本讲主要内容

- Lebesgue框架下微积分基本定理
- 加强版本

微积分基本定理

$$C[a,b] \underset{\dfrac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} C^1[a,b]/\mathbb{R} \qquad \text{（双射）}$$

- 局部和整体溶于一炉.
- 分析的基石.

- Lebesgue框架下微积分基本定理:

$$L^1[a,b] \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int_a^x}{\rightleftharpoons}} AC[a,b] \qquad （双射）$$

(a.e. 相等视为恒等) (相差常数视为恒等)

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$\int_a^x$ 单射 $\frac{d}{dx}$ 单射

已知结果

- 求导:

$$AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} : AC[a,b] \longrightarrow L^1[a,b].$$

- 积分: 引入绝对连续函数的Motivation

$$\int_a^x : L^1[a,b] \longrightarrow AC[a,b].$$

注记

- 证明分为三步.
- Lebesgue框架下微积分基本定理的内容丰富:

  其解读参见证明的三个步骤.

证明分为三步: 第一步

Theorem 1 (微积分基本定理的特殊情形)

$$f' \xlongequal{a.e.} 0 \overset{f\in AC[a,b]}{\underset{\text{微积分基本定理}}{\Longleftrightarrow}} f = \text{常数}.$$

续

回忆:

$$f \in AC[a,b] \iff \lim_{m(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k))\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 0$$

续

证明: 任意固定$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$:

$$m\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)\right) < \delta \xRightarrow{f\in AC[a,b]} \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

续

- 固定$x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0)\exists$, 只要证明$f(x_0) = f(a)$.
- Vitali覆盖:

$$E := \{y \in (a, x_0) : \quad f'(y) = 0\}$$

$$\Gamma_E = \left\{[y, y+h] \subset (a, x_0) : \; y \in E, h > 0, \left|\frac{f(y+h) - f(y)}{h}\right| < \epsilon\right\}$$

续

$$\xRightarrow{\text{Vitali}} \quad E \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta, \qquad m(E_\delta) < \delta, \quad [y_i, y_i + h_i] \in \Gamma$$

$$\xRightarrow{m(Z)=0} \quad (a, x_0) = E \sqcup Z \subset \bigsqcup_{i=1}^{m} [y_i, y_i + h_i] \sqcup E_\delta \sqcup Z.$$

- $[a, x_0]$的剖分：

$$\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]\text{的端点添加}(a, x_0)\text{的端点}.$$

- f在除去 $\bigsqcup_{i=1}^{m}[y_i, y_i + h_i]$以后剩下的剖分区间的跳跃度 $< \epsilon$

续

$$\Longrightarrow \quad |f(x_0) - f(a)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(y_i + h_i) - f(y_i)| + \epsilon$$

$$< \epsilon(\sum_{i=1}^{n} h_i) + \epsilon \leqslant \epsilon(b - a + 1).$$

证明分为三步: 第二步

- $$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

证明:　利用积分的绝对连续性

$$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow \int_a^x f \in AC[a,b] \subset BV[a,b] \subset W^{1,1}[a,b].$$

下面只要证明:

$$F' \xlongequal{a.e.} f(x)$$

其中

$$F(x) := \int_a^x f \in W^{1,1}[a,b], \qquad f \in L^1(\mathbb{R})(\text{零扩充})$$

$$
\begin{aligned}
\|F' - f\|_{L^1[a,b]} &\overset{Fatou}{\leqslant} \varliminf_{h\to 0} \left\| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right\|_{L^1[a,b]} \\
&= \varliminf_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| dx \\
&= \varliminf_{h\to 0} \int_a^b \left| \frac{1}{h} \int_0^{h} f(x+t)dt - f(x) \right| dx
\end{aligned}
$$

续

$$\|F' - f\|_{L^1[a,b]} \underset{Fubini}{\overset{上式}{\leqslant}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} dt = 0.$$

补充证明:

- $$f \in L^1[a,b] \xrightarrow[f\in L^1(\mathbb{R})]{\text{零扩充}} \int_x^{x+h} f = \int_0^h f(\cdot + x).$$

(对χ_E成立(测度的平移不变性), 从而对L^1成立.)

续

补充证明:

- $$\lim_{t\to 0}\|f(x+t)-f(x))\|_{L^1(\mathbb{R})} \xlongequal[\text{平均连续性}]{f\in L^1(\mathbb{R})} 0.$$

$$\Longrightarrow \forall\, \epsilon>0, \exists\, \delta>0, \text{当}|t|<\delta\text{时}, \text{有}\|f(x+t)-f(x))\|_{L^1(\mathbb{R})}<\epsilon.$$

$$\Longrightarrow \text{当}0<h<\delta\text{时}, \text{有}\frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt \leqslant \epsilon$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h}\int_0^h \|f(x+t)-f(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}dt \longrightarrow 0.$$

证明分为三步: 第三步

- $$F \in AC[a,b] \Longrightarrow F' \in L^1[a,b]$$

$$\int_a^x F' = F(x) - F(a).$$

证明:

$$F \in AC[a,b] \subset W^{1,1}[a,b]$$

$$\xrightarrow[F' \in L^1[a,b]]{\text{第二步}} \quad \int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(\int_a^x F'\right)' \overset{a.e.}{=\!=} F'(x)$$

续

$$\xRightarrow{AC\text{线性空间}} \quad F(x) - \int_a^x F' \in AC[a,b]$$

$$\left(F(x) - \int_a^x F'\right)' \xlongequal{a.e.} 0.$$

$$\xRightarrow{\text{第一步}} \quad F(x) - \int_a^x F' = c = F(a)$$

- 微积分基本定理的加强版本

由积分恢复函数

- 已知积分可恢复函数

$$f \in L^1[a,b] \Longrightarrow f(x) \xlongequal{a.e.} \left(\int_a^x f\right)' \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \xlongequal{a.e.} 0$$

Theorem 2 (Lebesgue点定理)

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt}_{\text{消没平均振荡}} \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} 0.$$

- 等式成立的点称为f的Lebesgue点.
- 已知积分可反解出函数的具体表达式:

$$f(x) \xlongequal[f\in L^1[a,b]]{a.e.} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$$

证明: $f \in L^1[a,b]$

$\Longrightarrow$ $|f-r| \in L^1[a,b]$ (任意固定 $r \in \mathbb{Q}$)

$\Longrightarrow$ $|f(x)-r| \xlongequal{a.e.} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f-r|$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-r|+|r-f(x)| \qquad \text{(freezing技巧)}$$

$$\xlongequal{a.e.} 2|f(x)-r|$$

$$\xrightarrow{r\to f(x)} 0$$

例题1

$$f \in L^1[a,b], \qquad \int_a^b x^n f(x)dx = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Longrightarrow \qquad f \xlongequal{a.e.} 0$$

续

- 由微积分基本定理, 只要证明$F=0$:

$$f(x) \xlongequal{a.e.} F'(x), \qquad F(x) := \int_a^x f(t)dt \in AC[a,b]$$

- 只要证明$F=0$.

- $F(a)=F(b)=0$

- 绝对连续函数$x^nF(x) \in AC[a,b]$:

$$G(x) = x^n \in C^1[a,b] \subset AC[a,b]$$

$$\Longrightarrow \quad |G(x)F(x) - G(y)F(y)| \leqslant M(|F(x) - F(y)| + |G(x) - G(X)|)$$

$$\Longrightarrow \quad x^nF(x) \in AC[a,b]$$

- 正交性:

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b (x^n F(x))' dx = (x^n F(x))\Big|_a^b$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^n f(x) + n x^{n-1} F(x) dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b x^{n-1} F(x) dx = 0, \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

- 逼近:

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists 多项式 P(x):\qquad \max_{x\in[a,b]} |F(x) - P(x)| < \epsilon$$

- $F = 0$:

$$\int_a^b F(x)^2 dx = \int_a^b F(x)(F(x) - P(x))dx \leqslant \epsilon \int_a^b |F(x)|dx$$

注记

- 利用积分论处理函数:

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow{f \in L^1} \|f\|_{L^1} = 0.$$

- 利用基本定理处理函数:　坏函数直接转化为好函数处理.

$$f \xlongequal{a.e.} 0 \xLeftrightarrow[F(x)=\int_a^x f]{f \in L^1} F = 0.$$