本节主要内容

- 分布函数
- 微分理论

分布函数

- $E \subset \mathbb{R}^n$Lebesgue可测.

$$f \in \mathscr{L}(E), \qquad g := |f|$$

- 图形下方的水平截面(水平截面落在曲边梯形的部分)

$$\{(x, t_0) : \quad x \in E, \ t_0 < g(x)\}, \qquad \text{其中} t_0 \in [0, \infty)\text{固定}.$$

- 水平截面的测度

$$m(\{x \in E : \quad t_0 < g(x)\}) = m(g^{-1}(t_0, +\infty))$$

分布函数续

- f的分布函数

$$f_*(t) := m\{x \in E : \quad t < |f(x)|\} \xlongequal{g=|f|} m(g^{-1}(t,+\infty))$$

- 几何意义:

  $|f|$图形下方的水平截面的测度就是分布函数$f_*(t)$

- 测度论中, 函数的地位被分布函数取代.

分布函数在积分中的作用：　蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|dx \quad \xlongequal[\text{利用微元法}]{f\text{的图形的下方的面积}} \quad \int_0^{+\infty} f_*(t)dt$$

积分的蛋糕表示

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \quad \xlongequal[p\in[1,\infty)]{f\in\mathscr{L}(E)} \quad \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t)dt$$

分布函数的积分表示

- $|f|$的图形下方:

$$U(f) = \left\{(x,t) \in E \times [0, +\infty] : \quad t < |f(x)|\right\}$$

- 分布函数的积分表示

$$f_*(t) = \int_E \chi_{U(f)}(x,t)dx$$

积分的蛋糕表示证明

$$
\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, dx &= \int_E dx \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt \\
&= \int_E dx \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \chi_{U(f)}(x,t) dt \\
&\xlongequal{Fubini} \int_0^{+\infty} pt^{p-1} dt \int_E \chi_{U(f)}(x,t) dx \\
&= \int_0^{+\infty} pt^{p-1} f_*(t) dt
\end{aligned}
$$

分布函数总结

抽象积分	Riemann积分
抽象函数$f(x)$	具体函数$f_*(t)$

$$\text{抽象积分} \xRightarrow[\text{具体化的桥梁}]{\text{分布函数}} \text{Riemann积分}$$

- 第五章: 微分理论

本章核心内容：微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 实分析的抽象积分理论是积分理论推广的最广场所.
- 微分几何的流形和纤维丛理论是导数推广的最广场所.

Vitali覆盖的定义

$E \subset \mathbb{R}, \qquad \Gamma$是$E$的Vitali覆盖

- Γ是E 的覆盖
- $\Gamma=$ 非退化的闭区间族
- 每点处无穷小层次覆盖:

$$\forall\, x \in E, \quad \inf\left\{|I| : \quad x \in I \in \Gamma\right\} = 0$$

Vitali覆盖定理

Theorem 1 (Vitali覆盖定理)

$E \subset \mathbb{R}$, $m^*(E) < \infty$, Γ 是E的Vitali覆盖.

$$\Longrightarrow E \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j \sqcup Z \qquad (\exists I_j \in \Gamma, m(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} I_j) < \infty,\ m(Z) = 0)$$

$$\overset{\text{逐次收割}}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0, \quad E \subset \bigsqcup_{j=1}^{n(\epsilon)} I_j \sqcup E_\epsilon \quad (\exists I_j \in \Gamma, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon.)$$

Vitali覆盖

- Vitali覆盖是分析的手术刀:

$$\text{无穷} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{可列、有限}$$

- 应用：

$$\text{导数} \xrightarrow{\text{转化为}} \text{差商}$$

续

注记: 分析的精髓是极限, 逼近(好+小).

具体操作: 磨去边角料, 回到大本营.

Theorem 2 (Lebesgue 微分定理)

单调函数几乎处处可导.

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\uparrow\Longrightarrow f'\ a.e.\text{存在且有限}.$$

续

证明: 证明思路: 总是记$h > 0$. 我们只要证明

$$(1).\qquad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

$$(2).\qquad \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \overset{a.e.}{\geqslant} \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

(3). f' $a.e.$不等于∞.

Lebesgue 微分定理的证明

- (1)$\Longrightarrow$ (2):

$$g(x)\uparrow = -f(t) \qquad (x+t=a+b, \quad x\in[a,b]).$$

$$(1) \quad \xRightarrow{\;g\uparrow\;} \quad \overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{g(x)-g(x-h)}{h}$$

$$\xRightarrow{\;g(x)=-f(t)\;} \quad \overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{-f(t-h)+f(t)}{h} \overset{a.e.}{\leqslant} \underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{-f(t)+f(t+h)}{h}$$

$$\Longrightarrow \quad (2)\text{成立}.$$

- (3)的证明:

$$E := \{x \in (a,b) : f'(x) = \infty\} \qquad \text{固定} N > 0$$

$$\Gamma := \left\{[x, x+h] \subset (a,b) : \quad x \in E, \ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > N\right\}$$

Γ是E的Vitali覆盖

续

$$\xRightarrow{\text{Vitali定理}} \quad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m \sqcup E_{\frac{1}{N}}, \qquad m(E_{\frac{1}{N}}) < \frac{1}{N},$$

$$\xRightarrow{I_j=[x_j,x_j+h_j]} \quad m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{m} h_j + \frac{1}{N}$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}(f(x_j+h_j) - f(x_j)) + \frac{1}{N}$$

$$\overset{f\uparrow}{\leqslant} \frac{1}{N}(f(b) - f(a) + 1) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty).$$

(1)的证明:

- (1)描述的是a.e.成立的不等式.
- 只要证明该不等式不成立的集合是零测集.
- 将该零测集表示为可列个集合的并.

续

- $\forall\ R, r \in \mathbb{Q}, \quad R > r,$ 记

$$E := \left\{ x \in (a,b) : \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > R > r > \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right\}$$

- 我们只要证明E是零测集.

右上导数>左下导数的点构成零测集

反证法:

- 设$m^*(E) \neq 0$.　(注意: $E \subset (a, b)$)
- 取开集$G \supset E$:

$$m(G) < \frac{R + r}{2r} m^*(E).$$

Lebesgue 微分定理的证明(续3)

- 出发点

$$r > \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

- 构造Vitali覆盖

$$\Gamma_E = \left\{[x-h, x] \subset (a,b) \cap G : x \in E, \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < r\right\}$$

$$\xRightarrow{\text{Vitali}} \quad E \subset I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_p \sqcup E_\epsilon, \qquad I_j = [x_j - h_j, x_j] \in \Gamma_E, \quad m(E_\epsilon) < \epsilon$$

续

- 出发点
$$y \in E, \qquad \overline{\lim_{0<k\to 0}} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} > R.$$

- 取E的去掉边角料的部分:
$$\begin{aligned} A &= E\text{中被Vitali有限项覆盖的部分} \\ &:= E \cap (\overset{\circ}{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \overset{\circ}{I}_p) \end{aligned}$$

- 注记: $\overset{\circ}{I} = I$的内部

续

- 构造Vitali覆盖

$$A = E \cap (\mathring{I}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathring{I}_p)$$

$$\Gamma_A = \left\{ [y, y+k] \subset \bigsqcup_{j=1}^{p} \mathring{I}_j : \quad y \in A, \quad \frac{f(y+k) - f(y)}{k} > R \right\}$$

$$\xRightarrow{\text{Vitali}} A \subset J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_q \sqcup A_\epsilon, \quad J_i = [y_i, y_i + k_i] \in \Gamma_A, \quad m(A_\epsilon) < \epsilon.$$

Lebesgue 微分定理的证明(续4)

- 综上,

$$E \subset J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \bigsqcup A_\epsilon \cup E_\epsilon \cup \text{有限集}.$$

$$J_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup J_q \subset I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_p \subset G.$$

续

- 考察f在J_i, I_j上跳跃度

$$\xrightarrow{\quad f\uparrow \quad} \qquad \sum_{i=1}^{q}(f(y_i+k_i)-f(y_i)) \leqslant \sum_{j=1}^{p}(f(x_j)-f(x_j-h_j)).$$

续

- 利用构造中的伸缩率条件:

$$\text{上式左边} = \sum_{i=1}^{q} (f(y_i + k_i) - f(y_i)) \geqslant R \sum_{i=1}^{q} k_i \geqslant R(m^*(E) - 2\epsilon)$$

$$\text{上式右边} = \sum_{j=1}^{p} (f(x_j) - f(x_j - h_j)) \leqslant rm(G) < \frac{R+r}{2} m^*(E).$$

矛盾

Vitali覆盖的构造

- 从关于导数的不等式或等式出发
- 脱去极限的外衣
- 提供Vitali覆盖.

Vitali覆盖的方法总结

- Vitali覆盖$\xlongequal[\text{扰动之法}]{\text{退一步海阔天空}}$处理极限的规则化方法

抽象集合	区间
导数	差商

集合、导数 $\xrightarrow[\text{去极限: 保留重要信息}]{\text{炼钢之法: 去粗存精}}$ 区间、差商

- Sobolev空间:

$$W^{1,1}[a,b] := \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\text{可测} \mid f'a.e.\text{存在}, \quad f, f' \in L^1[a,b] \right\}.$$

- 两个指标:

(导数指标, 积分指标)

- 与Sobolev理论相比: 这里对导数的要求更强.

Lebesgue定理

Theorem 3 (Lebesgue定理)

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\uparrow\Longrightarrow f\in W^{1,1}[a,b],\qquad \int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a).$$

反例

- $f =$ Cantor函数 $\uparrow$,

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Lebesgue定理的证明

证明: 常值延拓$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\xRightarrow{f\uparrow} \quad f \;\; a.e.\text{连续}$$

$$\Longrightarrow \quad f\text{可测}, \quad f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\text{可测}, \overset{a.e.}{\geqslant} 0$$

Lebesgue定理的证明续

$$\xrightarrow[f'\in L^+]{Fatou} \int_a^b f'(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b \frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} n\left(\int_b^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^{a+1/n} f(x)dx\right)$$

$$\leqslant f(b)-f(a)$$