本讲内容： 测度论的升华

- 测度的推广： 实分析的触角
  - 符号测度
  - 复测度

物理意义

正测度	符号测度	复测度
质量分布	电荷分布	向量值测度

推广的立足点

- 函数是测度:　$f \equiv f dm$

起点	f	f^+	f^-	$\lvert f\rvert$	$\mathrm{Re} f$	$\mathrm{Im} f$
终点	ν	ν^+	ν^-	$\lvert\nu\rvert$	$\mathrm{Re}\nu$	$\mathrm{Im}\nu$

函数的Hahn-Jordan分解

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$, $\qquad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

- Jordan分解: $\qquad f = f^+ - f^- \equiv f^+ dm - f^- dm =: \nu^+ - \nu^-$
- Hahn分解: $\qquad \mathbb{R}^n = [f \geq 0] \bigsqcup [f < 0] =: A^+ \bigsqcup A^-$
- 两者联系:

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \begin{cases} \nu^+(A^-) = \int_{A^-} d\nu^+ = \int_{[f<0]} f^+ dm = 0, \\ \\ \nu^-(A^+) = \int_{A^+} d\nu^- = \int_{[f\geqslant 0]} f^- dm = 0 \end{cases}$$

函数的Hahn-Jordan分解

1. σ有限测度

$$f^{\pm}\text{之一可积}.$$

2. 有限测度

$$f\ \text{可积}.$$

Hahn分解：$\mathbb{R}^n = [f \geq 0] \bigsqcup [f < 0] =: A^+ \bigsqcup A^-$

相差$|f|dm$零测集唯一。$[f = 0]$是$|f|dm$零测集。

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A_+) = \int_{E\cap A_+} fdm, \quad \nu^-(E) = -\nu(E\cap X_-) = \sup_{P\subset E} -\nu(P)$$

- 符号测度

针对具体特例说明: 测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \mu)$

符号测度

可测空间(X,Γ): X是非空集合, $\Gamma\subset 2^X$ 是σ-代数.

- 符号测度

$$\mu:\Gamma\longrightarrow[-\infty,\infty)\text{或}(-\infty,+\infty]$$

  - $\mu(\emptyset)=\emptyset$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(A_k)$.

符号测度的例子1

可测空间(X,Γ):

$$\mu,\nu\text{是正测度, 其中之一是有限测度} \Longrightarrow \mu-\nu\text{是符号测度}$$

符号测度的例子2

Lebesgue测度空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), m)$.

- 积分$\int_{\mathbb{R}^n} fdm$ 有定义$\xLongrightarrow{f^{\pm}\text{之一}\in \mathscr{L}^1} \nu = fdm$是符号测度

- $f = f^+ - f^- \Longrightarrow \nu = \nu^+ - \nu^- = f^+dm - f^-dm$

- $\mathbb{R}^n = A_+ \bigsqcup A_- = [f \geqslant 0] \bigsqcup [f < 0]$

$$\nu^+ \perp \nu^- \Longleftrightarrow \quad \nu^+(A_-) = 0, \qquad \nu^-(A_+) = 0$$

- 全变差测度: $\quad |\nu| = \nu^+ + \nu^- = |f|dm$

符号测度的正部和负部

可测空间(X,Γ): ν是符号测度.

- Jordan分解: $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $\nu^+ \perp \nu^-$, $\nu^\pm$是正测度.
- Hahn分解: $X = X_+ \bigsqcup X_-$, $\nu^+(X_-) = 0$, $\nu^-(X_+) = 0$
- 全变差测度: $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$
- 符号测度的正部和负部:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap X_+) = \sup_{P \subset E} \nu(P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap X_-) = \sup_{P \subset E} -\nu(P)$$

Hahn分解和Jordan分解的唯一性

测度空间(X, Γ, ν):　ν是符号测度.

- Jordan分解:　$\exists !$分解

$$\nu = \nu^+ - \nu^-, \qquad \nu^+ \perp \nu^-, \qquad \nu^\pm\text{是正测度}$$

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

- Hahn分解:

$$X = X_+ \bigsqcup X_-, \quad \nu^+(X_-) = 0, \quad \nu^-(X_+) = 0$$

X_+, X_-相差$|\nu|$-零测集唯一

全变差测度

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \right\}$$

关于符号测度的积分

$$\int_X f\,d\nu := \int_X f\,d\nu^+ - \int_X f\,d\nu^-, \qquad f \in L^1(X, d|\nu|)$$

测度的绝对连续

测度空间(X, Γ, m): ν是符号测度.

$$\nu \ll m \quad \Longleftrightarrow \quad \text{“}\forall E \in \Gamma, \quad m(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0\text{”}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(E)\to 0} \nu(E) = 0, \quad \forall E \in \Gamma$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\nu| \ll m$$

可测空间(X,Γ): ν是符号测度.

$$\nu\text{是有限测度} \overset{def}{\Longleftrightarrow} |\nu(X)| < \infty \Longleftrightarrow |\nu(A)| < \infty, \qquad \forall A \in \Gamma.$$

证明: $\nu(X) = \nu(A) + \nu(A^c)$.

$$|\nu(A)| = \infty \Longrightarrow |\nu(X)| = \infty.$$

内容2

- 复测度

复测度

测度空间(X, Γ, μ), X是非空集合, $\Gamma \subset 2^X$ 是σ-代数.

- $\mu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$是复测度:
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\mu(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$ 绝对收敛

复测度的实部、虚部、共轭、收敛

测度空间(X,Γ)，　　ν是复测度

$$\nu_r(A) := \mathrm{Re}(\nu(A)), \qquad \nu_i(A) := \mathrm{Im}(\nu(A))$$

$$\nu = \nu_r + i\nu_i = (\nu_r^+ - \nu_r^-) + i(\nu_i^+ - \nu_i^-)$$

$$\overline{\nu} = \nu_r - i\nu_i$$

$$\nu_n \longrightarrow \nu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \nu_n(A) \longrightarrow \nu(A), \qquad \forall A \in \Gamma$$

复测度在极限运算下封闭

复测度的全变差测度

可测空间(X,Γ),　ν 是复测度

全变差测度$|\nu|$:

$$|\nu|(E)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(E_k)|:\quad E=\bigsqcup_{k=1}^{n}E_k\right\}$$

绝对连续测度的全变差测度, 实部, 虚部

测度空间(X,Γ,m), $h\in\mathscr{L}^1(X,m;\mathbb{C})$

$$d\nu := h\ dm \Longrightarrow d|\nu| = |h|\ dm$$

$$\nu(E) = \int_E h\ dm, \qquad |\nu|(E) = \int_E |h|\ dm$$

$$\mathrm{Re}\nu(E) = \int_E \mathrm{Re}h\ dm, \qquad \mathrm{Im}\nu(E) = \int_E \mathrm{Im}h\ dm$$

奇异测度定义

可测空间(X,Γ), μ,ν 是复测度

$$\nu \perp \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{剖分} X = X_+ \bigsqcup X_- : \quad \mu(X_-) = 0, \quad \nu(X_+) = 0$$

注记: $\mu(E) = \mu(E \cap X_+), \quad \nu(E) = \nu(E \cap X_-), \quad \forall\ E \in \Gamma$

绝对连续测度定义

可测空间(X,Γ), m 是正测度, ν是复测度

$$\nu \ll m \quad \Longleftrightarrow \text{“} m(E)=0 \Longrightarrow \nu(E)=0 \text{”}$$

绝对连续测度和奇异测度位于两个极端

测度空间(X, Γ, m)，　m 是正测度，　ν是复测度

$$\nu \ll m, \qquad \nu \perp m \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = 0$$

奇异测度例子:

Lebesgue测度 $\perp$ *Dirac*测度（零延拓），

从整体的角度看待复测度

- 可测空间(X, Γ)上复测度全体构成Banach空间

  - 测度空间(X, Γ, m)上复测度的范数:

$$\|\nu\| = |\nu|(X) < \infty$$

  - 特例: $d\nu = h\ dm, \quad h \in \mathscr{L}^1(X, dm),$

$$\|\nu\| = \|h\|_{L^1} < \infty$$

Hahn分解定理

可测空间(X,Γ), ν是实测度

$\exists!$(相差零测集)剖分$X = X_+ \bigsqcup X_-$:

$$\nu(E) \begin{cases} \geqslant 0, & \text{if } E \subset X_+ \\ \\ \leqslant 0, & \text{if } E \subset X_-. \end{cases}$$

Hahn分解定理的例子

测度空间(X,Γ,m), $h\in\mathscr{L}^1(X,dm,\mathbb{R})$

对于实测度$d\nu = h\ dm$, $\exists!$(相差零测集)剖分$X = A_+\bigsqcup A_-$:

$$A_+ = \{x\in X : h(x)\geqslant 0\},\qquad A_- = \{x\in X : h(x)<0\}$$

$$\nu(E)\begin{cases}\geqslant 0, & \text{if } E\subset A_+\\ \leqslant 0, & \text{if } E\subset A_-.\end{cases}$$

Jordan分解定理

可测空间(X,Γ) 上实测度μ, $\exists!$有限正测度 $\mu^{\pm}$:

$$\mu = \mu^{+} - \mu^{-}, \qquad \mu^{+} \perp \mu^{-}$$

$$|\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$$

Jordan分解具体表达式

可测空间(X,Γ)上实测度μ

实测度μ的Hahn分解：$\quad X = X_+ \bigsqcup X_-$

$$\mu^+(E) = \mu(E\cap X_+), \qquad \mu^-(E) = \mu(E\cap X_-)$$

Radon-Nikodym定理

σ有限测度空间(X, Γ, m), ν是有限符号测度或复测度

$$\nu \ll m \quad \overset{\exists! h \in L^1(X,m)}{\Longleftrightarrow} \quad d\nu = h\, dm.$$

注记: ν是有限正测度 $\Longrightarrow h \in L^+ \cap L^1(X, m)$

注记: h称为测度ν关于测度m的Radon-Nikodym导数, 记为

$$h = \frac{d\nu}{dm}$$

可测空间(X, Γ, m), ν是复(符号)测度, $m, |\nu|$是σ有限测度

$\exists!$复(符号)测度ν_a, ν_s :

$a =$ *absolutely continuous measure*, $s =$ *singular measure*

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_a + \nu_s \\ \nu_a &\ll m, \qquad |\nu_s| \perp m \\ d\nu_a &= hdm \qquad (h^{\pm}\text{之一} \in L^1(X, dm)) \end{aligned}$$

注记: 当ν是正测度时, ν_a, ν_s也是正测度.

Cantor 测度是奇异连续测度

Cantor 测度:

$$\mu[a,b] = f(b) - f(a), \qquad f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}, \qquad c_n = 0, 1.$$

- $\mu([0,1] \setminus C) = 0, \qquad \mu(C) = 1$:

$$\mu(C_n \setminus C_{n+1}) = 0, \qquad \mu(C_n) = 1$$

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n, \qquad [0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \setminus C_{n+1}.$$

- $\mu\{x\} = 0$:

$$C_n \setminus C_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{2^n} I_{k,n}, \qquad \mu(I_{k,n}) = \frac{1}{2^n}, \qquad \operatorname{diam} I_k = \frac{1}{3^n}.$$

$$\forall x \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \Longrightarrow \mu\{x\} \leqslant \mu(I_{k_0,n}) \to 0.$$

测度分解

σ有限测度空间(X, Γ, m). $\forall\, x \in X \Longrightarrow \{x\} \in \Gamma$.

ν是σ有限测度 $\Longrightarrow$ $\exists!$分解：

$$\nu = \nu_c + \nu_d = \nu_{ac} + \nu_{sc} + \nu_d$$

$$\nu_{ac} \ll m, \qquad \nu_{sc} \perp m, \qquad \nu_d \perp m$$

注记: ν_d是离散测度: $\exists$可数集K, $\nu_d(K^c) = 0$.

ν_c是连续测度: $\forall\, x \in X \Longrightarrow \nu(\{x\}) = 0$.

d=discrete, c=continuous

例如: Lebesgue测度, 计数测度.

关于复测度的积分

$$f \in L^1(X, d|\nu|)$$

$$\int_X f\, d\nu := \left(\int_X f\, d\nu_r^+ - \int_X f\, d\nu_r^-\right) + i\left(\int_X f\, d\nu_i^+ - \int_X f\, d\nu_i^-\right)$$

$$\left|\int_X f\, d\nu\right| \leqslant \int_X |f|\, d|\nu|, \qquad \overline{\int_X f\, d\nu} = \int_X \bar{f}\, d\bar{\nu}$$

Lebesgue控制收敛定理对于符号测度和复测度成立

(符号测度和复测度可分解为正测度)

设X是局部紧Hausdorff空间. 对于$C_c(X)$上任意正有界线性泛函

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(|I(f)| \leq M\|f\|, \qquad f \geqslant 0 \Longrightarrow I(f) \geqslant 0)$$

存在唯一X上Radon正测度μ:

$$I(f) = \int_X f \, d\mu.$$

注记: Riesz表示定理表明由积分造测度$\xrightarrow{\text{推广}}$ Daniell积分

复测度是广义函数

设X是局部紧Hausdorff空间.

$C_c(X)$是X上具有紧支集的连续函数全体.

$\mathcal{M}(X)$是X上复测度全体.

$$\Longrightarrow \mathcal{M}(X) \cong C_c(X)^* \qquad \text{等距同构}$$