本讲内容

- 测度的绝对连续性
    - 测度和函数相差多少？(测度分解)
    - 积分的绝对连续性(积分视为测度)
- 加权计数测度
- 函数的重整

- 测度的绝对连续性

测度的绝对连续性

- 设$(X,\Gamma,\mu),(X,\Gamma,\nu)$是测度空间.

  ν 是有限测度, 即$\nu(X)<\infty$.

- ν 是有限测度, ν 关于μ绝对连续 $(\nu \ll \mu)$:

$$\mu(A) \xlongequal{\forall A\in\Gamma} 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A)=0.$$

测度的绝对连续性

- ν 关于μ绝对连续判别法:

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0.$$

极限的等价描述：

$$\forall \epsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ 当A \in \Gamma,\ \ \mu(A) < \delta时,\ \ 有\nu(A) < \epsilon.$$

证明: “ $\Longleftarrow$ ” $\mu(A) \xlongequal{A\in\Gamma} 0 \Longrightarrow \nu(A) < \epsilon \quad (\forall \epsilon > 0)$.

“ $\Longrightarrow$ ” 反证法: $\exists \epsilon_0, \quad \exists A_n \in \Gamma, \quad \mu(A_n) < \frac{1}{2^n}, \quad \nu(A_n) \geqslant \epsilon_0$.

$$\xRightarrow{\color{red}{Borel-C}} A := \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n, \quad \mu(A) = 0, \quad \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \geqslant \epsilon_0.$$

Radon-Nikodym定理: 测度论顶峰

Theorem 1 (Radon-Nikodym定理)

设μ是有限测度, 则

$$\mu \ll m \overset{\exists\,!\ f \in L^+(E)\cap L^1(E)}{\Longleftrightarrow} \quad d\mu = f dm.$$

注记: 积分论意义下唯一

证明

$m(E) < \infty.$

$$0 \in \Gamma := \left\{ g \in L^+(E) \cap L^1(E) : d\mu - gdm\text{是正测度} \right\}.$$

$$d\mu - gdm\text{是正测度} \Longleftrightarrow \int_A g\, dm \leqslant \mu(A),\quad \forall A \subset E\text{可测}$$

$$\lambda := \sup_{g\in\Gamma} \int_E g\, dm \xlongequal[\text{待证}]{\exists! f\in\Gamma} \int_E f\, dm$$

性质： Γ对取最大值运算封闭：

$$g_1, g_2 \in \Gamma \Longrightarrow \max(g_1, g_2) \in \Gamma.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\int_A \max(g_1, g_2) dm &= \int_{A\cap[g_1>g_2]} g_1 dm + \int_{A\cap[g_1\leqslant g_2]} g_2 dm \\
&\leqslant \mu(A\cap[g_1 > g_2]) + \mu(A\cap[g_1 \leqslant g_2]) \\
&= \mu(A).
\end{aligned}$$

Radon-Nikodym之证

取极值序列$\{g_n\}_{n\geqslant 1} \subset \Gamma: \quad \int_E g_n dm \to \lambda$

$$\Longrightarrow \quad h_n := \max_{1\leqslant k\leqslant n} g_k \in \Gamma \text{也是极值序列}$$

$$\xRightarrow{Levi} \quad h_n \nearrow f, \quad \int_E f dm = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n dm \leqslant d\mu(E).$$

$$\Longrightarrow \quad f \in \Gamma, \quad \int_E f d\mu = \lambda$$

续

$$d\nu := d\mu - fdm \quad \Longleftrightarrow \quad \nu(A) = \mu(A) - \int_A fdm$$

$$\Longrightarrow \quad \nu\text{是一个非负测度}$$

$$\Longrightarrow \quad \nu = 0$$

反证法: $\nu \neq 0 \Longrightarrow \nu(E) > 0 \Longrightarrow \exists \epsilon_0 > 0: \quad \epsilon_0 m(E) < \nu(E)$

$d\nu - \epsilon_0 dm$是符号测度, 类似函数具有Hahn分解(E_+, E_-)

$$\Longrightarrow \quad \forall\text{可测集}A \subset E: \quad \epsilon_0 m(A \cap E_+) < \nu(A \cap E_+)$$

$$\Longrightarrow \int_A (f+\epsilon_0\chi_{E_+})dm \leqslant \int_A fdm + \nu(A\cap E_+) \leqslant \mu(A)$$

$$\Longrightarrow f+\epsilon_0\chi_{E_+}\in\Gamma \qquad \int_E (f+\epsilon_0\chi_{E_+})dm > \int_E fdm, \quad \text{矛盾}$$

补充证明$m(E_+) > 0$:

$$m(E_+)=0 \quad \xrightarrow{\mu\ll m} \quad \mu(E_+)=0 \xrightarrow{\nu(A):=\mu(A)-\int_A fdm} \nu(E_+)=0$$

$$\xrightarrow[m(E_+)=\nu(E_+)=0]{E=E_+\sqcup E_-} \quad 0<(\nu-\epsilon_0 m)(E)=(\nu-\epsilon_0 m)(E_-)\leqslant 0.$$

唯一性

假设$f \in L^1$而且$fdm = 0 \Longrightarrow \int_A fdm = 0 \quad \forall\, A \Longrightarrow f = 0 \quad a.e.$

反证法：不妨设$f^+ \neq 0$(a.e. 意义下), 不妨设

$$m([f^+ > 0]) > 0$$

$$f^-|_{[f^+>0]} = 0 \Longrightarrow 0 = \int_{[f^+>0]} fdm = \int_{[f^+>0]} f^+dm$$

利用反证法

$$\int_{[f^+>0]} f^+dm > 0.$$

- 积分的绝对连续性

积分的绝对连续性

$$f \in L^1(E) \rightleftharpoons |f|dm \ll dm \quad (Radon - Nikodym\text{定理})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(A)\to 0} \int_A |f|dm = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \text{当} A \in \Gamma, \quad m(A) < \delta\text{时}, \quad \text{有}$$

$$\int_A |f|dm < \epsilon.$$

积分在有限点处差不多为零

- $$m(A)=0 \xrightarrow{f\in L^1(E)} \int_A |f|dm = 0.$$

积分在无穷点处差不多为零

- 积分在无穷点处差不多为零:

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{|x|>k} |f(x)| dx = 0.$$

证明: $$\text{左} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \chi_{[|x|>k]}(x)\, dx \xlongequal{\text{控制收敛}} 0.$$

内容3

- 加权计数测度

加权计数测度

- 加权计数测度空间

$$(\mathbb{Z}_n, \quad 2^{\mathbb{Z}_n}, \quad \mu) \qquad \mathbb{Z}_n := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

- 加权计数测度:

$$\mu(\{j\}) = \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots n$$

$$1\text{的分解:} \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad \lambda_j \geqslant 0.$$

- 任意函数$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ 必可测.

加权平均是一种积分

- 加权平均是关于加权计数测度的积分

$$\int_{\mathbb{Z}_n} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\{k\}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$$

$$\int_{\mathbb{Z}_n} |f| \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |a_k|.$$

凸函数积分刻画

- 凸函数$\varphi:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$\varphi\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j\Big)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\varphi(a_j).$$

$$\forall\ a_j\in(a,b),\ \ \lambda_j\geqslant 0,\ \ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1.$$

凸函数积分刻画续

- 加权计数测度:

$$\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(\{j\}) = \lambda_j.$$

- 凸函数积分刻画

$$\varphi\text{凸} \quad \overset{f\in L^1}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f \, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f \, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \quad \forall\ n, \lambda_j.$$

- Jensen不等式:

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\int_X fd\mu\right)\leqslant\int_X\varphi\circ fd\mu,$$

对$\forall\ f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意概率测度空间.

Jensen不等式续

- Jensen不等式:

设(X,Γ,μ)是测度空间, $\mu(X)\in(0,+\infty)$. 则

$$\varphi:(a,b)\xrightarrow{\text{凸}}\mathbb{R}\iff\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu\right)\leqslant\frac{1}{\mu(X)}\int_X\varphi\circ f\,d\mu,$$

对$\forall\, f:X\xrightarrow{f\in L^1(X,\mu)}(a,b)$成立.

其中(X,Γ,μ)是任意测度空间:
$\mu(X)\in(0,+\infty)$.

注记

$$\varphi\left(\int_{\mathbb{Z}_n} f\, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\right) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_n} \varphi\circ f\, d\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$$

$$\xRightarrow[\text{数学的洞察力}]{\text{见微知著}} \quad \varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leqslant \int_X \varphi\circ f d\mu$$

证明:

$$\alpha \xlongequal{\mu(X)=1} \int_X f\, d\mu \in (a,b).$$

$$(\alpha = a \quad \Longrightarrow \quad \int_X (f-a) d\mu = 0$$

$$\Longrightarrow \quad f - a \overset{a.e.}{=} 0 \text{与} \mu(X) = 1 \text{矛盾.})$$

续

设$(\alpha,\varphi(\alpha))$处的支撑线为

$$\varphi(\alpha)+k(x-\alpha).$$

$$\xRightarrow{\varphi\text{凸}} \quad \varphi(\alpha)+k(x-\alpha)\leqslant\varphi(x)$$

$$\xRightarrow[x:=f(t)]{\text{积分}} \quad \varphi(\alpha)\leqslant\int_X \varphi\circ f\,d\mu.$$

内容4

- 函数的重整

函数的蛋糕表示Layer cake reprersentation:

$$f(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{函数的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x)dt$$

- 特征函数$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) \Longrightarrow$ 可测函数$f(x)$
- 固定横坐标x, 则f图形下方垂直集的特征的两种表示:

$$\chi_{f^{-1}(t,+\infty)}(x) = \chi_{[0,f(x))}(t)$$

- $f(x)$下方的第t层$\xRightarrow[\text{上方无贡献}]{\text{曲边梯形视为蛋糕}}$对$f(x)$有贡献

蛋糕表示的作用

- $$\text{特征函数} \xrightarrow[\text{蛋糕表示}]{\text{直接联系}} \text{可测函数}$$

- $$\text{函数的蛋糕表示} \xrightarrow[\text{两边积分}]{\textit{Fubini}} \text{积分的蛋糕表示}$$

$$\int_E f(x)d\mu(x) \xlongequal[f\text{非负有界可测}]{\text{积分的蛋糕表示}} \int_0^{+\infty} \underbrace{\mu(f^{-1}(t,+\infty))}_{\text{f图形下方水平集的测度}} \downarrow dt$$

函数的重整:

- 函数的重整:

$$\text{不规则} \xrightarrow{\text{重整}} \text{规则} \qquad (\text{极值往往在规则情形达到})$$

函数重整: Rearrangement

- 集合的重整

$$A \xRightarrow[m(A)<\infty]{m(A)=m(A^*)} A^* = B(0,r)$$

- 特征函数的重整

$$\chi_A \xRightarrow{\chi_A^*=(\chi_A)^*:=A^*=\chi_{A^*}} \chi_{A^*}$$

- 非负可测函数的重整

$$\mathscr{L}^+(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)\ni f \xRightarrow[f(x)=\int_0^\infty \chi_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt]{f^*(x):=\int_0^\infty \chi^*_{f^{-1}[t,+\infty)}(x)dt} f^*$$

函数重整的性质

- 单调性: 径向函数 $\chi_A^* \downarrow \Longrightarrow f^* \downarrow$

- 保序性: $f \leqslant g \Longrightarrow f^* \leqslant g^*$

  f的图形下方 $\subset$ g的图形下方

- 保范性: $\|f\|_1 \xlongequal{\text{积分的蛋糕表示}} \|f^*\|_1$

- 距离不增: $\|f^* - g^*\|_1 \leqslant \|f - g\|_1$

  (参见Lieb 《Analysis》)