向越来越远的位置.

前面的例子表明, 在很多无限维空间里, 弱收敛比强收敛弱得多. 但是 ℓ^1 是一个非常特殊的空间. 我们将证明如下结果.

Example 3.29 饺子醋

ℓ^1 中弱收敛等价于强收敛.

我们先来套典型机制, 看看为什么不能弱而不强. 首先作为离散序列空间, 本身就不能像 L^2 中通过振荡和集中来实现弱而不强, 而对于逃逸来说, ℓ^1 的对偶空间是 ℓ^∞ 空间, 这个空间太大了, 在里面考虑测试序列 $(\frac{1}{\mathrm{sgn}(a_1)},\cdots,\frac{1}{\mathrm{sgn}(a_n)},\cdots)$, 能让所有质量都无所遁形, 因此我们很有理由去相信这个结果是对的.

我们的证明就是去造测试序列, 抓取想要逃逸的质量, 从而实现强收敛.

Proof. 先说一下我们的构造策略: 因为有弱收敛, 所以我们当然能压制住某项后的所有序列 $x_{n\geq N}$, 使得他们的质量集中在尾巴 $\{x_{n\geq N}(i\gg 1)\}$ 上, 然后我们就归纳的构造我们的测试函数, 一步一步抓取更大范围的质量.

反设

$$x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } \ell^1,$$

但

$$\|x_n\|_{\ell^1} \not\to 0.$$

那么通过取子列, 不妨仍设存在 $\delta>0$, 使得

$$\|x_n\|_{\ell^1} \geq 5\delta, \quad \forall n\geq 1.$$

这里的 5δ 是纯技术设定, 只是为了后续分配质量方便一些.

把 x_n 写成

$$x_n = \big(x_n(i)\big)_{i\geq 1}.$$

由于每个坐标映射

$$x \mapsto x(i)$$

都是 ℓ^1 上的连续线性泛函, 由 $x_n \rightharpoonup 0$ 可知, 对每个固定的 $i \geq 1$, 都有

$$x_n(i) \to 0.$$

下面归纳地构造严格递增序列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k\geq 1}$, 使得

$$\sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta, \tag{1}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{i_k} |x_{n_{k+1}}(i)| < \delta. \tag{2}$$

构造过程如下.

先取 $n_1 = 1$. 由于 $x_{n_1} \in \ell^1$, 可取 i_1 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| < \delta.$$

这就得到了 (1) 在 $k = 1$ 时的结论.

接着, 由于对每个 $1 \leq i \leq i_1$ 都有 $x_n(i) \to 0$, 故可取 $n_2 > n_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

再由 $x_{n_2} \in \ell^1$, 可取 $i_2 > i_1$ 足够大, 使得

$$\sum_{i=i_2+1}^{\infty} |x_{n_2}(i)| < \delta.$$

如此归纳下去, 就得到严格递增序列 $\{n_k\}_{k\geq 1}$ 和 $\{i_k\}_{k\geq 1}$ 满足 (1) 与 (2).

现在定义 $y = \big(y(i)\big)_{i\geq 1} \in \ell^\infty$ 如下. 令 $i_0 = 0$, 并在每个块

$$i_{k-1} + 1 \leq i \leq i_k$$

上定义

$$y(i) = \overline{\operatorname{sgn}\big(x_{n_k}(i)\big)}, \quad k \geq 1.$$

其中约定

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

于是显然 $|y(i)| \leq 1$, 从而

$$\|y\|_{\ell^\infty} \leq 1,$$

故 $y \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$.

在开始下面的估计前, 还是画个图展示一下我们要怎么证明.

$$3\delta, i_k+1 \xrightarrow[\to\text{gliding hump}\to]{} i_{k+1}$$

$$\delta \;\text{———}\; i_k \qquad\qquad \delta, i_{k+1}+1 \;\text{———}$$

意会一下即可.

接下来估计 $y(x_{n_k})$. 对任意 $k \geq 1$, 有

$$y(x_{n_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i) x_{n_k}(i).$$

把求和拆成三段,

$$\{1, \ldots, i_{k-1}\}, \qquad \{i_{k-1}+1, \ldots, i_k\}, \qquad \{i_k+1, i_k+2, \ldots\}.$$

由于在中间这一段上 $y(i) = \overline{\operatorname{sgn}(x_{n_k}(i))}$, 所以

$$\sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} y(i) x_{n_k}(i) = \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)|.$$

从而

$$\begin{aligned} |y(x_{n_k})| &\geq \sum_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| \\ &= \|x_{n_k}\|_{\ell^1} - 2\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| - 2\sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)|. \end{aligned}$$

由构造可知, 当 $k \geq 2$ 时,

$$\sum_{i=1}^{i_{k-1}} |x_{n_k}(i)| < \delta, \qquad \sum_{i=i_k+1}^{\infty} |x_{n_k}(i)| < \delta,$$

再结合 $\|x_{n_k}\|_{\ell^1} \geq 5\delta$, 得

$$|y(x_{n_k})| > 5\delta - 2\delta - 2\delta = \delta.$$

而当 $k = 1$ 时, 由 $i_0 = 0$ 以及 (1), 同样有

$$|y(x_{n_1})| \geq \sum_{i=1}^{i_1} |x_{n_1}(i)| - \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| = \|x_{n_1}\|_{\ell^1} - 2\sum_{i=i_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| > 5\delta - 2\delta = 3\delta > \delta.$$

因此对每个 $k \geq 1$, 都有

$$|y(x_{n_k})| > \delta.$$

这就矛盾了. 因为 $y \in (\ell^1)^*$, 而 $x_n \rightharpoonup 0$, 必有

$$y(x_n) \to 0,$$

从而其任意子列也应趋于 0, 不可能满足

$$|y(x_{n_k})| > \delta, \quad \forall k \geq 1.$$

矛盾说明反设不成立, 所以

$$\|x_n\|_{\ell^1} \to 0.$$

于是

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x\|_{\ell^1} \to 0.$$

这就证明了 ℓ^1 中弱收敛与强收敛等价. □

4 第四次习题课讲义

4.1 作业答案

Problem 4.1 P119 5

若 $f_n(x)$, $(n=1,2,\cdots)$, 在 $E\subset\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x)\equiv 0$, 试问: 是否有

$$\lim_{n\to\infty} m\big(\{x\in E:\ |f_n(x)|>0\}\big)=0?$$

Proof. 考虑 $f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,1]}$, 可见结论错误. □

Problem 4.2 P119 6

设 $E\subset\mathbb{R}$ 上的可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 满足

$$f_k(x)\ge f_{k+1}(x),\quad (k=1,2,\cdots).$$

若 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0, 试问: $f_k(x)$ 在 E 上是否几乎处处收敛到 0?

Proof. 有单调性, 子列当然能控制整体. 用 Riesz 定理就行了. □

Problem 4.3 P123 1

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，试问：是否存在 $g\in C(\mathbb{R})$，使得

$$m\big(\{x\in\mathbb{R}:|f(x)-g(x)|>0\}\big)=0?$$

Proof. 当然不行, 这个题的道理和3.16是一样的, 考虑 $\chi_{[0,\infty]}$ 即可. □

Problem 4.4 P123 2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测，试证明存在多项式列 $\{P_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

Proof. 思路是 Lusin 定理和 Weierstrass 逼近定理. 利用 Lusin 定理, 可以找到一列连续函数几乎处处收敛到 f. 一个比较好说清楚的写法是, 直接用 Lusin 定理, 然后相当于得到了依测度收敛序列, 用 Riesz 定理就得到几乎处处收敛子列. 然后用 Weierstrass 定理, 写过程用放缩就行, 比如

$$\lim_n |f(x)-p_n(x)|\le \liminf_n |f(x)-f_n(x)|+\liminf_n |f_n(x)-p_n(x)|\le \liminf_n |f(x)-f_n(x)|+||f_n-p_n||_\infty.$$

但是这里还有最后一个问题, 就是 Lusin 定理在使用的时候, 要假定函数是几乎处处有限的. 因此在构造连续函数逼近时, 第一步应该将 f 改造成 $\frac{f}{1+|f|}$, 然后先逼近, 再拉回即可. 这里反函数是 $\frac{x}{1-|x|}$. 用广义实值化的 tan 和 arctan 也是一样的. □

Remark. 改作业的时候发现只有极少数同学注意到这一点, 所以我直接放过去了, 但是同学们还是注意细节.

课后有同学问到这个几乎处处有限的问题, 这里确实存在一个定义上的问题, 同学们如果看过不同的书可能也遇到过. 有的书将可测函数定义为 $f:X\to\mathbb{R}$, 也就是这个函数其实天然就是几乎处处有限的, 这个定义可以很自然推广到复值实变函数上. 另一种定义则是 $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$, 这个定义应该是任老师采用的定义, 这里要采用单点紧化的拓扑, 也就是说, 收敛到 $+\infty$ 是指任意 $M>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$, 则 $f_n(x)>M$, 想清楚这一点后, 这个题目就没有问题了. 当然两种定义都能做出这道题, 以及这两种定义各

有优劣, 几乎处处有限的定义可以让 Lusin 定理之类的看起来更加广泛, 同时 L^1_{loc} 函数 (这个东西几乎是最弱性质了, 上个学期 PDE 也是这样讲的) 显然也是几乎处处有限的. 另一种定义会让理论更加完备, 毕竟也可以不要求函数都是局部可积的. 几何测度论就会区分为 integrable 和 summable 两种概念. 考试建议用广义实值定义, 不过大概率不会涉及这两种定义的问题.

4.2 2025mid

Problem 4.5 2025-1

谈谈你对 Lebesgue 可测集合的认识: 定义, 与开集, Borel 集的关系。

Proof.

- (1') 外测度定义.
- (3') Carathéodory 条件.
- (3') $m(U \setminus E) < \epsilon$.
- (3') Borel 集 $\pm$ 零测集.

□

Problem 4.6 2025-2

谈谈你对 Lebesgue 可测函数的认识: 定义, 与特征函数, 连续函数的关系, 以及关于极限运算是否封闭。

Proof.

- (1') f 广义实值.
- (4') E 可测 (1'), $\{x \in E : f(x) > t\}$ 可测.
- (2') $\mathcal{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle$, $A \subset E$ 可测.
- (2') Lusin 定理.
- (2') 封闭性.

□

Remark. 这两个题比较莫名其妙, 注明的分值仅代表 25 年评分标准. 不过还是要注意, 至少要把题目提到的词解释一下.

Problem 4.7 2025-3

计算集合族

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{R} : m(A) = 0\}$$

的势。

Proof. 结论是

$$|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

上界显然成立, 因为 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 所以

$$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

下界取标准 Cantor 集 C. 因为

$$m(C) = 0,$$

Lebesgue 测度是完备的, 所以 C 的任意子集都是零测集. 因而

$$\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{F}.$$

又因为 $|C| = \mathfrak{c}$, 所以

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

故

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\mathfrak{c}}.$$

综上,

$$|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

□

Problem 4.8 2025-4

设 C 是 $[0,1]$ 区间三等分 Cantor 集. 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}+\infty, & x\in C,\\ (-2)^{-n}, & x \text{ 落在构造过程中第}n\text{ 次舍去的长为}3^{-n}\text{ 的区间.}\end{cases}$$

计算

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Proof. 在 25 年的评分标准中, 说明函数可测占 2 分.

因为 $m(C)=0$, 所以 C 上取值为 $+\infty$ 不影响积分.

第 n 次删去的区间共有

$$2^{n-1}$$

个, 每个长度为

$$3^{-n},$$

且在这些区间上

$$|f(x)| = 2^{-n}.$$

故第 n 层的贡献为

$$2^{n-1}\cdot 3^{-n}\cdot 2^{-n} = \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

于是

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{4}.$$

□

Problem 4.9 2025-5

计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx.$$

Proof. 首先要知道这里的逐点极限是

$$\lim_n (1+\frac{x}{n})^{-n} = e^{-x}.$$

(必须知道这个, 而且不需要证明这个.)

然后用 MCT/DCT(用单调性就行, 这是数分结论) 得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

不会算这个积分的话可能会比较凄凉, 不过过程应该是不用写的.

□

Problem 4.10 2025-6

设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是非负的 Lebesgue 可积函数. 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x\in[0,1]:f(x)\geq k\})<\infty.$$

Proof. 由分布函数,

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\infty} m(\{x:f(x)\geq t\})\,dt.$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\,dx\geq\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} m(\{x:f(x)\geq t\})\,dt\geq\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x:f(x)\geq k+1\}).$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\{x:f(x)\geq k\})<\infty.$$

再加上

$$m(\{x:f(x)\geq 0\})\leq 1,$$

便得

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(\{x:f(x)\geq k\})<\infty.$$

□

Problem 4.11 2025-7

设 f_n 是 $[0,1]$ 上的单调增加的非负可测函数, 且

$$f_n(x)\to f(x)\quad \text{a.e. } x\in[0,1].$$

证明: 存在 $[0,1]$ 上的单调增加的非负简单可测函数 g_n, 使得对任意 x,

$$g_n(x)\leq f_n(x),$$

且

$$g_n(x)\to f(x)\quad \text{a.e.}$$

Remark. 这个题考试的时候修改过表述, 这里的表述可能容易误解. 反正意思是 $f_n\nearrow f$, 要造 $g_n\nearrow f$.

Proof. 证明来自 PPT13 关于 MCT 的证明. 第一步是写出 ϕ_{ij} 的构造, 这个不写整道题就是零分 (因为我拿了零分).

$$\phi_{ij}=\sum_{k=0}^{2^{2^j}-1} k2^{-j}\chi_{f^{-1}(k2^{-j},(k+1)2^{-n}]}+2^n\chi_{f^{-1}(2^j,\infty]}.$$

然后取对角线序列

$$g_n=\max(\phi_{11},\cdots,\phi_{nn}).$$

最后的逐点收敛证明用 ϵ-room 技巧, 考虑 $f-\epsilon$, 有

$$f(x)-\epsilon\leq\phi_{mk}(x)\leq f_m(x)\leq f(x).$$

这里 $m<k$, m 充分大. 因为这里是在做逐点收敛, 因此这样论证就够了. □

Problem 4.12 2025-8

是否存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得其不连续点是: (1) 有理数集 $\mathbb{Q}$. (2) 无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 证明结论或举反例。

Proof. (1) 存在. 取 Riemann 函数 (数学分析 A1 里有):

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ \gcd(p,q)=1,\ q>0.\end{cases}$$

它在每个无理点连续, 在每个有理点不连续. 故其不连续点集恰为 $\mathbb{Q}$.

(2) 不存在. 首先要指出, 连续函数的连续点集是一个 G_δ 集, 因为连续点集能写成

$$\bigcap_k\{\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}.$$

这里要说明 $\{\omega_f(x)<\frac{1}{k}\}$ 是开集 (用连续的定义就行), 这在 25 年改卷中占 4 分. 接着要说明 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集, 用反证法, 此时无理数是 F_σ 集, 因为有理数的稠密性, 这里的闭集都是无处稠密的. 再并上可数的有理点, 就得到 $\mathbb{R}$ 是无处稠密集的并, 与 Baire 纲矛盾. □

Problem 4.13 2025-9

设 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一列可测函数, 且存在 $g\in L^1(\mathbb{R})$ 使得对任意 n 都有

$$|f_n(x)|\le g(x)\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

现假设 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛到 f. 证明:

$$(1)\ f_n,f\in L^1(\mathbb{R}).\qquad (2)\ \|f_n-f\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0.$$

Proof. (1) 对每个 n, 由

$$|f_n|\le g\in L^1$$

立刻得到 $f_n\in L^1$.

再证 $f\in L^1$. 因为 $f_n\to f$ 依测度, 可取子列 f_{n_k} 使得

$$f_{n_k}\to f\quad \text{a.e.}$$

由

$$|f_{n_k}|\le g\quad \text{a.e.}$$

取极限得

$$|f|\le g\quad \text{a.e.}$$

故 $f\in L^1(\mathbb{R})$.

(2) 首先注意到任意子列 $\{f_{n_k}\}$. 由依测度收敛, 可再取子子列 $\{f_{n_{k_j}}\}$ 使得

$$f_{n_{k_j}}\to f\quad \text{a.e.}$$

并且

$$|f_{n_{k_j}}-f|\le|f_{n_{k_j}}|+|f|\le 2g\in L^1.$$

由控制收敛定理,

$$\|f_{n_{k_j}}-f\|_{L^1}\to 0.$$

若原序列不满足

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0,$$

则存在 $\varepsilon > 0$ 和子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^1} \geq \varepsilon, \qquad \forall k.$$

但上面已证明该子列有一个子子列在 L^1 中收敛到 f, 矛盾.

因此

$$\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0.$$

$\square$

Remark. 这个题就是上次习题课所讲的子列方法, 实际上做起来是平凡的. 小故事是, 去年小测了这个题, 考试考的也是这个题, 周民强书上有这个题, 但是证法不是这个, 只留下一句 “下述证法虽繁, 但习之也不无益处” 的抽象注记 (见书 P157). 最后这题得分率似乎很低, 感觉很有喜剧色彩.

有同学问到能不能使用截断的方法来做, 事实上对积分区域截断后, 还是要估计 $\int_{B_R} |f_n - f| \, \mathrm{d}x$ 这个东西, 这里还是需要一个依测度 Fatou 之类的工具去做, 而这个的证明应该是类似与3.22的, 也就是说还是子列方法.

4.3 2024mid

Problem 4.14 2024-1

叙述 $[a,b]$ 中 Lebesgue 可测函数的定义, 并解释为何在 Lebesgue 积分论中必须引入可测函数的概念。

Proof. 定义: 函数 $f:[a,b]\to[-\infty,+\infty]$ 称为 Lebesgue 可测, 如果对任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$\{x\in[a,b]:f(x)>t\}$$

是 Lebesgue 可测集. 等价地, 对任意开集 $U\subset\mathbb{R}$, 原像

$$f^{-1}(U)$$

都是可测集.

评分标准的意思是, 你应该准确指出考虑的 σ-代数 (值域上考虑 Borel σ-代数, 定义域考虑 Lebesgue σ-代数), 不应该笼统或者错误地说考虑什么可测集.

言之有理即可, 比如说, 积分是通过简单函数逼近构造的, 必须有可测函数的定义才能让积分良定. □

Problem 4.15 2024-2

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 是单调增加的连续函数, 而且既是单射又是满射, 则 $[a,b]$ 中任意 Lebesgue 可测子集在 f 映照下的原像必是 Lebesgue 可测集。

Proof. 该说法错误.

下面给出反例. 设 F 为标准 Cantor 函数, 定义

$$T(x)=\frac{x+F(x)}{2},\qquad x\in[0,1].$$

则 T 是严格递增连续双射, 从而是 $[0,1]$ 上的单调增加连续同胚. 记

$$h:=T^{-1}.$$

由 Cantor 函数的标准性质, $T(C)$ 具有正测度, 其中 C 为标准 Cantor 集. 取一个不可测集

$$A\subset T(C).$$

令

$$E:=h(A)=T^{-1}(A).$$

因为 $E\subset C$ 且 C 零测, 所以 E 是 Lebesgue 可测集.

但是

$$h^{-1}(E)=A,$$

而 A 不可测. 因此, 即便 h 是单调增加连续双射, 也存在可测集 E 使得其原像 $h^{-1}(E)$ 不可测.

故原命题为假. □

Remark. 这里证明 $T(C)$ 是正测度集的方法见**??**, 写答案的时候顺序有点小问题.

Problem 4.16 2024-3

假设 $k \in \mathbb{N}$, $a_1^k, \dots, a_n^k, b_k \in \mathbb{R}$, 且

$$(a_1^k)^2 + \cdots + (a_n^k)^2 = 1.$$

定义

$$E_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1^k x_1 + \cdots + a_n^k x_n = b_k\}.$$

证明

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

Proof. 每个 E_k 都是一个仿射超平面. 因为

$$(a_1^k, \dots, a_n^k) \neq 0,$$

所以 E_k 是真超平面, 特别地其 n 维 Lebesgue 测度为 0.

由次可加性, 可数并仍为零测, 故

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0.$$

而

$$m(\mathbb{R}^n) = +\infty.$$

因此

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \neq \mathbb{R}^n.$$

当然也可以用 Baire 纲定理证明, 但要记清楚条件. 超平面是无处稠密集 (他是闭的, 而且余一维, 不可能有内点), 然后 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间, 用 Baire 纲就结束了. □

Problem 4.17 2024-4

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

由 Lebesgue 可积函数的定义出发, 证明该函数在 $\mathbb{R}$ 上不是 Lebesgue 可积函数。

Proof. 首先注意审题, 从定义出发就是要你写出定义. 25 年的第一题第二题也是这个道理.

Lebesgue 非负可测函数的积分定义为

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi\,dx : 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \text{ 为简单可测函数}\right\}.$$

可积是指上述为有限值. Lebesgue 可积函数定义为 $f = f^+ - f^-$, f^+, f^- 都可积.

对每个 $n \in \mathbb{N}$, 定义简单函数

$$\varphi_n(x) = n^2 \chi_{(0,1/n)}(x).$$

显然 $0 \le \varphi_n \le f$, 因为当 $x \in (0, 1/n)$ 时,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ge n^2.$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,dx = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx \geq n, \qquad \forall n.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dx = +\infty.$$

所以 f 不是 Lebesgue 可积函数. $\square$

Problem 4.18 2024-5

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是非负有界可测函数, 证明

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \inf_{f\leq\psi}\int_{[a,b]}\psi(x)\,dx,$$

其中 $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ 取遍非负简单可测函数。

Proof. 这个题是要反向定义积分, 有界性保证了这个题是对的, 所以肯定会用到这个条件.

一方面, 若 ψ 是非负简单可测函数且 $f\leq\psi$, 则由积分的单调性,

$$\int f \leq \int \psi.$$

因此

$$\int f \leq \inf_{f\leq\psi}\int\psi.$$

另一方面, 由于 f 非负有界可测, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$\psi_n(x) = 2^{-n}\left\lceil 2^n f(x)\right\rceil.$$

则 ψ_n 是非负简单可测函数, 满足

$$f(x)\leq\psi_n(x)\leq f(x)+2^{-n}.$$

故

$$0\leq\int\psi_n-\int f\leq 2^{-n}(b-a)\to 0.$$

从而

$$\inf_{f\leq\psi}\int\psi\leq\int\psi_n\to\int f.$$

结合前面的反向不等式, 得

$$\int f = \inf_{f\leq\psi}\int\psi.$$

$\square$

Problem 4.19 2024-6

考虑函数列

$$\{f_{1,1},f_{2,1},f_{2,2},\ldots,f_{n,1},f_{n,2},\ldots,f_{n,n},\ldots\},$$

其中

$$f_{n,j}(x) = \chi_{[(j-1)/n,\ j/n)}(x), \qquad j=1,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N}.$$

说明该函数列是否在下列意义下收敛: 以测度收敛, 逐点收敛, 几乎处处收敛, 几乎一致收敛, 以及 L^1 收敛。

Proof. 这个题给出的序列是上次习题课所讲的打字机序列.

(1) 支集缩小, 当然依测度收敛到 0.

(2) 每次都是有限时间依次遍历 $[0,1)$, 每一点都不是逐点收敛.

(3) 不几乎处处收敛, 见 (2).

(4) 不几乎一致收敛, 不然有几乎处处收敛.

(5) 在 L^1 中收敛到 0. 若 $u_k = f_{n,j}$, 则

$$\|u_k\|_{L^1} = \int_0^1 f_{n,j}(x)\,dx = \frac{1}{n} \to 0.$$

故 $u_k \to 0$ 在 L^1 中成立. □

Problem 4.20 2024-7

判断下列说法是否正确, 证明或举反例:

假设 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集合, 而且 E 是闭集, $m(E) = 1$, 则 E 必有内点。

Proof. 该说法错误.

考虑 Cantor-like set. 它是闭集, 没有内点, 同时其可以构造成任意给定的正测度, 特别可构造成

$$m(E) = 1.$$

于是 E 闭且 $m(E) = 1$, 但 $\operatorname{int}(E) = \varnothing$. □

Problem 4.21 2024-8

假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有限测度可测集. 函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = \int_E \chi_{x+E}(y)\,dy.$$

证明 f 在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处连续。

Proof. 这题就是上次习题课所讲的平移连续性 (当然你用的时候应该证明, 上次习题课的证明其实非常简单3.20).

当然也可以不用平移连续性来写, 首先重写 $f(x)$ 如下. 用内正则性, 考虑紧集 $K \subset E$ 并且 $m(E \setminus K) < \epsilon$.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\chi_{x+E}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y)\chi_E(y-x)\,dy.$$

于是

$$f(0) = \int \chi_E(y)^2\,dy = m(E).$$

并且

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(0)| = \left|\int \chi_E(y)\big(\chi_E(y-x) - \chi_E(y)\big)\,\mathrm{d}y\right| &\le \int |\chi_E(y-x) - \chi_E(y)|\,\mathrm{d}y \\
&= \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)|\,\mathrm{d}y + \int |\chi_K(y-x)|\,\mathrm{d}y + \int |\chi_K(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\le 2\epsilon + \int |\chi_K(y-x) - \chi_K(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

当 $|x| < \delta$, 我们有控制函数

$$|\chi_K(y-x) - \chi_K(y)| \le 2|\chi_{K+B(0,\delta)}(y)|.$$

因为 K 紧, 右端显然可积. 用控制收敛就有

$$\limsup_{x\to 0} |f(x) - f(0)| \le 2\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性就证明了连续性. □

Problem 4.22 2024-9

假设 $g:[0,1]\to[0,1]$ 是 Lebesgue 可测函数, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 并且 $f(0)\le f(1)$. 证明下列极限存在且属于区间 $[f(0),f(1)]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\big((g(x))^n\big)\,dx.$$

Proof. 因为 $0\le g(x)\le 1$, 所以对每个 x,

$$(g(x))^n\to\begin{cases}0, & g(x)<1,\\ 1, & g(x)=1.\end{cases}$$

故

$$f((g(x))^n)\to\begin{cases}f(0), & g(x)<1,\\ f(1), & g(x)=1.\end{cases}$$

记

$$A:=\{x\in[0,1]:g(x)=1\}.$$

则点态极限为

$$h(x)=f(0)\chi_{[0,1]\setminus A}(x)+f(1)\chi_A(x).$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, 故有界, 从而

$$|f((g(x))^n)|\le\max_{t\in[0,1]}|f(t)|.$$

由控制收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f((g(x))^n)\,dx=\int_0^1 h(x)\,dx=f(0)(1-m(A))+f(1)m(A).$$

因为 $0\le m(A)\le 1$, 该值是 $f(0)$ 与 $f(1)$ 的凸组合, 所以属于区间 $[f(0),f(1)]$. □

Problem 4.23 2024-10

设 $\alpha>0$. 函数 $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$G(x)=\int_0^\infty e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\,dt.$$

证明: G 良好定义, 且 $G\in C^\infty(0,+\infty)$.

Proof. 先证良好定义. 固定 $x>0$.

当 $t\to\infty$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\le e^{-xt}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha}),$$

右边可积.

当 $t\to0^+$ 时,

$$e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\le e^{-x/t}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha}),$$

而 $e^{-x/t}$ 比任意幂都衰减得更快, 故在 0 附近也可积. 所以 $G(x)$ 良好定义.

下面证可无限次求导. 固定紧区间

$$K=[a,b]\subset(0,\infty).$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$, 形式求导得

$$G^{(k)}(x)=(-1)^k\int_0^{\infty}(t+t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\,dt.$$

只需证明可在积分号内逐次求导. 当 $x\in K$ 时,

$$(t+t^{-1})^k e^{-x(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha})\le(t+t^{-1})^k e^{-a(t+t^{-1})}(t^{1+\alpha}+t^{1-\alpha}).$$

右边在 $(0,\infty)$ 上可积: 在 ∞ 处由 e^{-at} 控制, 在 0 处由 $e^{-a/t}$ 控制.

故由控制收敛定理, 可在积分号内任意次求导, 从而

$$G\in C^{\infty}(0,\infty).$$

□

4.4 2023mid

Problem 4.24 2023-1

具体写出 Lusin 定理与 Egorov 定理, 无需给出证明.

Proof. Lusin 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f : E \to \mathbb{R}$ 为 a.e. 有限的可测函数等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集集 $F \subset E$, 使得

$$m(E \setminus F) < \varepsilon,$$

并且 $f|_F$ 连续.

Egorov 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $m(E) < \infty$, $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ 可测, 且

$$f_n \to f \quad \text{a.e. on } E.$$

等价于对任意 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $A \subset E$, 使得

$$m(E \setminus A) < \varepsilon,$$

并且 $f_n \to f$ 在 A 上一致收敛. □

Remark. 这两个定理的表述应该不唯一, 如果考到类似的题, 写出非平凡一侧就行了 (Littlewood 三原理中的方向). Lusin 定理可以写有限测度的版本, 感觉那个更常见, 当然结论中的闭集变成了紧集.

Problem 4.25 2023-2

写出 Borel-Cantelli 引理并证明.

Proof. 设 E_n 可测, 且 $\sum_n m(E_n) < \infty$, 那么

$$m(\limsup_n E_n) = 0.$$

直接计算就行

$$m(\limsup_n E_n) \le m(\bigcup_{n=N} E_n) \le \sum_{n=N} m(E_n) \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

□

Problem 4.26 2023-3

利用 Borel-Cantelli 引理证明 Egorov 定理.

Proof. 设 $m(E) < \infty$, 且 $f_n \to f$ a.e. 于 E. 任取 $\varepsilon > 0$.

对每个 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$E_{n,k} := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

由于 $f_n(x) \to f(x)$ a.e., 对几乎处处的 x, 对固定 k 都只有有限多个 n 使得 $x \in E_{n,k}$. 因而

$$m\Big(\limsup_{n\to\infty} E_{n,k}\Big) = 0.$$

所以可取整数 N_k, 使得

$$m\Big(\bigcup_{n \ge N_k} E_{n,k}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令

$$A := E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N_k} E_{n,k}.$$

则

$$m(E \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

现在证在 A 上一致收敛. 任取 $\delta > 0$, 取 k 使得 $2^{-k} < \delta$. 若 $n \geq N_k$, 则由 A 的定义知

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-k} < \delta, \qquad \forall x \in A.$$

故 $f_n \to f$ 在 A 上一致收敛. 这就是 Egorov 定理. □

Remark. 其实我没感觉到哪里用了 B-C 引理, 可能在几乎处处收敛的等价刻画中用到了, 没啥感觉.

Problem 4.27 2023-4

设 $\{f_n\}$ 是闭集 $F \subset \mathbb{R}$ 上的连续函数列. 证明 $\{f_n\}$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

Proof. 这是作业原题. 收敛点集可写成

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m,n \geq N} \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

对固定的 k, m, n, 集合

$$A_{k,m,n} := \left\{ x \in F : |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

是闭集, 因为 $f_m - f_n$ 在闭集 F 上连续.

所以

$$\bigcap_{m,n \geq N} A_{k,m,n}$$

仍是闭集, 再对 N 作可数并得到 F_σ 集, 最后对 k 作可数交, 得到 $F_{\sigma\delta}$ 集.

故收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$. □

Problem 4.28 2023-5

K 是课上构造的不可测集. 证明 K 的任意可测子集均是零测集.

Proof. 设 $A \subset K$ 可测. 若 $m(A) > 0$, 则由 Steinhaus 定理,

$$A - A$$

包含 0 的某个开邻域. 特别地, $A - A$ 包含某个非零有理数 q.

于是存在 $x, y \in A$ 使得

$$x - y = q \in \mathbb{Q}.$$

但 $A \subset K$, 而 K 是模 $\mathbb{Q}$ 的代表元集合, 故同一等价类中只能取一个点. 于是必有 $x = y$, 从而 $q = 0$, 矛盾.

所以 $m(A) = 0$. □

Remark. 这个是往年习题课讲过的题目. ~~但是 Steinhaus 定理我没怎么用过, 所以也就没讲.~~

Problem 4.29 2023-6

举例说明依测度收敛不一定几乎处处收敛.

Proof. 考虑打字机序列,

$$f_{n,k}(x) = \chi_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(x).$$

写太多次就不写了. □

Problem 4.30 2023-7

写出 Cantor 函数的具体表达式, 并利用 Cantor 函数构造 $[0,1]$ 上的一个同胚, 使得某个可测集的原像不是可测集.

Proof.

$$f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\right) \xlongequal{x_n=0,2} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}.$$

现在定义

$$T(x) := \frac{x+F(x)}{2}, \qquad x \in [0,1].$$

之前说过了这个是一个同胚, 并且 $m(T(C)) = \frac{1}{2}$. 这时因为 $m(T([0,1]\setminus C)) = \frac{1}{2}$(非 C 上的点关于 F 局部常值, 然后被线性部分压缩). 令 $h := T^{-1}$, 取 $N \subset T(C)$ 不可测, 那么 $E = h(N)$ 零测, 但是 $h^{-1}(E) = N$ 不可测. □

Problem 4.31 2023-8

证明单调函数是可测函数.

Proof. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单调不减. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, 集合

$$E_a := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$$

必是一个开区间, 闭区间, 半开区间, 空集或全体 $\mathbb{R}$ 中的一种, 总之它是 Borel 集. □

Problem 4.32 2023-9

函数列 $\{f_i\}$ 依测度 Cauchy, 证明它依测度收敛.

Proof. 原来的证明有点小问题, 现在是修改版. 首先按照依测度 Cauchy 的定义, 能取出子列 $\{f_{n_k}\}$, 满足

$$m(\underbrace{|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|>2^{-k}}_{E_k}) < 2^{-k}.$$

这个子列的选取你可能需要思考一下, 不是完全随意的选法.

由 Borel-Cantelli 引理, 有

$$m(\limsup_k E_k) = 0.$$

然后当 $x \notin \limsup_k E_k$, 就能得到逐点收敛了, 因为这里有逐点的 Cauchy 列. 因此得到子列的几乎处处收敛的极限函数 f. 然后用测度的三角不等式,

$$\lim_n m(|f_n - f| > \epsilon) \le \lim_n \lim_k \left(m(|f_n - f_{n_k}| > \epsilon/2) + m(|f_{n_k} - f| > \epsilon/2)\right) = 0.$$

就完成了证明. □

Problem 4.33 2023-10

证明 $\mathbb{R}$ 上可测函数构成的集合的势为 $2^{\mathfrak{c}}$.

Proof. 先证下界. 取标准 Cantor 集 C. 因为 $m(C)=0$, 所以 C 的任意子集都 Lebesgue 可测. 而 C 的子集个数为

$$|\mathcal{P}(C)|=2^{\mathfrak{c}}.$$

每个可测集 E 给出一个可测特征函数 χ_E, 故可测函数总数至少为 $2^{\mathfrak{c}}$.

再证上界. 比较简单的说明方式是直接计算 $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|$. 具体是

$$\left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\aleph_0\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}.$$

$\square$

4.5 2022mid

Problem 4.34 2022-1

设 A, B 是两个集合. 若 $|A| \le |B|$ 且 $|B| \le |A|$, 证明 $|A| = |B|$.

Proof. Cantor-Bernstein 定理, ~~感觉还是没必要想它.~~ 想看解答的自己看 PPT, 这个我讲不明白. □

Problem 4.35 2022-2

Lebesgue 零测集是否一定是 Borel 集. 说明理由.

Proof. 不一定.

设 C 为标准 Cantor 集. 则 $m(C) = 0$, 因而 C 的任意子集都是 Lebesgue 可测且零测. 但是 C 的子集总数为

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

另一方面, $\mathbb{R}$ 中 Borel 集的总数只有 $\mathfrak{c}$. 因此不可能 C 的每个子集都是 Borel 集. 于是存在零测集不是 Borel 集.

这个题也有别的论证办法, 就是之前 Cantor 函数同胚那个题, 那里把不可测集打到了零测集, 这个零测集一定不是 Borel 集, 不然拉回后还是可测的. □

Problem 4.36 2022-3

假设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$, 证明

$$\limsup_{k\to\infty} \chi_{E_k}(x) = \chi_{\limsup_{k\to\infty} E_k}(x).$$

Proof.

$$\limsup_{k} \chi_{E_k}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{E_k\} \text{ i.o.} \Leftrightarrow x \in \limsup_{k} E_k \Leftrightarrow \chi_{\limsup_k E_k}(x) = 1.$$

□

Problem 4.37 2022-4

设 C 是标准 Cantor 集. 函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 定义如下: 当 $x \in C$ 时, $f(x) = 0$; 当 x 落在第 n 次去掉的长为 3^{-n} 的区间时, $f(x) = 1/n$. 利用特征函数的加法, 乘法, 极限运算表示函数 f, 并说明 f 是否可测.

Proof. 记 D_n 为 Cantor 构造中第 n 次删去的区间之并. 则 D_n 是有限个开区间的并, 从而是 Borel 集. 且这些 D_n 两两不交, 并满足

$$[0,1] = C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x).$$

因为每个 χ_{D_n} 可测, 有限和可测, 极限也可测, 故 f 可测.

更具体地, 令

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \chi_{D_n}(x),$$

则 f_N 可测且

$$f_N(x) \to f(x).$$

故 f 可测. □

Problem 4.38 2022-5

构造一个 Lebesgue 不可测集, 并证明它不可测.

Proof. 进行一个背诵 (无慈悲). 取 $[0,1]$ 上关于等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

的一个代表元集合 V.

若 V 可测, 对每个有理数 $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, 令

$$V_q = (V+q).$$

则不同的 q 对应的 V_q 两两不交, 且

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (V+q) \subset [-1,2].$$

由平移不变性, 若 V 可测, 则每个 $V+q$ 可测且测度与 V 相同.

若 $m(V)=0$, 则可数并仍为零测, 不可能覆盖 $[0,1]$. 若 $m(V)>0$, 则

$$\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} m(V_q) = +\infty,$$

而这些集合都包含在有限测度集 $[-1,2]$ 中, 矛盾.

故 V 不可测. □

Problem 4.39 2022-6

设 $A \subset \mathbb{R}$, $0<\alpha<1$. 若对任意开区间 (a,b), 均存在开区间列 I_n, 使得

$$A \cap (a,b) \subset \bigcup_n I_n, \qquad \sum_n m(I_n) < \alpha(b-a).$$

求证 $m(A)=0$.

Proof. 反设 $m^*(A)>0$, 且不妨设 $m^*(A)<\infty$. 由外正则性 (有同学上课问到这个, 其实可以想想外测度的定义, 这个是送给你的 (Jinbang Yang.gif)), 对任意 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G \supset A$, 使得

$$m(G) < m^*(A) + \varepsilon.$$

把 G 写成互不相交开区间之并

$$G = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

对每个 (a_j,b_j), 由题设, 存在开区间列 $\{I_{j,k}\}_{k\ge1}$ 使得

$$A \cap (a_j,b_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{j,k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{j,k}) < \alpha(b_j - a_j).$$

于是

$$A \subset \bigcup_{j,k} I_{j,k},$$

从而

$$m^*(A) \le \sum_{j,k} m(I_{j,k}) < \alpha \sum_j (b_j - a_j) = \alpha m(G) < \alpha(m^*(A)+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得
$$m^*(A) \le \alpha m^*(A).$$
因 $0 < \alpha < 1$, 只能有 $m(A) = 0$, 矛盾.

□

Problem 4.40 2022-7

设 $\{\varphi_k\}$ 是全体有理系数多项式列, $\varphi_0 = 0$, $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. 证明: 对 $[a,b]$ 上的可测函数 f, 存在加括号的方法使得
$$f = (f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots \quad \text{a.e.}$$

Proof. 由作业题4.4可知, 任意可测函数 f 都可以用一列有理系数多项式 φ_{n_j} 在 a.e. 意义下逼近, 即存在严格递增整数列 n_j, 使得
$$\varphi_{n_j}(x) \to f(x) \quad \text{a.e.}$$
现在按这些指标加括号:
$$(f_1 + \cdots + f_{n_1}) + (f_{n_1+1} + \cdots + f_{n_2}) + \cdots.$$
由于 $f_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, 每一块都抵消了:
$$f_{n_{j-1}+1} + \cdots + f_{n_j} = \varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}.$$
于是前 N 块的和为
$$\sum_{j=1}^{N} (\varphi_{n_j} - \varphi_{n_{j-1}}) = \varphi_{n_N}.$$
令 $N \to \infty$, 得
$$\varphi_{n_N}(x) \to f(x) \quad \text{a.e.}$$
所以上述加括号后的级数 a.e. 收敛到 f. □

Problem 4.41 2022-8

令 f 是 $[0,1]$ 上的光滑非线性函数, $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$. 证明
$$m(\Gamma + \Gamma) > 0.$$
其中
$$\Gamma + \Gamma := \{u + v : u, v \in \Gamma\}.$$

Proof. 定义
$$F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(s,t) = (s + t,\ f(s) + f(t)).$$
则
$$F([0,1]^2) = \Gamma + \Gamma.$$
其 Jacobian 矩阵为
$$DF(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(s) & f'(t) \end{pmatrix},$$
故
$$\det DF(s,t) = f'(t) - f'(s).$$

因为 f 非线性, 所以 f' 不是常数. 因而存在 s_0, t_0 使得

$$f'(t_0) \neq f'(s_0),$$

即

$$\det DF(s_0, t_0) \neq 0.$$

由反函数定理, 存在 (s_0, t_0) 的邻域 U, 使得 $F(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 特别地,

$$F(U) \subset \Gamma + \Gamma$$

且 $F(U)$ 非空开, 因而其 Lebesgue 测度正:

$$m(\Gamma + \Gamma) \geq m(F(U)) > 0.$$

□

Remark. 这个为什么是实分析考题呢?

Problem 4.42 2022-9

设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$

且在一个正测集上有界. 证明 f 是线性函数.

Proof. 这个是 PPT 原题. 如果学过泛函, 应该可以意识到这里就是要做原点连续性, 那就是去蹭 Steinhaus 定理.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, $m(E) > 0$, 且存在 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in E.$$

由 Steinhaus 定理, $E - E$ 含有 0 的某个邻域 $(-\delta, \delta)$.

任取 $h \in (-\delta, \delta)$, 可写成 $h = x - y$, 其中 $x, y \in E$. 故

$$|f(h)| = |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq f(y)| \leq 2M.$$

所以 f 在 0 的某个邻域内有界.

下面证连续性. 任取 $\varepsilon > 0$, 选 n 大使得 $2M/n < \varepsilon$. 若 $|x| < \delta/n$, 则 $|nx| < \delta$, 从而

$$|f(x)| = \frac{1}{n}|f(nx)| \leq \frac{2M}{n} < \varepsilon.$$

故 f 在 0 连续, 从而由可加性知 f 在每点连续.

连续可加函数必为线性函数. 令 $c = f(1)$, 则对有理数 q 有

$$f(q) = cq.$$

由连续性推广到全体实数, 得

$$f(x) = cx, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

□

Problem 4.43 2022-10

证明局部 Lipschitz 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 将零测集映成零测集.

Proof. 去年习题课讲过这个题, 往年题有所以之前没讲. 思路其实很清楚, 局部性可以紧化, 然后 Lipschitz 相当于容许线性拉伸, 但是零测集就是小方体覆盖, 小方体拉伸还是小的.

设 $N \subset \mathbb{R}$ 是零测集. 对每个整数 m, 在紧区间

$$K_m = [m, m+1]$$

上, f 是 Lipschitz 的, 设 Lipschitz 常数为 L_m.

令

$$N_m := N \cap K_m.$$

因为 N_m 零测, 对任意 $\varepsilon > 0$, 可取开区间列 $\{I_{m,j}\}_{j\geq 1}$ 覆盖 N_m, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}(1+L_m)}.$$

由于 f 在 K_m 上是 L_m-Lipschitz, 每个 $f(I_{m,j} \cap K_m)$ 的长度至多为 $L_m|I_{m,j}|$(用直径的定义想想, 高维就是用直径来处理的). 因而

$$m(f(N_m)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(f(I_{m,j} \cap K_m)) \leq L_m \sum_{j=1}^{\infty} |I_{m,j}| < \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}}.$$

于是

$$m(f(N)) \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} m(f(N_m)) < \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|m|+1}} \leq 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 任意, 得 $m(f(N)) = 0$. □

4.6 2021mid

Problem 4.44 2021-1

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集的定义.

Proof. (同 25mid14.5)

设 m^* 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为 Lebesgue 可测集, 如果对任意 $A \subset \mathbb{R}^n$, 都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

这就是 Carathéodory 可测性判据.

等价地, E 可测当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得

$$m^*(G \setminus E) < \varepsilon.$$

再等价地, 任一 Lebesgue 可测集都可写成

$$E = B \cup N,$$

其中 B 是 Borel 集, N 是零测集的子集. 因而所有 Borel 集都 Lebesgue 可测, 且 Lebesgue 可测集族是 Borel σ-代数的完备化. □

Problem 4.45 2021-2

叙述 $\mathbb{R}^n$ 中的 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理, 并用 Fatou 引理证明 Lebesgue 控制收敛定理.

Proof. 上次习题课讲过了. 注意有一侧不能直接用 Fatou 引理, 都应该用比较函数来做.

Fatou 引理: 若 $f_n \geq 0$ 可测, 则

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, dx.$$

Lebesgue 控制收敛定理: 若 $f_n \to f$ a.e., 且存在可积函数 g 使得

$$|f_n| \leq g \quad \text{a.e. for all } n,$$

则 f 可积, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n \, dx = \int f \, dx.$$

下面用 Fatou 引理证明控制收敛定理.

由 $|f_n| \leq g$ 和 $f_n \to f$ a.e., 得 $|f| \leq g$ a.e., 因而 f 可积.

对非负函数列 $g + f_n$, 由 Fatou 引理得

$$\int \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g + f_n).$$

因为 $\liminf(g + f_n) = g + f$, 所以

$$\int g + \int f \leq \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

即

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

再对非负函数列 $g-f_n$ 用 Fatou 引理,

$$\int \liminf_{n\to\infty}(g-f_n) \le \liminf_{n\to\infty}\int (g-f_n).$$

由于 $\liminf(g-f_n)=g-f$, 得

$$\int g - \int f \le \int g - \limsup_{n\to\infty}\int f_n,$$

即

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n \le \int f.$$

合并两式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

最后, 由 $|f_n-f|\to 0$ a.e. 且 $|f_n-f|\le 2g$, 再对 $|f_n-f|$ 应用上面已经证明的积分收敛结论, 得

$$\int |f_n-f|\,dx \to 0.$$

证毕. □

Problem 4.46 2021-3

设 $E\subset\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测的, 且 $m(E)<\infty$. 记 $L(E,\mathbb{R})$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数模去 a.e. 相等得到的等价类. 对任意 $f,g\in L(E,\mathbb{R})$, 定义

$$d(f,g)=\int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,dx.$$

证明: $f_n,f\in L(E,\mathbb{R})$, 则 f_n 依测度收敛到 f 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0.$$

Proof. 记

$$\phi(t)=\frac{t}{1+t},\qquad t\ge 0.$$

则 ϕ 单调增加, 且 $0\le\phi(t)\le 1$. 此时我们有 $\{|f_n-f|>\epsilon\}=\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\}$.

先证必要性, 其实是拆积分.

$$\begin{aligned} d(f_n,f)=\int_E \phi(|f_n-f|) &= \int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)+\int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)\le\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)\\ &\le m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)>\phi(\epsilon)\})+m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)\le\phi(\epsilon)\})\phi(\epsilon)\\ &\le m(E\cap\{|f_n-f|>\epsilon\})+m(E)\phi(\epsilon). \end{aligned}$$

再证充分性, 其实是直接放缩.

$$d(f_n,f)=\int_E\phi(|f_n-f|)\ge\int_{E\cap\{\phi(|f_n-f|)\ge\phi(\epsilon)\}}\phi(|f_n-f|)\ge\frac{\epsilon}{1+\epsilon}m(E\cap\{\phi(|f_n-f|)\ge\phi(\epsilon)\}).$$

□

Problem 4.47 2021-4

f 为 $(0,1)$ 上可积的实值函数, 且满足 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=A\in\mathbb{R}$. 证明:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)x^n\,dx=0,\qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n\,dx=A.$$

Proof. (a) 因为对 $x \in (0,1)$, 有 $x^n \to 0$, 且

$$|f(x)x^n| \le |f(x)| \in L^1(0,1),$$

由控制收敛定理,

$$\int_0^1 f(x)x^n\,dx \to 0.$$

(b) 写成

$$n\int_0^1 f(x)x^n\,dx = n\int_0^1 (f(x)-A)x^n\,dx + A\,n\int_0^1 x^n\,dx.$$

而

$$A\,n\int_0^1 x^n\,dx = A\frac{n}{n+1} \to A.$$

故只需证

$$n\int_0^1 (f(x)-A)x^n\,dx \to 0.$$

任取 $\varepsilon > 0$. 由 $f(x) \to A$ 当 $x \to 1^-$, 存在 $\delta \in (0,1)$, 使得当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

于是

$$n\left|\int_0^1 (f-A)x^n\,dx\right| \le n\int_0^{1-\delta} |f-A|x^n\,dx + n\int_{1-\delta}^1 |f-A|x^n\,dx.$$

对第一项, 因为 $x^n \le (1-\delta)^n$,

$$n\int_0^{1-\delta} |f-A|x^n\,dx \le n(1-\delta)^n\int_0^{1-\delta} |f-A|\,dx \to 0.$$

对第二项,

$$n\int_{1-\delta}^1 |f-A|x^n\,dx \le \varepsilon\,n\int_{1-\delta}^1 x^n\,dx \le \varepsilon\,n\int_0^1 x^n\,dx = \varepsilon\frac{n}{n+1} \le \varepsilon.$$

先令 $n \to \infty$, 再令 $\varepsilon \to 0$, 得所求.

故

$$n\int_0^1 f(x)x^n\,dx \to A.$$

□

Problem 4.48 2021-5

用换元 $x = \alpha t$ 计算

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}}.$$

Proof. 令 $x = \alpha t$, 则

$$I_\alpha := \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}} = \int_0^1 \frac{\alpha\,dt}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos\alpha}}.$$

对固定 $t \in [0,1)$, 用 $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, 得

$$\cos(\alpha t) - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2}(1-t^2) + o(\alpha^2).$$

故

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t) - \cos\alpha}} \to \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

下面给出一个可积控制. 注意

$$\cos(\alpha t)-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha(1+t)}{2}\sin\frac{\alpha(1-t)}{2}.$$

当 α 充分小时, 两个正弦的自变量都落在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 由 $\sin u\geq\frac{2}{\pi}u$, 得

$$\cos(\alpha t)-\cos\alpha\geq 2\cdot\frac{\alpha(1+t)}{\pi}\cdot\frac{\alpha(1-t)}{\pi}=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}(1-t^2).$$

因此

$$0\leq\frac{\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha t)-\cos\alpha}}\leq\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

而 $(1-t^2)^{-1/2}$ 在 $(0,1)$ 上可积, 故由控制收敛定理,

$$\lim_{\alpha\to 0^+}I_\alpha=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

Problem 4.49 2021-6

记 $\mathbb{Q}=\{r_n\}$ 为所有有理数. 定义 $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^k|x-r_k|}, & x\notin\mathbb{Q},\\ +\infty, & x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

证明

$$m(\{x\in\mathbb{R}:f(x)>1\})<\infty.$$

Proof. 感觉很像去年期末的题目, 不过去年期末好像是不等式的放缩机制和紧性论证, 和这个题不太一样. 这个题可能有点不好想, 但是不妨先想想这个级数什么时候还能被控制, 应该会想到 $\sum_{k=0}\frac{1}{2^k}=1$. 那我们可以去比较一下我们有的东西和这个级数的区别, 就得到如下做法.

设

$$E:=\{x\in\mathbb{R}:f(x)>1\}.$$

若对某个 x 有

$$|x-r_k|\geq 2^{-k},\qquad\forall k\geq 1,$$

则

$$\frac{1}{4^k|x-r_k|}\leq\frac{1}{4^k\cdot 2^{-k}}=\frac{1}{2^k}.$$

于是

$$f(x)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

所以若 $f(x)>1$, 则必存在某个 k 使得

$$|x-r_k|<2^{-k}.$$

因此

$$E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(r_k-2^{-k},\,r_k+2^{-k}\right).$$

从而

$$m(E)\leq\sum_{k=1}^{\infty}2^{1-k}=2<\infty.$$

证毕. □

Problem 4.50 2021-7

设 G 为 $\mathbb{R}$ 的加法真子群, 且 G 是 Lebesgue 可测的. 用 Steinhaus 定理证明 $m(G)=0$.

Proof. 加法群结构和之前那个线性函数的题目4.42是不是有点像, 其实做法也是类似的.

反证. 若 $m(G)>0$, 则由 Steinhaus 定理, 集合

$$G-G=\{x-y: x,y\in G\}$$

包含 0 的某个开邻域. 但因为 G 是加法子群, 有

$$G-G=G.$$

故 G 含有某个开区间 $(-\delta,\delta)$.

于是对任意 $x\in\mathbb{R}$, 取整数 n 充分大使得 $x/n\in(-\delta,\delta)\subset G$. 由子群性质,

$$x=n\cdot(x/n)\in G.$$

这说明 $G=\mathbb{R}$, 与 G 为真子群矛盾.

故只能有 $m(G)=0$. □

Remark. Steinhuas 定理是可以直接用的东西, 也感谢同学们提醒我还有 $E+E$ 形式的 Steinhaus 定理, 我已经忘光了.

习题课讲义上卷到此结束了, 同学们好好复习.