本讲内容

- 积分号下取极限的充要条件:

  一致可积　　(防止面积逃逸)

  - 推广的Fatou引理
  - 推广的Lebesgue控制收敛定理
  - Vitali收敛定理　　(L^1, m收敛之间关系)

Theorem 1 (推广的Levi单调收敛定理)

$$\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}}) \ni f_n \uparrow f \xRightarrow{\; f_1^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1 \;} \int_E f_n \uparrow \int_E f.$$

推广的Fatou引理

Theorem 2 (推广的Fatou引理)

$$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \xRightarrow{(\inf\limits_n f_n)^- \in \mathscr{L}^+ \cap \mathscr{L}^1} \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

一致可积性

- 一致可积性

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{[|x|>R]} |f(x)|dx = 0.$$

积分在无穷点处差不多为零

证明： $$左 = \lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,\chi_{[|x|>R]}(x)\,dx \xlongequal[\text{离散化}]{\text{控制收敛}} 0.$$

积分在有限点处差不多为零

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f| dm = 0$$

极限的$\epsilon-\delta$语言：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad 当A可测, \quad m(A) < \delta时, \quad 有$$

$$\int_A |f| dm < \epsilon.$$

注记：这是下列结果的推广

$$m(A) = 0 \xrightarrow{f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)} \int_A |f| dm = 0.$$

证明: 反证法:

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \exists A_n \subset \mathbb{R}^n \text{可测}, \quad m(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \int_{A_n} |f| \geqslant \epsilon_0$$

$$\xRightarrow{Borel-Cantelli} \quad A := \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \quad m(A) = 0$$

$$0 \xlongequal{m(A)=0} \int_A |f| \xlongequal[Lebesgue]{f\in L^1} \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k} |f| \geqslant \epsilon_0.$$

可积性$\Longrightarrow$绝对连续性

设$E \subset \mathbb{R}^n$是Lebesgue可测集.

$$f \in \mathscr{L}^1(E) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f| = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \int_{[|f|>R]} |f| = 0$$

注记: 函数$|f(x)|$相应曲边梯形水平集:

$$\Big\{(x, R) : |f(x)| > R\Big\}$$

证明用到Chebyshev不等式

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \xRightarrow{\textit{Chebyshev}} \quad m[|f| > R] \leqslant \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

证明：$$m[|f| > R] = \int_{[|f|>R]} 1 \leqslant \int_{[|f|>R]} \frac{|f(x)|}{R}$$

几何意义：

$|f(x)|$的曲边梯形水平集产生的曲边梯形 $\subset$ $|f(x)|$的曲边梯形.

证明1(适用于抽象积分理论)

$$\text{零扩充} \Longrightarrow \text{可不妨设} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{取} \quad R > \frac{1}{\delta}\int_E |f| \quad \xrightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m[|f| > R] \leqslant \frac{1}{R}\int_E |f| < \delta, \qquad R \gg 1$$

$$\xrightarrow[\text{函数值充分大的点是小集合}]{\text{积分在小集合上差不多为零}} \quad \int_{[|f|>R]} |f| < \epsilon.$$

证明2

$$\lim_{R\to\infty}[|f|>R]=[|f|=\infty]\quad \text{零测集}$$

$$\Longrightarrow\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{[|f|>R]}|f| \xlongequal{Lebesgue} 0$$

一致可积定义

Def

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$ 可测.

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{[|f_n|>R]} |f_n| = 0$$

一致的秘密:　　无穷个差不多是一个.

一致可积等价定义

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E)$, $\quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{一致可积} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sup\limits_n \displaystyle\int_E |f_n| < \infty & (\mathscr{L}^1\text{中有界集合}) \\ \\ \lim\limits_{m(A)\to 0} \sup\limits_n \displaystyle\int_A |f_n| = 0. \end{cases}$$

第二个条件等同于:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当}m(A) < \delta\text{时, 成立}$$

$$\sup_n \int_A |f_n| < \epsilon$$

必要性证明

必要性:

$$\int_E |f_n| = \int_{[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{[|f_n|<R]} |f_n| < \epsilon + Rm(E)$$

$$\int_A |f_n| = \int_{A\cap[|f_n|\geqslant R]} |f_n| + \int_{A\cap[|f_n|<R]} |f_n| < \frac{\epsilon}{2} + Rm(A) < \epsilon, \qquad \delta := \frac{\epsilon}{2R}$$

充分性证明

充分性:

$$\text{取} \quad R > \frac{1}{\delta} \sup_n \int_E |f_n|$$

$$\xRightarrow{Chebyshev} \quad m[|f_n| \geqslant R] \leqslant \int_{[|f_n| \geqslant R]} \frac{|f_n|}{R} \leqslant \int_E \frac{|f_n|}{R} < \delta$$

$$\Longrightarrow \quad \sup_n \int_{[|f_n| \geqslant R]} |f_n| < \epsilon.$$

控制可积蕴含一致可积

设$f_n \in \mathscr{L}^1(E), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$|f_n| \leqslant g \in L^1(E) \Longrightarrow \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}\text{一致可积}$$

证明

证明:

$$\text{控制可积} \xRightarrow[\text{无穷个用一个代替}]{\text{一致可积的等价定义}} \text{一致可积}$$

具有一致可积条件的推广的Fatou引理

Theorem 3 (推广的Fatou引理)

设$f_n \in \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}), \quad m(E) < \infty, \quad E \subset \mathbb{R}^n,$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致可积

$$\Longrightarrow \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leqslant \int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n$$

注记： 在控制条件下，Fatou引理成立。

注记： 由Fatou引理推出Lebesgue收敛定理，因此在一致可积的条件下，$a.e. \Longrightarrow L^1$。

证明: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致可积 : $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\int_{[|f_n|>R]}|f_n|=0$

$$\Longrightarrow \quad \forall\epsilon>0,\quad \exists R>0: \quad \left|\int_{[f_n<-R]}f_n\right|<\epsilon,\quad \forall n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n=\int_{[f_n\geqslant -R]}f_n+\int_{[f_n<-R]}f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f_n>\int_{[f_n\geqslant -R]}f_n-\epsilon$$

续

$$f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}\geqslant -R$$

$$\Longrightarrow \quad (\inf_n f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]})^-\leqslant(-R)^-=R\in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]}\geqslant f_n]{\text{Fatou引理}} \quad \underline{\lim}\int_{[f_n\geqslant -R]}f_n\geqslant\int_E\underline{\lim}(f_n\chi_{[f_n\geqslant -R]})\geqslant\int_E\underline{\lim}\,f_n$$

续

综上所述:

$$\Longrightarrow \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \underline{\lim} \int_{[f_n \geqslant -R]} f_n - \epsilon \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n - \epsilon$$

$$\xrightarrow{\epsilon \to 0} \underline{\lim} \int_E f_n \geqslant \int_E \underline{\lim}\, f_n$$