本讲内容

- 推广的交换次序的定理
  - 非负性条件的弱化
  - 控制性条件的弱化

测度的σ可加性等价于:

Levi	L^+	$f_n \uparrow f \xRightarrow{f_n \in L^+} \int f_n \uparrow \int f$
Fatou	L^+	$\int \underline{\lim}\, f_n \overset{f_n \in L^+}{\leqslant} \underline{\lim} \int f_n$
Lebesgue	L^1	$f_n \xrightarrow{a.e.} f \xRightarrow[f_n\text{可测}]{\lvert f_n \rvert \leqslant g \in L^1} f_n \xrightarrow{L^1} f, \int f_n \longrightarrow \int f$
Fubini	$L^+ \cup L^1$	$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f \xlongequal{f \in L^+ \cup L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm(y) \Big) dm(x).$

- 交换次序的等价定理在$L^+ \cup L^1$框架内

Levi	$f \in L^+$
Lebesgue	$f \in L^1$
Fatou	$f \in L^+$
Fubini	$f \in L^+ \cup L^1$

推广1

- 弱化的非负性

推广的Levi单调收敛定理

- 推广的法则:

$$f \in \mathscr{L}^{+} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-} \equiv 0 \quad \xrightarrow{\text{推广}} \quad f^{-} \in \mathscr{L}^{+} \cap \mathscr{L}^{1}$$

推广的Levi单调收敛定理↑

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \quad \xrightarrow{\quad f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad}\!\!\!\!\!\Longrightarrow \quad \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

注记

序结构:

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \frac{|f| - f}{2} = \max\{-f, 0\} = (-f)^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad \max\{f, 0\} \leqslant \max\{g, 0\} \quad \Longrightarrow \quad f^+ \leqslant g^+$$

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad -\min\{f, 0\} \geqslant -\min\{g, 0\} \quad \Longrightarrow \quad f^- \geqslant g^-$$

续

$$f_n \uparrow f \quad \Longrightarrow \quad f_n^- \downarrow f^-, \qquad \forall n$$

$$f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \quad \overset{f_n \uparrow f}{\Longleftrightarrow} \quad f_n^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1, \qquad \forall n$$

证明:　情形1: $f_1^+ \notin \mathscr{L}^1$

$$\int_E f_1 = \int_E f_1^+ - \int_E f_1^- = +\infty \Longrightarrow \int_E f_n = +\infty$$

情形2: $f_1^+ \in \mathscr{L}^1$

$$f_1^{\pm} \in \mathscr{L}^1 \implies f_1 \in \mathscr{L}^1 \qquad \text{(不妨设}f_1\text{恒取有限值)}$$

$$\implies 0 \leqslant f_n - f_1 \uparrow f - f_1 \implies \int_E (f_n - f_1) \uparrow \int_E (f - f_1)$$

$$\implies \int_E f_n \uparrow \int_E f$$

Theorem 2 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \downarrow f \xRightarrow{f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E f_n \downarrow \int_E f.$$

证明: 利用序结构中乘以−1的对合即可.

$$f_n \downarrow f, \qquad f_1^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\xRightarrow{f^- = \frac{|f|-f}{2}} \quad -f_n \uparrow -f, \qquad (-f_1)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E (-f_n) \uparrow \int_E (-f)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n \downarrow \int_E f$$

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\inf_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

$$(\inf_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \xRightarrow{(\inf_n f_n)^- \geqslant f_k^-, \qquad \forall k \in \mathbb{N}} f_k^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1$$

反之不成立例如$f_n = -n$.

续

证明:

$$f_n \geqslant \inf_{k \geqslant n} f_k \uparrow \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\xRightarrow{\text{推广的单调收敛定理}} \int_E f_n \geqslant \int_E \inf_{k \geqslant n} f_k \uparrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_E \inf_{k\geqslant n} f_k = \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n$$

推广的Fatou引理

Theorem 4 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\sup\limits_n f_n)^+ \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

推广的交换积分次序定理

测度的σ可加性等价于:

Levi $\uparrow$	f^-好	$f_n \uparrow f \Longrightarrow \int f_n \uparrow \int f$
Levi $\downarrow$	f^+好	$f_n \downarrow f \Longrightarrow \int f_n \downarrow \int f$
Fatou	$(\inf\limits_n f_n)^-$好	$\int \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim} \int f_n$
Fatou	$(\sup\limits_n f_n)^+$好	$\int \overline{\lim} f_n \geqslant \overline{\lim} \int f_n$

推广2

- 控制收敛条件弱化为控制收敛序列条件

- 推广的Lebesgue控制收敛定理

控制条件:

$$\text{由一个函数控制} \xrightarrow{\text{减弱}} \text{用函数列控制}$$

$$\text{一致控制} \xrightarrow{\text{减弱}} \text{非一致控制}$$

- 假设

(1) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$

(2) $f_n, f \in \mathscr{L}^+(E) \cap \mathscr{L}^1(E)$.

则

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理续

证明:“ $\Longrightarrow$ ” : $\quad \overline{\lim}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| \leqslant \overline{\lim}\int_E |f_n - f| = 0.$

$$\text{“}\Longleftarrow\text{”}: \quad (f_n + f) - |f_n - f| \in L^+(E)$$

$$\xrightarrow{Fatou} \int_E \underline{\lim}((f_n + f) - |f_n - f|) \leqslant \underline{\lim} \int_E ((f_n + f) - |f_n - f|)$$

$$\text{左边} = \int_E 2f$$

$$\text{右边} = \lim \int_E (f_n + f) - \overline{\lim} \int_E |f_n - f|) = \int_E 2f - \overline{\lim} \int_E |f_n - f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim} \int_E |f_n - f| \leqslant 0.$$

Fatou引理能产生等式的根本原因:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| \leqslant 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| = 0.$$

推广的Lebesgue控制收敛定理

Theorem 5 (推广的Lebesgue控制收敛定理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$, $\quad |f_n| \leqslant g \in L^1$. 则

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

证明:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当} n > N \text{时, 有} \|f_n - f\|_{L^1} < \epsilon.$$

$$f_n \overset{L^1}{\nrightarrow} f \quad \xRightarrow{\text{可利用子列判别法}} \quad \exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists \text{子列} f_{k_n}: \quad \|f_{k_n} - f\|_{L^1} \geqslant \epsilon_0$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \xRightarrow{Riesz} \quad \exists f_{k_n} \text{子列} f_{k_n'} \xrightarrow{a,e} f$$

$$\xRightarrow{Lebesgue\text{控制收敛}} \quad f_{k_n'} \xrightarrow{L^1} f \qquad \text{矛盾}$$

Theorem 6 (Lebesgue控制收敛定理, 比较判别法)

设$f_n \in \mathscr{L}(E)$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

弱化控制收敛定理续

证明:
$$(g_n+g)-|f_n-f|\in L^+(E)$$

$$\xrightarrow{Fatou} \int_E \underline{\lim}((g_n+g)-|f_n-f|)\leqslant \underline{\lim}\int_E((g_n+g)-|f_n-f|)$$

$$\Longrightarrow \overline{\lim}\int_E |f_n-f|\leqslant 0.$$

Theorem 7 (利用函数列控制的Lebesgue定理)

设$f_n \in L(E)$, $f_n \xrightarrow{a.e.} f$,

$$|f_n| \leqslant g_n \xrightarrow[a.e.]{L^1} g$$

则

(1) 控制函数列满足

$$g_n \xrightarrow{a.e.} g, \quad g_n \xrightarrow{L^1} g, \quad \int_E g_n \longrightarrow \int_E g.$$

(2) 被控制的函数列满足

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f, \quad f_n \xrightarrow{L^1} f, \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f.$$

利用函数列控制的Lebesgue定理注记

条件:

	a.e.收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	√		
控制函数列$\{g_n\}$	√	√	

结论:

	a.e.收敛	L^1收敛	积分和极限换序
函数列$\{f_n\}$	√	√	√
控制函数列$\{g_n\}$	√	√	√

- 设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, $f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \iff m[f_n \nrightarrow f] = 0;$$

$$f_n \xrightarrow{a.un} f \iff \forall\, \epsilon > 0,\quad \exists \text{可测} E_\epsilon \subset E:$$
$$m(E_\epsilon) < \epsilon, \qquad f_n \overset{onE \setminus E_\epsilon}{\rightrightarrows} f;$$

$$f_n \xrightarrow{m} f \iff \forall\, \epsilon > 0,\quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

(测度刻画小集合)

三种收敛性的直观含义

- 几乎处处收敛是除去一个零测集的点态收敛.
- 几乎一致收敛说明挖去一个任意小测度集后一致收敛.
- 以测度收敛不是点态收敛, 它说明f_k 远离f的点集是小测度集, 但不论该集合的位置.

三种收敛的依测度收敛型的刻画

- 无穷多项远离f的是零测集.

$$f_k \xrightarrow{a.e.} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad m(\overline{\lim_{k\to\infty}}[|f_k - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- (允许有限项例外的)一致远离f的点集是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{a.un} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{j=k}^{\infty}[|f_j - f| \geqslant \epsilon]) = 0.$$

- 依测度意义远离f是小测度集.

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0, \quad \lim_{k\to\infty} m[|f_k - f| \geqslant \epsilon] = 0.$$

几乎处处收敛v.s.依测度收敛

a.e.	几乎处处收敛	点态	零测集
m	以测度收敛	非点态	小测度集

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念

- 几乎处处收敛, 非依测度收敛.

$$E = (0, +\infty)$$

$$\chi_{(n,n+1)} \xrightarrow{a.e.} 0$$

$$\chi_{(n,n+1)} \overset{m}{\nrightarrow} 0$$

几乎处处收敛和依测度收敛是独立概念续

- 依测度收敛, 非几乎处处收敛.

$$E = [0, 1]$$

$$f_{kr} = \chi_{[\frac{r-1}{k}, \frac{r}{k})}, \qquad r = 1, \ldots k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\{g_k\} := \{f_{11}, f_{21}, f_{22}, \ldots\}$$

$$g_k \xrightarrow{m} 0$$

$$g_k \overset{a.e.}{\nrightarrow} 0$$