本讲内容

- 可积函数的逼近
- Lebesgue 积分与Riemann积分的关系

逼近的精髓: 从规则到不规则, 从简单到复杂.

实数理论	$\mathbb{Q}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{R}$
极限理论	常值数列	$\longrightarrow$	差不多常值数列
连续函数	常值函数	$\longrightarrow$	差不多常值函数
可导函数	线性函数	$\longrightarrow$	差不多线性函数
微分学	多项式	$\longrightarrow$	初等函数
积分学	阶梯函数	$\longrightarrow$	Riemann可积函数
实分析	简单函数	$\longrightarrow$	Lebesgue可积函数
泛函分析	光滑函数	$\longrightarrow$	广义函数

框架结构———核心(主要矛盾)+运算(代数、分析)

问题简化

- 一般情形归结于特殊情形:

$$f \in L^1(E) \xLeftrightarrow{\text{零扩充}} f\chi_E \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

光滑函数的稠密性定理

Theorem 1

具有紧支撑的光滑函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

- $\mathbb{Q} : \mathbb{R} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : L^1(\mathbb{R}^n)$.

光滑函数的稠密性定理

- 稠密性的三种等价描述:

$$L^1(\mathbb{R}^n) \xlongequal{\text{拓扑表达}} \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{L^1}$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\text{极限表达}} \exists \text{具有紧支撑的光滑函数列} g_k \xrightarrow[a.e.]{L^1} f$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow[\text{好+小}]{\text{逼近表达}} \forall\, \epsilon > 0, \exists \text{分解}$$

$$f = g + h, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

证明: (1) $L^1(\mathbb{R}^n) \xRightarrow[K\text{是闭球，} f = f\chi_K + f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus K}]{\text{无穷远点处积分绝对连续性}}$ 归结于$L^1(K)$.

(2) $L^1(K)$归结于紧集上简单函数.

$$\varphi_k \to f, \quad |\varphi_k| \leqslant |f| \xRightarrow{\text{控制收敛}} \varphi_k \xrightarrow{L^1} f.$$

(3) 紧集上简单函数$\in L^\infty(K) \xRightarrow{Lusin}$ 具有紧支撑的光滑函数.

$$\exists K_\epsilon, \quad \exists g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n): \qquad m(K \setminus K_\epsilon) < \epsilon, \quad f = g \text{ on } K_\epsilon.$$

(4) 具有紧支撑的光滑函数$\Longrightarrow$一致连续$\Longrightarrow$ 差不多阶梯函数.

(5) 依L^1收敛$\xRightarrow{\text{Chebyshev不等式}}$ 依测度收敛

$\xRightarrow{\text{Riesz定理}}$ $\exists$ 子列a.e. 收敛

Chebyshev不等式

- Chebyshev不等式

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \geqslant \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} |f(x)| dx \geqslant \epsilon m([|f| \geqslant \epsilon]).$$

$$m([|f| \geqslant \epsilon]) = \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} dx \leqslant \int_{[|f| \geqslant \epsilon]} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\epsilon} dx = \frac{1}{\epsilon} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

两种收敛性关系

- L^1收敛蕴含依测度收敛:

$$f_k \xrightarrow{L^1} f$$

$$\xRightarrow{\text{Chebyshev}} \quad m([|f_k - f| \geqslant \epsilon]) \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) - f(x)|dx \xrightarrow[\epsilon \text{ fixed}]{k\to\infty} 0$$

$$\Longrightarrow \quad f_k \xrightarrow{m} f$$

- 可积函数在L^1范数下连续

$$\lim_{h\to 0}\left\|f(x+h)-f(x)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xlongequal{f\in L^1(\mathbb{R}^n)} 0.$$

续

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists$ 好+小分解,

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{4}.$$

$$\Longrightarrow \|f(x+h) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{2} + 2\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

Theorem 2

具有紧支撑的阶梯函数在$L^1(\mathbb{R}^n)$稠密.

- 设$\|g_n\|_{L^\infty[a,b]} \leqslant 1$. 则下列等价:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx = 0, \quad f \in L^1[a,b];$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx = 0, \quad f \in \chi_{[a,c]}, \forall c \in [a,b].$$

证明: $$\Gamma := \left\{ f \in L^1[a,b] : \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) g_n(x) dx = 0 \right\}$$

$$\Gamma \supset \{\text{阶梯函数}\} \Longrightarrow \Gamma \supset L^1[a,b]$$

Riemann-Lebesgue引理续

$$\Gamma \ni f = f_1 + f_2, \quad f_1\text{阶梯函数}, \quad f_2\text{小(积分意义下)}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f g_n = \int_a^b f_1 g_n + \int_a^b f_2 g_n$$

$$\Longrightarrow \quad \text{右}1 \xrightarrow{\text{假设}} 0, \qquad \text{右}2 \xlongequal{g_n\text{一致有界},\, f_2\text{小}} o(1).$$

- 古典的Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \xlongequal{f\in L^1[0,2\pi]} 0.$$

- 例题:

$$\lim_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) \xlongequal{E\subset\mathbb{R}^n\text{可测}} m(E).$$

证明: 情形1: $m(E) < +\infty$. $(\Longrightarrow \chi_E \in L^1)$.

$$
\begin{aligned}
|m(E \cap (h+E)) - m(E)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E\cap(h+E)} dm - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E dm\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\chi_E \chi_{h+E} - \chi_E \chi_E\right| dm \\
&\leqslant \|\chi_{h+E} - \chi_E\|_{L^1} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

例题续

<u>情形2: $m(E)=+\infty$:</u> 令$E_k=E\cap B(0,k)$

$$
\begin{aligned}
\varliminf_{h\to 0} m(E\cap(h+E)) &\geqslant \varliminf_{h\to 0} m(E_k\cap(h+E_k)) \\
&= m(E_k) \qquad (\text{情形}1) \\
&\longrightarrow m(E)=\infty.
\end{aligned}
$$

- Lebesgue 积分是Riemann积分的推广:

$$R[a,b] \subset L^1[a,b], \qquad \text{且积分值相同:}$$

$$(R)\int_a^b f(x)dx \xlongequal{\forall f\in R[a,b]} \int_{[a,b]} f(x)dm(x).$$

证明: $$f \in R[a,b] \xrightarrow[f\text{有界} \Longrightarrow f \in L^{\infty}[a,b]]{f\ a.e.\text{连续} \Longrightarrow f\text{可测}} f \in L^{1}[a,b].$$

续

证明: 取单调趋于零的分割:

$$\pi^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b,$$

$M_i^{(n)}, m_i^{(n)}$分别是f在区间$[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$的上确界和下确界

续

$$\int_{[a,b]} f(x)dm(x) = \sum_{i=1}^{k_n} \int_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f(x)dm(x)$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)}(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underline{\int}_a^b f(x)dx \leqslant \int_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \overline{\int}_a^b f(x)dx$$

$$\xrightarrow{f\in R[a,b]}$$ 三者相同.

- 设$E_k \nearrow E, \quad f \in L^1(E_k)$, 则

$$f \in L^1(E) \iff \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx\text{存在且有限}$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

续

证明: f在E_k $(\forall k)$ 可测$\Longrightarrow$ f可测$\Longrightarrow$ $|f|$ 在E上积分有定义, 而且

$$\int_E |f(x)|dx \ \underline{\underline{\text{单调收敛}}}\ \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx.$$

$$\Longrightarrow \quad \text{结论1成立.}$$

结论2是Lebesgue控制收敛定理的直接推论.

注记

单调收敛定理, 控制收敛定理联合使用

- 单调收敛定理$\Longrightarrow$ 可积性
- 控制收敛定理$\Longrightarrow$ 计算积分

- 设$f \in R[0,b] \quad (\forall b>0)$, 则

$$
\begin{aligned}
f \in L^1[0,+\infty) &\iff \lim_{b\to+\infty}\int_0^b |f(x)|dx\text{存在且有限} \\
&\iff |f| \in R[0,+\infty) \\
&\iff f \in R[0,+\infty), \quad |f| \in R[0,+\infty) \\
&\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f(x)dm(x) \quad = \quad (R)\int_0^{+\infty} f(x)dx
\end{aligned}
$$

Lebesgue积分 广义Riemann积分

$$\text{证明：} f \in L^1[0,+\infty) \xRightarrow{\text{Cauchy准则}} |f| \in R[0,+\infty)$$

$$\xRightarrow{f\ a.e.\text{连续}} f \in R[0,+\infty).$$

续

- 绝对收敛的广义Riemann积分可视为Lebesgue积分.

- 广义Riemann可积$\nRightarrow$ Lebesgue可积

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{(n,n+1]} \in R[0,+\infty) \setminus L^1[0,+\infty).$$