本节主要内容

- 逐项积分定理
- 含参变量积分

回顾积分理论

- 积分理论的精髓:
  - 对y轴分割$\Longrightarrow$ Lebesgue积分$\Longrightarrow$抽象积分理论(值域推广).
  - $\chi_A \xrightarrow{+,\cdot,\lim} L^+ \cup L^1.$ (强调测度和积分是一体两面)
- 积分理论在可测集、可测函数框架内.
- 交换次序定理$L^+ \cup L^1$在框架内.

计算v.s.结构

Riemann积分	Lebesgue积分
侧重计算	侧重结构
古典理论特色	当代数学特色

由微元法看积分的蛋糕表示

Layer cake reprersentation: $f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^\infty(E)$.

$$\int_E f(x)dx \;=\!=\!=\!=\!=\; \int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty)) \downarrow dt$$

曲边梯形的水平集

固定$t_0 \geqslant 0$.

$$
\begin{aligned}
& (x, t_0) \in 曲边梯形(f的图形的下方)的水平截面 \\
\Longleftrightarrow \quad & t_0 \leqslant f(x) \\
\Longleftrightarrow \quad & x \in f^{-1}[t_0, +\infty)
\end{aligned}
$$

- f的图形的下方位于两条直线$y = t$和$y = t + dt$之间的面积

$$m(f^{-1}[t, +\infty))dt$$

- 利用微元法, f的图形的下方的面积为

$$\int_0^{+\infty} m(f^{-1}[t, +\infty))dt$$

注记

Riemann积分	Lebesgue积分
切片面包	层状蛋糕

注记

- $L^1(E)$是Banach空间,
- $L^1(E)$中收敛是a.e.收敛, L^1收敛.
- 可积函数不妨设恒取有限值.

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim} f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n\rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \xlongequal{f \in L^+ \cup L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

注记

反例:

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1)}(x), \quad n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x), \quad \frac{|x|}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Fatou引理“$<$”可取到(面积可能逃逸到无穷).
- Lebesgue控制收敛定理(面积不会逃逸到无穷)

逐项积分定理

- Fubini定理的级数形式:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \xlongequal{f(n,x)\in L^+ \cup L^1(\mathbb{N}\times E)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

- $f_n(x) =: f(n,x) \in L^1(\mathbb{N}\times E) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E |f(n,x)|dx < \infty.$

逐项积分定理注记

- L^+情形, 来自单调收敛定理.

- L^1情形, 来自控制收敛定理.

- L^+情形:
  - 单调收敛定理的级数形式.
  - 测度σ可加性由特征函数到非负可测函数的推广
  - Fubini定理的级数形式.

- 积分关于积分限的σ可加性.

$$\int_E f \xlongequal[E=\sqcup E_k, E_k\text{可测}]{f\in L^+(E)} \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f.$$

注记

- 积分关于积分限的σ可加性.
- Fubini定理的级数形式
- 关于绝对连续测度$f\,dm$的σ可加性.

绝对连续测度

- 测度空间$(E, \mathscr{L}(E), d\mu)$测度空间

$$f \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1, \qquad d\mu = fdm.$$

$$\mu(E) = \int_E d\mu = \int_E fdm.$$

$$\int_E gd\mu = \int_E gfdm, \qquad \forall g \in \mathscr{L}^1(E, d\mu).$$

- 注记: 积分是测度(绝对连续测度).

其雏形: Riemann积分是曲边梯形的面积.

含参量积分理论

- 含参量积分

$$\text{初等函数} \xrightarrow{\text{含参量积分}} \text{非初等函数}$$

- 注记:

Riemann框架下的含参量积分 $\Longrightarrow$ Lebesgue框架下的含参量积分

- 含参量积分的连续性:

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(E) \xrightarrow[\text{关于}x \in E\text{可积}]{f\text{关于}t \in [a,b]\text{连续}} \int_E f(x,t)dx \in C[a,b].$$

含参量积分的连续性的注记

- 含参量积分保持连续性:

只要可积性加强为控制可积性

含参量积分连续性的证明

证:
$$\lim_{t\to t_0}\int_E f(x,t)dx = \int_E f(x,t_0)dx$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E f(x,t_n)dx \xlongequal{\text{控制收敛}} \int_E f(x,t_0)dx, \quad \forall\ t_n\to t_0.$$

Theorem 1 (连续版本的Lebesgue控制收敛定理)

假设$f(x,t)$关于x在E上可测, 关于t在$[a,b]$连续, 而且

$$|f(\cdot,t)| \leqslant g \in L^1(E), \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_0} \int_E f(x,t)dx = \int_E \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx, \qquad \forall\ t_0 \in [a,b].$$

Theorem 2 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_t\text{存在}]{f,f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

注记

只要函数及其导数可积, 而且关于导数的可积性加强为控制可积性.

- 含参量积分保持可导性
- 求导和积分可以交换次序.

证明:

$$\text{右边}\Big|_{t=t_0} \xlongequal[\text{中值定理}]{\forall\ t_0\neq t_n\to t_0} \int_E \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}}_{=f'(x,\xi_n)} dx$$

$$\xlongequal{\text{控制收敛}} \lim_{n\to\infty} \frac{\int_E f(x,t_n)dx - \int_E f(x,t_0)dx}{t_n-t_0}$$

$$=\!=\!=\!=\ \text{左边}\Big|_{t=t_0}.$$

Borel-Cantelli引理:

$$f_n(x) \in L^1(\mathbb{N} \times E, \mu \times m) \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e. x \in E} 0.$$

注记:

$$f(n,x) := f_n(x) \in L^1(\mathbb{N} \times E, \mu \times m) \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} < +\infty$$

注记

- a.e.收敛性的证明转化为L^1收敛性(积分理论)处理.
- (加强)L^1收敛蕴含a.e.收敛
- 取f为特征函数, 得到古典的测度论结果.

问题: 单调收敛定理的条件下是否能推出L^1收敛性?

续

证明: $$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1(E)} = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \, dm$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in L^1(E)$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \overset{a.e.}{<} +\infty.$$

$$\Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{a.e.} 0.$$

例题1

设$f:[0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{if } xy\in\mathbb{Q}\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

计算

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy$$

解:

$$[xy \in \mathbb{Q}] = \bigcup_n [xy = r_n] = \mathbb{R}^2\text{中零测集}$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]^2} 1dxdy = 1.$$

例题2

设$f \in L^1(E)$, $f > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$可测. 证明:

$$\lim_{k \to \infty} \int_E f(x)^{1/k} dx = m(E).$$

续

证明: 只要证明极限和积分可交换次序, 为此将积分限剖分成两部分

$$E = [f \geqslant 1] \sqcup [f < 1].$$

在$[f \geqslant 1]$上: $f(x)^{1/k} \leqslant f(x)$, 可利用Lebesgue控制收敛定理.

在$[f < 1]$上: $f(x)^{1/k} \uparrow 1$, 可利用Levi单调收敛定理.

例题3

证明下述结论:

$$f \in L^1[0,1] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \log\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) dx = 0$$

续

证明:

$$\forall x > 0, \quad \log(1+x^2) \le x \xrightarrow{\text{控制收敛定理}} \text{极限和积分可交换次序}$$

$$\log(1+x^2) \le x^2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\log(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}) = 0$$