可测关于代数运算的封闭性

- 直乘积:

$$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \Longrightarrow (f, g) : E \longrightarrow \mathbb{R}^2\text{可测}$$

证: 记$F = (f, g)$, 则

$$F^{-1}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = f^{-1}([a_1, b_1)) \cap g^{-1}([a_2, b_2))\text{可测}.$$

- 加法、数乘:　$f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测 $\Longrightarrow f+g, \quad \lambda f \quad f\cdot g$可测.

证:　令

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad F = (f, g)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x,y) = x + y$$

$$\Longrightarrow \qquad h \circ F(x) = f(x) + g(x) \text{ 可测.}$$

- 极限运算:

$$f_k \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \implies \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} f_k, \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} f_k \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$$

证: 令$g = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 则

$$g^{-1}(a, +\infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(a, +\infty] \implies g\text{可测}.$$

- $f, g \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \implies \max\{f, g\},\ \min\{f, g\},\ f^+, f^-,\ |f| \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}})$.

零测集的作用

- 零测集在集合论中起作完备化的作用:

  Lebesgue可测集=Borel集±零测集.

- 零测集在函数论中不影响可测性、可积性、积分值.

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLongleftrightarrow{f \overset{a.e.}{=} g} g \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}).$$

- 积分论中无法区别零测集:

  两个函数在任意集合上积分相同$\Longleftrightarrow$ 它们几乎处处相等.

- 积分论中涉及的相等是几乎处处相等.

  某性质a.e.成立$\Longleftrightarrow$除去一个零测集成立.

几乎处处收敛

- $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于a.e.收敛封闭.

证明: 设$f_k \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$, $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

$$\Longrightarrow m(Z)=0, \quad \text{其中} E\setminus Z=\{x\in E: \lim f_k(x)=f(x)\}$$

$$\Longrightarrow f_k \in \mathscr{L}(E\setminus Z,\overline{\mathbb{R}}) \qquad f_k \in \mathscr{L}(Z,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f \in \mathscr{L}(E\setminus Z,\overline{\mathbb{R}}), \qquad f \in \mathscr{L}(Z,\overline{\mathbb{R}})$$

$$\Longrightarrow f \in \mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

可测性是局部性质(作为连续性的推广)

- 可测是局部性质

$$f \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xLeftrightarrow{E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k,\ E_k\text{可测}} f|_{E_k} \in \mathscr{L}(E_k, \overline{\mathbb{R}}), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

证明: $f^{-1}(a, \infty] = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (f|_{E_k})^{-1}(a, \infty].$

不可测函数

- 绝对可测$\not\Rightarrow$ 可测

  例如: $\chi_W - \chi_{W^c}$, $\quad W$不可测.

- 可测关于不可数取上确界不再封闭.

  例如: $\chi_W = \sup_{x\in W} \chi_{\{x\}}$, $\quad W$不可测.

  (原因: 可测仅对可列并交叉封闭)

- 可测关于复合运算不封闭.

$$g^{-1} = f = \frac{1}{2}(Cantor+恒等), \quad 不可测W \subset f(C), \quad g(W) = Z零测集$$

则 $\chi_Z \circ g$ 不可测: $\qquad (\chi_Z \circ g)^{-1}(\{1\}) = g^{-1} \circ \chi_Z^{-1}(\{1\}) = W$

本节主要内容

- 可测函数结构
- 三种收敛性

(几乎处处收敛, 几乎一致收敛, 以测度收敛)

- 回顾记号: $E \subset \mathbb{R}^n$可测.

$\mathscr{L}(E)$	可测	$\overline{\mathbb{R}}$值
$\mathscr{L}^+(E)$	非负可测	$\overline{\mathbb{R}}$
$S(E)$	简单可测	$\mathbb{R}$
$S^+(E)$	非负简单可测	$\mathbb{R}$

体现对y轴分割: 与Lebesgue积分相伴而生的函数.

- 简单可测函数结构:

$$
\begin{aligned}
S(E) &= \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid \text{Range } f\text{是有限集}\} \\
&= \langle \chi_A, +, \cdot \rangle
\end{aligned}
$$

简单可测函数标准表示

- $f \in S(E)$标准表示:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x).$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Range} f &= \{a_1, \cdots, a_m\}, \\ E &= \bigsqcup_{k=1}^{m} E_k, \qquad E_k = f^{-1}(a_k). \end{aligned}$$

- 标准表示中, 在每点处, 求和项最多只有一项非零
- 非标准表示例子: $\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1/2]} + \chi_{(1/2,1]}$.

可测函数和简单函数的联系

- 如何将可测函数表达为简单函数列的极限:
  $\chi_A + (+, \cdot, \lim)$?

  答案: 简单函数的特点是值域有限. 为此需要如下手段:

  对y轴二进制分解, 精细化+逼近

  Strategy: 剖分=逼近=化整为零=极限思想=同Riemann

非负可测函数结构

- 简单可测函数结构: $\quad f \in \mathscr{L}^+(E)$

$$[0,+\infty] \xlongequal[\text{值域剖分长度}2^{-k}]{\text{y轴第k次二进制剖分}} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup [2^k,+\infty].$$

$$E = f^{-1}[0,+\infty] \xlongequal[\text{定义域剖分}]{} \bigsqcup_{j=1}^{2^{2k}} f^{-1}[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}) \bigsqcup f^{-1}[2^k,+\infty].$$

非负可测函数结构续

- 在y轴的每个二进制区间

$$\frac{j-1}{2^k} \leqslant y < \frac{j}{2^k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2^{2k})$$

  - 第0次二进制剖分:　区间长度=1
  - 第1次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2}$
  - 第2次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^2}$ etc.

- 在y轴的二进制剩余区间

$$2^k \leqslant y \leqslant \infty.$$

- 函数常值化, 取为最小值.

有效的有限区间膨胀，小区间长度收缩

非负可测函数结构续

- 简单函数列

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{j-1}{2^k}, & \text{if} \quad \dfrac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{j}{2^k} \quad (j=1,2,\dots,2^{2k})\\[2ex] 2^k, & \text{if} \quad f(x)\geqslant 2^k.\end{cases}$$

- 一致收敛的根源:

在$\{x\in E:0\leqslant f(x)<2^k\}$上:

$$0\leqslant f(x)-f_k(x)<\frac{1}{2^k}.$$

Theorem 1 (值域局部常值化产生的简单函数列)

$$f_k = \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k} \chi_{f^{-1}[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})} + 2^k \chi_{f^{-1}[2^k, +\infty]} \qquad \nearrow \qquad f$$

$$S^+(E) \qquad\qquad \mathscr{L}^+(E)$$

具体例子

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0, 1) \\ 1, & \text{if} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 1, & \text{if} \quad x \in [1, \frac{3}{2}) \\ \frac{3}{2}, & \text{if} \quad x \in [\frac{3}{2}, 2) \\ 2, & \text{if} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

- 第k次二进制剖分:　区间长度= 前一次的一半=$\frac{1}{2^k}$
- 消去半直线$[2^k, +\infty]$

函数与非负函数关系

函数的研究归结于非负函数, 非负函数研究是研究函数的桥梁.

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{2}(|f|+f) - \frac{1}{2}(|f|-f) = f^+ - f^-, \qquad f^\pm \geqslant 0 \\
f &= f^+ - f^- \qquad (\text{每点处, 求和项最多只有一项非零}) \\
|f| &= f^+ + f^-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^+ &= f\text{的正部} = \max\{f, 0\} = \text{小于零的部分零化, 其它不变} \\
f^- &= f\text{的负部} = \max\{-f, 0\} = \text{大于零的部分零化, 其它关于实轴反演}
\end{aligned}
$$

可测函数结构

- 可测函数结构定理:

$$f \in \mathscr{L}^{+}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, f_k \in S^{+}(E), \quad f_k \uparrow f$$

$$f \in \mathscr{L}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \longrightarrow f, \quad |\varphi_k| \uparrow |f|.$$

可测函数结构续

证明: 设$f \in \mathscr{L}(E)$, 则$f^{\pm} \in \mathscr{L}(E)$,

$$\exists\, u_k, v_k \in S^+(E) \implies u_k \uparrow f^+, \quad v_k \uparrow f^-$$

$$\implies \varphi_k := u_k - v_k \in S(E), \quad \varphi_k \to f$$

$$\forall x \in E \implies \text{要么} u_k = 0 \text{要么} v_k = 0$$

$$\implies |\varphi_k| = u_k + v_k \uparrow f^+ + f^- = |f|$$

可测函数结构

- 可测函数的原子分解:　　(类似于初等函数的Taylor展开)

$$\mathscr{L}(E) = \langle \chi_A, +, \cdot, \lim \rangle_{A\text{可测}}$$

- 可测函数研究的四部曲

$$\chi_A \xrightarrow[+,\cdot,\lim]{S^+,\mathscr{L}^+} \mathscr{L}(E).$$

可测函数研究的两个层次

- 可测函数: 开集的原像是可测集
- 可测函数: 原子方法 χ_A+代数运算+极限运算.

方法一	抽象	建立可测和连续的关系
方法二	具体	问题简化到原子

测度论和积分理论关系

黄河源头	黄河入海口
测度论	积分理论
集合论	函数论
特征函数	可测函数(以特征函数为积木)
σ代数	可测函数关于运算封闭
测度可列可加性	交换次序等价定理

一致收敛性

- 简单函数一致逼近“非负有界”可测函数. (记号$\mathscr{L}^\infty$=有界)

$$f \in \mathscr{L}^+(E)\cap\mathscr{L}^\infty(E) \quad\Longrightarrow\quad \exists\, f_k \in S^+(E), \quad f_k \uparrow f, \quad f_k \rightrightarrows f.$$

- “紧支撑”简单函数紧一致逼近“非负有界”可测函数

$$g_k := f_k\chi_{B(0,k)}$$

$$f \in \mathscr{L}^+(E)\cap\mathscr{L}^\infty(E) \quad\Longrightarrow\quad \exists\, g_k \in S_c^+(E), \quad g_k \uparrow f, \quad g_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

$$f \in \mathscr{L}(E)\cap\mathscr{L}^\infty(E) \quad\Longrightarrow\quad \exists\, h_k \in S_c(E), \quad |h_k| \uparrow |f|, \quad h_k \overset{\text{紧一致}}{\rightrightarrows} f.$$

- 三种收敛性

a.e.	almost everywhere	几乎处处收敛
a.un.	almost uniformly convergence	几乎一致收敛
m	measure	以测度收敛

记号:

$$[|f_n - f| \geqslant \epsilon] \xlongequal{def} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}$$

三种收敛性

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \quad m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E:$$
$$m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{on E \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k \to \infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛性的直观含义

- 几乎处处收敛是除去一个零测集的点态收敛.

- 几乎一致收敛说明挖去一个任意小测度集后一致收敛.

- 以测度收敛不是点态收敛, 它说明f_k 远离f的点集是小测度集, 但不论该集合的位置.

用不收敛点集的大小, 给出收敛准则

- 用ϵ表示远离程度

$$a, b\text{远离} \quad \Longleftrightarrow \quad |a-b| \geqslant \epsilon$$

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad m(\varlimsup_{k\to\infty} [|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} [|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

记忆方法

$a.e.$	无穷多项远离	零测集
$a.un.$	除有限项全部一致远离	小集合
m	依测度远离	小集合

续

证明: (1) 不收敛点$\Longleftrightarrow$无穷多项远离f.

$$\text{不收敛点集} = \bigcup_{\epsilon>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} [|f_k - f| \geqslant \epsilon].$$

(2a) $f_k \xrightarrow{a.un} f \Longrightarrow$ $\forall\ \theta > 0,\ \ \exists\ E_\theta : m(E_\theta) < \theta$, 使得

$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\, j \in \mathbb{N}$, 当$k \geqslant j$,

$$\sup_{x\in E\setminus E_\theta} |f_k(x) - f(x)| < \epsilon$$

$\Longrightarrow$ $\bigcup_{k=j}^{\infty} [|f_k - f| \geqslant \epsilon] \subset E_\theta$ 一致远离是小集合

$$\Longrightarrow \lim_{j\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty} [|f_k - f| \geqslant \epsilon]\Big) \leqslant \theta$$

续2

$$(2b): \quad \forall \text{ 固定} k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{j=n}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\, \theta > 0,\ \exists\, n = n(k) \in \mathbb{N}: \quad m(\bigcup_{j=n(k)}^{\infty} [|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) \leqslant \frac{\theta}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \text{令} E_\theta^c := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=n(k)}^{\infty} [|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\theta^c) < \theta$$

$$\Longrightarrow \text{在} E_\theta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=n(k)}^{\infty} [|f_i - f| < \frac{1}{2^k}] \text{上}, \qquad f_i \rightrightarrows f.$$

三种收敛的关系

- $f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longrightarrow f_k \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_k \xrightarrow{m} f.$

- $f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \xLeftrightarrow{m(E)<+\infty} f_k \xrightarrow{a.un} f.$

- $f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall$子列$, \exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f.$

Theorem 2 (Egorov定理)

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \overset{m(E)<+\infty}{\Longleftrightarrow} \quad f_k \xrightarrow{a.un} f.$$

Littlewood 三原理之一：

$[a,b]$区间上函数列收敛$\Longrightarrow$差不多一致收敛.

Riesz定理

Theorem 3 (Riesz 定理)

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \exists 子列 f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f.$$

注记1: 依测度收敛, 极限必唯一.

(几乎处处相等视为恒等, 测度无法分辨零测集)

注记2: 在有限测度集上, 在有子列a.e.收敛意义下, 三种收敛等价.

(续)，证明: $f_k \xrightarrow{m} f \Longrightarrow \forall$子列, $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} m[|f_j - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}] = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \text{对于任意子列}, \exists\ \text{子列}: m[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}] \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

$$\xrightarrow[\text{BC测度有限}]{Borel-Cantelli} \quad \lim_{s\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=s}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}]\Big) = 0$$

$$\xRightarrow{\forall\ \epsilon>0, \exists\ s_0} \quad E_\epsilon^c := \bigcup_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\epsilon}{2^k}], \qquad m(E_\epsilon^c) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_\epsilon = \bigcap_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}]$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.\ un.} f$$

续, 证明: $f_k \xrightarrow{m} f \Longleftarrow \forall$子列, $\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

证明:

$$f_k \overset{m}{\nrightarrow} f \implies \exists\ \epsilon_0 > 0, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m[|f_k - f| \geqslant \epsilon_0] = \delta_0 > 0$$

$$\implies \exists 子列\{f_{k_n}\}: \quad m[|f_{k_n} - f| \geqslant \epsilon_0] > \frac{\delta_0}{2}$$

$$\implies \{f_{k_n}\}不包含\text{a.un 收敛子列}.$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念

- 几乎处处收敛, 非依测度收敛.

$$E = (0, +\infty)$$

$$\chi_{(n,n+1)} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\chi_{(n,n+1)} \overset{m}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念续

- 依测度收敛, 非几乎处处收敛.

$$E = [0,1]$$

$$f_{kr} = \chi_{[\frac{r-1}{k},\frac{r}{k})}, \qquad r = 1,\dots k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\{g_k\} := \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \dots\}$$

$$g_k \xrightarrow{m} 0$$

$$g_k \overset{a.e.}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛v.s.依测度收敛

a.e.	几乎处处收敛	点态	零测集
m	以测度收敛	非点态	小测度集

Borel-Cantelli引理

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \Longrightarrow m(\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.un} 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\Longrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$$

注记: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$