本节主要内容

- 逐项微分定理

- BV[a,b],　AC[a,b]

利用单调增加函数帮助研究绝对连续函数.

AC[a,b]在微积分基本定理中起着关键作用.

Theorem 1 (导数和积分交换次序)

$$\left|\frac{\partial f(\cdot,t)}{\partial t}\right| \leqslant g \in L^1(E)$$

$$\xrightarrow[f_t\text{存在}]{f,\,f_t\text{关于}x\text{可积}} \frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx = \int_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx.$$

Fubini逐项微分定理

条件:

- 在L^+框架内: $f_n' \in L^+$加强为$f_n \uparrow$
- 两边有意义: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

Theorem 2 (Fubini逐项微分定理)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

- Fubini逐项微分定理与Fubini定理不同:

它是a.e.成立的等式;　　求导和积分交换次序.

- Fubini逐项微分定理的条件:

逐项求导后的加强版本的L^+框架内.

证明: $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{N} f_n + R_N, \qquad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{N} f_n' + R_N'$$

$$\xRightarrow[\text{若}\lim\limits_{N\to\infty} R_N' \exists]{N\to\infty} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' \xlongequal{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} f_n' + \lim_{N\to\infty} R_N'.$$

补充证明:

$$f_n\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R_{N+1}\text{关于}x\uparrow$$

$$\Longrightarrow \quad R'_N \xlongequal{a.e.} f'_{N+1} + R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} R'_{N+1} \overset{a.e.}{\geqslant} 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} R'_N \exists$$

续

$$0 \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N' \overset{Fatou}{\leqslant} \varliminf_{N\to\infty} \int_a^b R_N' \overset{R_N\uparrow}{\leqslant} \varliminf_{N\to\infty} \left(R_N(b) - R_N(a)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{N\to\infty} R_N' \xlongequal{a.e.} 0.$$

例题

- $\exists\, f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$严格单调增加， $f' \xlongequal{a.e.} 0.$

例题

- 构造:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{[r_n,1]}(x), \quad 其中 (0,1) \cap \mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x) \xlongequal[\text{Fubini逐项微分定理}]{a.e.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi'_{[r_n,1]}(x) \xlongequal{a.e.} 0$$

§2 $BV[a,b]$

- $[a,b]$上有界变差函数全体$BV[a,b]$

$$
\begin{aligned}
BV[a,b] &= \left\{f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \mid V_a^b f < +\infty\right\} \\
&= \text{包含}[a,b]\text{上所有单调增加函数的最小的线性空间} \\
&= \text{由}[a,b]\text{上所有单调增加函数生成的线性空间}
\end{aligned}
$$

- 全变差

$$V_a^b f = \sup_{a=x_0<\cdots<x_n=b} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

曲线可求长

- $f \in BV[a,b] \Longleftrightarrow f$作为曲线可求长.

曲线可求长续

- 不可求长曲线:

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x} \in C[0,1] \setminus BV[0,1].$$

$$\text{剖分}0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1}$$

$$(\text{剖分点}x_{2k-1} = \frac{1}{((n-k+1)+\frac{1}{2})\pi} < \frac{1}{(n-k+1)\pi} = x_{2k})$$

$$V_0^1 f \geqslant \sum_{k=1}^{2n+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \geqslant c\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty \qquad .$$

- 全变差和积分的相似性

全变差		积分
分割跳跃取极限		分割求和取极限
$V_a^b f$	$\xlongequal[\text{全变差的计算方法}]{f\in AC[a,b]}$	$\int_a^b \lvert f'\rvert$

- $f\uparrow \Longrightarrow V_a^b f = f(b) - f(a).$

全变差测度

- 全变差

$$d\nu = f' dm, \qquad d|\nu| = |f'| dm$$

$$V_a^b f = |\nu|([a, b]) = \int_a^b d|\nu| = \int_a^b |f'| dm$$

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)| : \quad E = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k \right\}$$

有界变差对积分限的可加性

- 有界变差对积分限的可加性

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f \qquad \forall\ c \in (a, b).$$

证明： (1). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant V_a^c f + V_c^b f.$$

(2). 对于$\forall\ a = x_0 < \cdots < x_m = c, \quad c = y_0 < \cdots < y_n = b$

$$V_a^b f \geqslant \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{j=1}^{n} |f(y_j) - f(y_{j-1})|$$

- Jordan分解定理

$$f \in BV[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad f = f_1 - f_2 \quad (\exists f_1, f_2 \uparrow).$$

证明：“ $\Longleftarrow$ ”

$$f_1, f_2 \uparrow \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f \leqslant V_a^b f_1 + V_a^b f_2 < +\infty.$$

Jordan分解定理续

“$\Longrightarrow$”

$$f_1(x) := V_a^x f, \qquad f_2 := f_1 - f$$

$$\begin{aligned} f_2(y) - f_2(x) &\xlongequal{y>x} (V_a^y f - f(y)) - (V_a^x f - f(x)) \\ &= V_x^y f - (f(y) - f(x)) \geqslant 0. \end{aligned}$$

有界变差是Sobolev

- $BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$.

(因为↑函数$\in W^{1,1}[a,b]$)

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b]/\sim \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftarrows}} AC[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

注记

- 由微积分基本定理读出绝对连续函数的刻画性质:

反解

绝对连续函数定义: Motivation

$$f \in AC[a,b] \Longrightarrow \exists g \in L^1[a,b]: \quad f(x) = \int_a^x g + c$$

$$\xRightarrow{|g| \in L^1} \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)) \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

$$\leqslant \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)} |g| = 0$$

绝对连续函数的定义

$$f \in AC[a,b]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : m\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\Big) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

绝对连续函数是连续的加强版本, C^1的弱化版本

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b]$$

绝对连续函数是有界变差函数

$$AC[a,b] \subset BV[a,b]$$

$$V_a^b f \xlongequal{\epsilon=1, \|\pi\|<\delta} \sum_{k=1}^{n} V_{c_{i-1}}^{c_i} f \leqslant n.$$

空间包含关系

$$C^1[a,b] \subset AC[a,b] \subset C[a,b] \cap BV[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b] \subset L^1$$

Cantor函数是单调增加连续函数, 但不是绝对连续函数

例题

$$f \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad V_a^b f = V_a^b |f|$$

- 情形一 $f(x)f(y) \geqslant 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| = |f(x) - f(y)|$$

- 情形二 $f(x)f(y) < 0 \Longrightarrow \exists\, \xi: \quad f(\xi) = 0$:

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant \big||f(x)| - |f(\xi)|\big| + \big||f(\xi)| - |f(y)|\big|$$

续

$$\forall \text{ 分割}\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\xRightarrow{\text{加入分割点}} \quad \forall \text{ 新分割}\pi' : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b$$

续

满足

$$\sum_{k=1}^{n}\Big||f(x_k)|-|f(x_{k-1})|\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Big|f(x_k)-f(x_{k-1})\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\Big||f(y_k)|-|f(y_{k-1})|\Big|$$

$$\Longrightarrow \qquad V_a^b f = V_a^b |f|$$

Stieltjes积分

$$\int_a^b \varphi(t)df(t) \quad \xlongequal[\varphi \in C[a,b]]{f \in BV[a,b]} \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)\big(f(t_j) - f(t_{j-1})\big)$$

$$\forall\, \pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad \forall\, \xi \in [t_{j-1}, t_j].$$

$$f \in BV[a,b] \xRightarrow[\text{对Stieltjes积分无影响}]{\text{至多可数、第一类间断点}} \text{可设}f\text{右连续，} f(a) = 0.$$

有界变差函数作为广义函数

$$BV_0[a,b] := \{f \in BV[a,b], \quad f\text{右连续，} f(a) = 0.\}$$

$$f \in BV_0[a,b] \text{ 视为测度} df(t).$$

$$C[a,b]^* = BV_0[a,b].$$