

例题

- 设 C 是 $[0, 1]$ 区间三等分Cantor集,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in C \\ \frac{1}{n}, & \text{if } x \in \text{第}n\text{次去掉的长为}3^{-n}\text{的区间.} \end{cases}$$

计算 $\int_0^1 f(x) dx$.

例题续

$$\text{解: } [0, 1] = C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \quad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n} \chi_{I_{n,k}}(x)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{n} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \ln \sqrt{3}$$

Lebesgue积分=Riemann积分+测度论

$$\int_E f(x) dx \quad \frac{f \in L^1 + nL^\infty}{E=[a,b]} \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_{i-1}, y_i]) y_{i-1}$$

$$\equiv \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(m(f^{-1}[y_{i-1}, +\infty)) - m(f^{-1}[y_i, +\infty)) \right) y_{i-1}$$

$$\equiv \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m(f^{-1}[y_i, +\infty)) (y_i - y_{i-1})$$

$$\equiv \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[y, +\infty)) \downarrow dy$$

由微元法看积分的蛋糕表示

$$\int_E f(x) dx \quad \frac{\text{积分的蛋糕表示}}{f \text{非负有界可测}} \quad \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty)) \downarrow dt$$

由微元法看积分的蛋糕表示

- f 图形下方的水平截面:

$\{(x, t_0) : x \in E, 0 \leq t_0 \leq f(x)\}$, 其中 $t_0 \in [0, \infty)$ 固定.

- 该集合的一维测度:

$$m(\{x : x \in E, 0 \leq t_0 \leq f(x)\}) = m(f^{-1}[t_0, +\infty))$$

- f 的图形的下方位于两条直线 $y = t$ 和 $y = t + dt$ 之间的面积

$$m(f^{-1}[t, +\infty))dt$$

- 利用微元法, f 的图形的下方的面积为

$$\int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty))dt$$

- 设 $f \in \mathcal{L}^+([a, b], \mathbb{R})$ 则

$$f \in \mathcal{L}^1[a, b] \quad \overset{\text{单调减函数Riemann可积性}}{\iff} \quad \sum_{k=0}^{\infty} m[f \geq k] < +\infty.$$

本节主要内容

- 积分的性质:

(与Riemann积分相似)

- 关于绝对连续测度的积分

(积分的测度论面目)

- 交换次序的四个等价定理

(交换次序定理是实分析伸向其它学科的重要触角)

Lebesgue 积分定义回顾

- $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测.

$$S^+ = S^+(E, \mathbb{R})$$

非负简单可测

$$\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^+(E, \overline{\mathbb{R}})$$

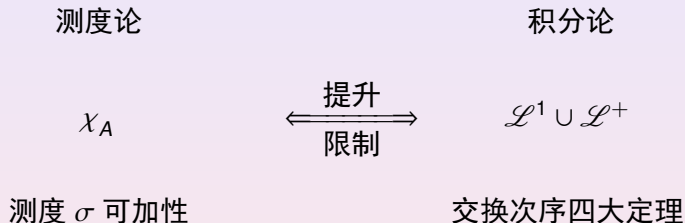
非负可测

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(E, \overline{\mathbb{R}})$$

可积

Lebesgue 积分定义回顾

- 测度论 || 积分论



- 测度论和积分论是一体两面, 不能分割对待.

注记: 从特征函数建造可积函数, 需要三种结构:

向量空间结构, 拓扑结构, 序结构.

$$\int_E \chi_A := m(A),$$

$$\int_E f := \frac{S^+ \ni \varphi_k \uparrow f \in \mathcal{L}^+}{\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k} = \sup_{S^+ \ni \varphi \leq f} \int_E \varphi.$$

$$\int_E f := \frac{f \in \mathcal{L}}{f^+ \text{ or } f^- \in \mathcal{L}^1} \int_E f^+ - \int_E f^-, \quad f^\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$$

$$f \in \mathcal{L}^1(E) \iff f^\pm \in \mathcal{L}^1(E) \iff |f| \in \mathcal{L}^1(E) \iff \int_E |f| < \infty.$$

积分性质

(1) 线性: $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

证明: $S^+(E)$ 性质 $\xrightarrow{\uparrow \text{lim}}$ $\mathcal{L}^+(E)$ 性质.

$\mathcal{L}^+(E)$ 性质 $\xrightarrow{f=f^+-f^-}$ $\mathcal{L}^1(E)$ 性质.

$$-f = f^- - f^+ \xrightarrow{\text{积分定义}} \int_E -f = - \int_E f.$$

积分性质

$$f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f + g)^+ - (f + g)^-$$

移项
 \implies

$$f^+ + g^+ + (f + g)^- = f^- + g^- + (f + g)^+$$

积分
 \implies

$$\int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E (f + g)^- = \int_E f^- + \int_E g^- + \int_E (f + g)^+$$

移项
 \implies

$$\int_E f + \int_E g = \int_E (f + g)$$

(2) 单调性: $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$

$$f \leq g \xrightarrow{\text{不妨设 } f=0} \int_E f \leq \int_E g.$$

(3) 三角不等式(积分统一了离散和连续):

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

证明: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, 积分即可.

绝对连续测度

- 绝对连续测度: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \mu)$

$$\mu(A) \frac{f \in \mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E)}{\int_A f d\mu}, \quad \forall A \subset E \text{ Lebesgue可测}$$

- 关于绝对连续测度的积分:

$$\int_E g d\mu = \int_E g f d\mu, \quad \forall g \in \mathcal{L}^1(E, d\mu).$$

测度与积分关系

注记1: 绝对连续测度也记为

$$d\mu = f dm$$

注记2: 由测度产生积分的桥梁是特征函数:

$$\mu(A) = \int_A f dm \iff \int_E g d\mu = \int_E g f dm \quad \text{其中 } g = \chi_A$$

- 测度是特征函数的积分
- 积分作为曲边梯形的面积是测度

关于测度 $f dm$ 的积分

- $A \subset E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 积分存在. 则

$$\int_E \chi_A f dm = \int_A f dm.$$

关于测度 f dm 的积分公式的证明

证明: 四部曲:

(1) f 是特征函数, 归结于测度论.

(2). 结论可以推广到 $f \in S^+$ 情形.

(3). $f \in \mathcal{L}^+$ 情形可转化为 $f \in S^+$ 情形.

(4). $\int_E f \exists$, 不妨设 $f^+ \in \mathcal{L}^1(E)$, 则 $f^+ \in \mathcal{L}^1(A)$.

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_A f^+ - \int_A f^- \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_E f^+ \chi_A - \int_E f^- \chi_A = \int_E f \chi_A.\end{aligned}$$

积分限的可加性

- 积分限的可加性.

$$\int_E f = \int_A f + \int_{E \setminus A} f$$

注记1: 证明来自于将积分全部化为 E 上积分.

注记2: 这实际上是连续测度的有限可加性.

注记2: 积分是集腋成裘、化零为整的手段。

积分限的剖分产生了化整为零的拆分技巧

零测集的作用

- 设 $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 积分存在, $A \subset E$ 是零测集. 则

$$\int_E f = \int_{E \setminus A} f, \quad \int_A f = 0.$$

证明:
$$\int_A f^\pm \leq \int_A |f| = \sup_{S^+ \ni \varphi \leq |f|} \int_A \varphi = 0.$$

零测集的作用续

零测集不影响积分存在性, 可积性, 积分值.

- 设 $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g$. 则

$$(1) \quad \int_E f \exists \iff \int_E g \exists.$$

$$(2) \quad f \in \mathcal{L}^1(E) \iff g \in \mathcal{L}^1(E).$$

$$(3) \quad \int_E f \exists \implies \int_E f = \int_E g.$$

可积函数几乎处处有限

- 设 $f \in \mathcal{L}^1(E) \implies |f| < \infty$ a.e. in E .

证明: $|f| \geq k \chi_{[|f|=+\infty]}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\implies +\infty > \int_E |f| \geq k m[|f| = +\infty]$$

$$\implies m[|f| = +\infty] = 0$$

- 空间 $\mathcal{L}^1(E)$ 中的约定: (Banach空间的需求)

a.e.相等视为恒等,

a.e.收敛视为收敛.

因此可积函数视为恒取有限值.

- 在上述约定下, 将空间记为 $L^1(E)$. $L^1(E)$ 是Banach空间.

积分理论只能在a.e.相等层次分辨函数

- 设 $f \in \mathcal{L}^+(E) \cup \mathcal{L}^1(E)$, 则

$$f \stackrel{\text{a.e. in } E}{=} 0 \iff \int_A f = 0, \forall A \subset E \text{ 可测.}$$

- 采用积分手段, 判别函数相等.

证明: 充分性. 反证法:

$$m[f \neq 0] > 0 \implies \text{不妨设 } m[f > 0] > 0$$

$$\begin{aligned} [f > 0] &= \bigcup_k [f > 1/k] \\ \implies \implies & \exists \epsilon_0 = \frac{1}{k_0}, m[f > \epsilon_0] > 0 \end{aligned}$$

$$\implies \implies \int_{[f > \epsilon_0]} f \geq \epsilon_0 m[f > \epsilon_0] > 0$$

积分交换次序定理

下列等价：

- 测度 σ 可加性
- Levi单调收敛定理
- Fatou引理
- Lebesgue控制收敛定理
- Fubini定理

注记: 交换次序定理在 $\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^1$ 的框架内.

Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (Levi单调收敛定理)

$$L^+(E) \ni f_n \uparrow f \implies \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

单调最大化函数列例子

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \rightarrow 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \rightarrow 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \rightarrow 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \rightarrow 1 \\ \dots & & & & & \vdots \\ & & & & & \downarrow \\ & & & & & 1 \end{array}$$

单调最大化函数列

重要性质:

$$g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{jj}\} \uparrow f$$

证明: 固定 x , 只考虑 $f(x) \in \mathbb{R}$ 情形. 固定 ϵ , 选取 $k_0 > m_0$:

$$f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0}(x) \leq f_{m_0}(x) \leq f(x)$$

$$\implies f(x) - \epsilon < \varphi_{m_0 k_0} \leq g_{k_0} \leq f_{k_0} \leq f$$

- $L^+(E) \ni f_n \uparrow f \implies \int_E f_n \uparrow \int_E f.$

证明: 取 $S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k$, $g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{jj}\} \leq f_j$, $g_j \uparrow f$

$$\int_E f = \lim \int_E g_j \leq \lim \int_E f_j \leq \int_E f.$$

Levi单调收敛定理↓

Theorem 2 (Levi单调收敛定理)

$$\mathcal{L}^+(E) \cap \mathcal{L}^1(E) \ni f_n \downarrow f \implies \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

Levi单调收敛定理↓证明

证明: 不妨设 f_1 恒取有限值.

$$\begin{aligned} f_1 - f_n \uparrow f_1 - f &\implies \int_E f_1 - f_n \uparrow \int_E f_1 - f \\ &\xrightarrow{f_n \in L^1} \int_E f_n \downarrow \int_E f. \end{aligned}$$

Theorem 3 (Fatou引理)

$$f_n \in \mathcal{L}^+(E) \implies \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

反例:

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \quad \chi_{(n, n+1)}(x), \quad n\chi_{(0, \frac{1}{n})}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Theorem 4 (Lebesgue控制收敛定理)

设 $f_n \in \mathcal{L}(E)$, $|f_n| \leq g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \implies f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \rightarrow \int_E f.$$

Lebesgue控制收敛定理反例

反例： 无控制收敛条件下的面积逃逸：

- 面积沿着x轴逃逸：

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- 面积沿着y轴逃逸：

$$f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- 连续版本的面积逃逸

$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

等价定理的证明

- *Levi*单调收敛定理 \implies *Fatou*引理:

$$\int_E \underline{\lim} f_n = \int_E \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{n \geq k} f_n \stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E \inf_{n \geq k} f_n \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k.$$

- *Fatou*引理 \implies *Lebesgue*控制收敛定理:

$$|f_n| \leq g \implies 2g - |f_n - f| \in \mathcal{L}^+$$

$$\implies \int_E \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - |f_n - f|) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E (2g - |f_n - f|)$$

$$\implies \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int_E |f_n - f| \leq 0.$$

不等式如何产生等式?

- Lebesgue控制收敛定理 \implies Levi单调收敛定理:

只要考虑 $f \in \mathcal{L}^+ \setminus \mathcal{L}^1$ 情形:

取 $S^+ \ni \varphi_{kj} \uparrow f_k$, $g_j := \max\{\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{jj}\} \leq f_j$, $g_j \uparrow f$

$$\lim \int_E f_j \geq \lim \int_E g_j = \int_E f = +\infty.$$