本节主要内容

- 三种收敛性
- 以测度Cauchy
- Lusin定理　(Littlewood 三原理之一)

回顾：三种收敛性

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0,\quad \exists\text{可测}E_\epsilon \subset E: \quad m(E_\epsilon) < \epsilon, \quad f_n \overset{onE \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0,\quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad m(\varlimsup_{k\to\infty}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 除有限项外一致远离f的是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

续

证明: (1) 不收敛点$\Longleftrightarrow$无穷多项远离f.

收敛点集$=\bigcap\limits_{\epsilon>0}\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}[|f_k-f|<\epsilon]$.　不收敛点集$=\bigcup\limits_{\epsilon>0}\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]$.

(2a)　$f_k \xrightarrow{a.un} f \Longrightarrow$ $\forall\,\theta>0,\ \exists\,E_\theta: m(E_\theta)<\theta$, 使得
$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,j\in\mathbb{N}$, 当$k\geqslant j$,
$$\sup_{x\in E\setminus E_\theta}|f_k(x)-f(x)|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in E_\theta}|f_k(x)-f(x)|\geqslant\epsilon$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\subset E_\theta$$ 一致远离是小集合

$$\Longrightarrow \lim_{j\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=j}^{\infty}[|f_k-f|\geqslant\epsilon]\Big)\leqslant\theta$$

续2

$$(2b): \quad \forall \text{ 固定} k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{j=n}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) = 0$$

$$\Longrightarrow \forall\, \theta > 0,\ \exists\, n = n(k) \in \mathbb{N}: \quad m(\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]) < \frac{\theta}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \text{令} E_\theta^c := \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\theta^c) < \theta$$

$$\Longrightarrow \text{在} E_\theta = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j=n(k)}^{\infty}[|f_i - f| < \frac{1}{2^k}] \text{上}, \qquad f_i \rightrightarrows f.$$

Borel-Cantelli引理

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \Longrightarrow m(\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.un} 0$$

$$\Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\Longrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$$

注记: $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0 \Longleftrightarrow \chi_{A_n} \xrightarrow{m} 0$

Theorem 1 (Riesz 定理)

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \exists\text{子列} f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f.$$

注记1: 依测度收敛, 极限必唯一.

(几乎处处相等视为恒等, 测度无法分辨零测集)

注记2: 在有限测度集上, 在有子列a.e.收敛意义下, 三种收敛等价.

(续)，证明: $f_k \xrightarrow{m} f \Longrightarrow \forall$子列,$\exists$子列$f_{n_k} \xrightarrow{a.un} f$..

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longrightarrow \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{j\to\infty} m[|f_j - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] = 0$$

$\Longrightarrow$ 对于任意子列,$\exists$ 子列 : $m[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}] \leqslant \frac{1}{2^k}$.

$$\xrightarrow[\text{BC测度有限}]{Borel-Cantelli} \quad \lim_{s\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=s}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}]\Big) = 0$$

$$\xrightarrow{\forall\ \epsilon>0, \exists\ s_0} \quad E_\epsilon^c := \bigcup_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{1}{2^k}], \qquad m(E_\epsilon^c) < \epsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \rightrightarrows f \quad \text{in} \quad E_\epsilon = \bigcap_{k=s_0}^{\infty}[|f_{n_k} - f| < \frac{1}{2^k}]$$

$$\Longrightarrow \quad f_{n_k} \xrightarrow{a.\ un.} f$$

证明:

$$f_k \overset{m}{\nrightarrow} f \implies \exists\, \epsilon_0 > 0, \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon_0] = \delta_0 > 0$$

$$\implies \exists 子列\{f_{k_n}\}: \quad m[|f_{k_n} - f| \geqslant \epsilon_0] > \frac{\delta_0}{2}$$

$$\implies \{f_{k_n}\}不包含\text{a.un 收敛子列}.$$

依测度Cauchy

- $E \subset \mathbb{R}^n$可测. $f_k \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度Cauchy} \quad \Longleftrightarrow \quad \{f_k\}_{k=1}^{\infty}\text{依测度收敛}.$$

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

依测度Cauchy续

证明: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$依测度Cauchy, 即

$$\forall\ \epsilon > 0, \qquad \lim_{i,k\to\infty} m[|f_i - f_k| \geqslant \epsilon] = 0.$$

归纳选取子列$g_j = f_{n_j}$:

$$m[|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}] \leqslant \frac{1}{2^j}, \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

$j = 1$时, 可选取g_1, g_2, 其中g_1取定, g_2 有无穷候选.

$j = 2$时, 可选取g_2, g_3, 其中g_2取定, g_3 有无穷候选,

如此构造下去.

续

$$E_j := [|g_j - g_{j+1}| \geqslant \frac{1}{2^j}], \qquad F_k := \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

$$\xRightarrow[m(E_j)\leqslant\frac{1}{2^j}]{Borel-Cantelli} \qquad m(\lim_{k\to\infty} F_k) = \lim_{k\to\infty} m(F_k) = 0.$$

$$\forall x \in F_k^c = \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j^c = \bigcap_{j=k}^{\infty} [|g_j - g_{j+1}| < \frac{1}{2^j}]$$

$$\xRightarrow{\forall\ i>j>k} \quad |g_j(x) - g_i(x)| \leqslant \sum_{s=j}^{i-1} |g_{s+1}(x) - g_s(x)| \leqslant \frac{1}{2^{j-1}}$$

$\Longrightarrow$ 在F_k^c上, $\{g_j\}$逐点Cauchy, 几乎一致收敛

从而依测度收敛, 故$\{f_j\}$依测度收敛

- Lusin定理:

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists\text{闭集}F \subset E:$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F\ \text{连续}.$$

注记

- 当$m(E) < \infty$时, 可取闭集F为紧集K.
- 当$m(E) = \infty$时, 不可取闭集F为紧集K.

$$\text{例如} \quad E = \mathbb{R}^n, \quad m(K) < \infty.$$

- ϵ一般不能取为0. 例如推广的Cantor集合的特征函数
- 结论中的连续函数一般不能修改为多项式.

  例如$\chi_{[0,1/2]}$只取两个值, 挖去$[0,1]$的小测集合, 不可能与一个非常值多项式相同.

充分性证明: 可测性是局部性质:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \sqcup Z, \qquad f|_{F_n} \text{ 连续}$$

$$m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \qquad \text{闭} F_n \subset E, \qquad m(Z) = 0$$

必要性证明: 分四种情况.

(1) $f=\chi_A$:

由测度的正则性, 可取闭集$F_1\subset A$, $F_2\subset A^c$满足:

$$m(A\setminus F_1)<\epsilon/2, \qquad m(A^c\setminus F_2)<\epsilon/2,$$

$\chi_A|_{F_1\bigsqcup F_2}$ 连续 (利用连续的定义证明).

(2) f简单:

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{E_j}, \quad E_j = f^{-1}(c_j), \quad c_j\text{互不相同}.$$

取闭集$F_j \subset E_j$, $\quad m(E_j \setminus F_j) < \frac{\epsilon}{2^j}$, $\quad f|_{F_j}$ 连续.

闭集$F = \bigsqcup_j F_j$, $\quad m(E \setminus F) < \epsilon$, $\quad f|_F$ 连续.

续

(3)　f有界:

$$\exists \varphi_k \in S(E), \quad \varphi_k \rightrightarrows f.$$

$$\Longrightarrow \quad \exists 闭集 F_k \subset E: \quad \varphi_k|_{F_k} 连续, \quad m(F_k^c) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

$$\Longrightarrow \quad F := \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, \quad m(F^c) < \epsilon, \quad \varphi_k|_F \rightrightarrows f|_F 连续.$$

(4)　f无界:

$$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\Longrightarrow(1-|g(x)|)(1+|f(x)|)=1$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$$

$\exists$ 闭集F,　$g|_F$ 连续 $\Longrightarrow$ $f|_F$ 连续.

注记

- 可测函数可转化为有界函数研究:

$$T : \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}^{\infty}(E) \quad \text{双射}$$

$$Tf(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \qquad T^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|}$$

$$(1 - |Tf(x)(x)|)(1 + |f(x)|) = 1, \quad (1 + |T^{-1}g(x)(x)|)(1 - |g(x)|)$$

- $\mathscr{L}^{\infty}(E)$的特点: 特征函数生成$\mathscr{L}^{\infty}(E)$.

Urysohn引理:

$$K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K\text{紧}, \quad G\text{开}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, f \in C_c(\mathbb{R}^n): \quad \chi_K \leqslant f \leqslant \chi_G.$$

Urysohn引理续

证明: 不妨设G有界 (否则考虑$G \cap B(0,k)$). 取

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, G^c)}{\operatorname{dist}(x, G^c) + \operatorname{dist}(x, K)}.$$

注记: 可取$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (利用卷积).

记号

下标c	下标b
紧支集(涉及定义域某种意义下有界)	值域有界

Tietze扩张定理:

$$K \overset{(\text{紧})}{\subset} \mathbb{R}^n \Longrightarrow C_c(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_c(\mathbb{R}^n).$$

$$K \overset{(\text{闭})}{\subset} \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad C_b(K) \overset{(\text{等距})}{\subset} C_b(\mathbb{R}^n)$$

$$C(K) \quad \subset \quad C(\mathbb{R}^n)$$

Lusin定理: 可测是连续的弱化

Theorem 2 (Lusin定理)

设$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可测, 则

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \ \exists\ g \in C(\mathbb{R}^n),\ \ \exists\ 闭集F \subset E:$$

$$m(E \setminus F) < \epsilon, \quad f|_F = g|_F\,.$$

f定义域有界	$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$	
f值域有界	$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$	且L^∞范数不增加

注记：ϵ一般不能取为0. 推广的Cantor集合的特征函数+介值定理

可测函数是连续函数在几乎处处收敛意义下的极限

Theorem 3 (可测函数结构定理)

$$f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \overset{f:E\longrightarrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n): \quad g_k \xrightarrow[\text{on } E]{a.e.} f.$$

f定义域有界	$g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$
f值域有界	$g_k \in C_b(\mathbb{R}^n)$

注记1: 当f值域有界时, g_k值域也有界, 且L^∞范数不增加.

注记2: 当f定义域有界时, g_k的支撑有界.

证明:

$$f\text{可测} \xrightarrow{Lusin} \exists\, g_k \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$m[|f-g_k|>0] < \frac{1}{k}.$$

$$\Longrightarrow \quad g_k \xrightarrow{m} f$$

$$\xrightarrow{Riesz} \exists\, g_{k_j} \xrightarrow{a.e.} f$$

注记

$$\mathscr{L}(E) = \overline{C(\mathbb{R}^n)\mid_E}^{a.e.\lim}$$

在紧集$[a,b]$上, 在a.e.收敛下, 多项式在$\mathscr{L}([a,b],\mathbb{R})$ 稠密.

可测函数是连续函数的极限（a.e.收敛意义下）.