本讲主要内容

- $L^p(E)$是Banach空间.

$$E \subset \mathbb{R}^n\text{可测}, \quad p \in [1, +\infty].$$

注记

前五章	第六章	泛函分析
个体	整体	整体
$L^1(\mathbb{R}^n)$	$L^p(\mathbb{R}^n)$	抽象Banach空间

L^p的定义

$$L^p(E) \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \left\{ f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测}: \quad \|f\|_p < +\infty \right\}$$

$$L^\infty(E) \xlongequal{\quad\quad} \left\{ f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\text{可测}: \quad f\text{在E上 } a.e. \text{ 有界} \right\}$$

$$\left(f \in L^\infty(E) \Longleftrightarrow \exists M > 0, \quad |f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M \right)$$

- $L^p(E)$空间的约定:

$L^p(E)$空间中几乎处处相等视为恒等.

L^p空间的范数

$$\|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{p\in[1,+\infty)} \|f\|_p := \left\{ \int_E |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

$\mathbb{R}^n$	$L^p(E)$
绝对值	范数
有限维	无限维

L^∞空间的范数: 取范数尽可能小的代表元，尽可能大的代表元的范数是无穷

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(E)} &= \text{ess sup}_{x\in E}|f(x)| \\
&= \inf_{m(Z)=0} \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)| \\
&= \inf\left\{M>0: \underbrace{|f(x)| \overset{a.e.}{\leqslant} M}_{\text{M是本性上界}}\right\} \\
&= \sup\left\{M>0: \underbrace{m\{x\in E: |f(x)|>M\}>0}_{\text{M不是本性上界}}\right\}
\end{aligned}
$$

- 本性上确界

$$\textit{ess sup} = \textit{essential supremum}$$

- 例题

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

本性上确界的作用

- 积分论中, 本性上确界取代上确界的作用:

$$\int_E |f| \leqslant \|f\|_\infty m(E)$$

证明: 左 $= \int_{E\setminus Z} |f| \leqslant \sup_{E\setminus Z} |f| \ \ m(E).$

- 本性上确界与上确界的关系:

$$\|f\|_{L^\infty(E)} \leqslant \sup_{x\in E\setminus Z} |f(x)|, \qquad \forall\ m(Z) = 0$$

共轭指数

- 共轭指数(p, q):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad p, q \in [1, \infty].$$

- 例子: $(p, q) = (2, 2), (1, \infty), (\infty, 1).$

- Hölder不等式:　设p, q共轭, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^p(E)}\|g\|_{L^q(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \xLeftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{p,q\in[1,+\infty)} |f(x)|^p \overset{a.e.}{=\!=} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \overset{a.e.}{=\!=} 0.$$

- Schwarz不等式:

$$f, g \in L^2(E) \Longrightarrow \|fg\|_{L^1(E)} \leqslant \|f\|_{L^2(E)} \|g\|_{L^2(E)}$$

$$\int_E |fg| \leqslant \sqrt{\int_E |f|^2} \sqrt{\int_E |g|^2}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \underset{\exists \text{常数} \lambda \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} |f(x)| \xlongequal{a.e.} \lambda |g(x)|, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0$$

设p, q是共轭指数， $p, q \in [1, +\infty)$， $a, b \geqslant 0$, 则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$等式成立 \Longleftrightarrow a^p = b^q.$$

证明： $\log x$是$(0, +\infty)$严格凹函数.

Hölder不等式的证明

情形1:　p, q之一为∞, 不妨设$p = \infty$.

$$\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \int_E |g|.$$

情形2 :　$p, q \neq \infty$

$$F(x) := \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}, \qquad G(x) := \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$$

$$\xRightarrow{\text{Young不等式}} \qquad |F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}$$

$$\|FG\|_{L^1} \leq \frac{\|F\|_p^p}{p} + \frac{\|G\|_q^q}{q} \xlongequal{\|F\|_p = \|G\|_q = 1} 1$$

Hölder不等式达到等式情形

$$\text{等号成立} \quad \Longleftrightarrow \quad |F(x)|^p \xlongequal{a.e.} |G(x)|^q$$

$$\xLongleftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{} \quad |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda|g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

Minkowski不等式

$$\|f+g\|_p \overset{\forall\ p\in[1,+\infty]}{\leqslant} \|f\|_p + \|g\|_p$$

证明: 不妨设$p \in (1,+\infty)$

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leqslant \int |f||f+g|^{p-1} + \int |g||f+g|^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p/q}
\end{aligned}
$$

Chebyshev不等式

设$p \in (0, +\infty)$, $f \in L^p(E)$,   则

$$m[|f| \geqslant \epsilon] \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

证明:

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{[|f|\geqslant\epsilon]} |f|^p \geqslant \epsilon^p m[|f| \geqslant \epsilon].$$

L^p收敛

$$f_k \xrightarrow{L^p(E)} f \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \|f_k - f\|_p \longrightarrow 0.$$

$$f_k \xrightarrow[p\in[1,\infty)]{L^p(E)} f \xRightarrow{\text{Chebyshev}} f_k \xrightarrow{m} f \xRightarrow{\text{Riesz}} f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$$

$$f_k \xrightarrow{L^\infty(E)} f \Longrightarrow f_k \xrightarrow{a.un.} f \Longrightarrow f_k \xrightarrow{m} f \qquad f_k \xrightarrow{a.e.} f$$

证明: $\forall \epsilon > 0, \quad \exists$零测集$Z$:

$$\sup_{E\setminus Z} |f_k - f| \leqslant \|f_k - f\|_\infty + \epsilon/2 \leqslant \epsilon \qquad (k \gg 1).$$

$$\Longrightarrow \quad \text{在}E \setminus Z\text{上}, f_k \xrightarrow{a.un.} f$$

L^p是线性空间

- $L^p(E)$是线性空间 $\quad (p \in [1, \infty])$.

注记: $\quad a, b \geqslant 0$

$$(a+b)^p \leqslant \begin{cases} 2^{p-1}(a^p + b^p), & \text{if} \quad p \geqslant 1 \\ a^p + b^p, & \text{if} \quad 0 < p < 1. \end{cases}$$

- $L^p(E)$是赋范线性空间 $\quad (p \in [1, \infty])$.
  - 非负性:

$$\|f\|_p \geqslant 0, \qquad \|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0, \quad \text{即} f \xlongequal{a.e.} 0$$

  - 齐性:

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p, \qquad \forall \, \alpha \in \mathbb{R}$$

  - 三角不等式

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Theorem 1

设$E \subset \mathbb{R}^n$可测, $p \in [1, +\infty]$. 则

$$L^p(E)\text{是}Banach\text{空间}.$$

注记

- Banach空间=完备赋范线性空间
- $L^p(E)$完备$\Longleftrightarrow$ Cauchy序列是收敛序列.
- $L^p(E)$中Cauchy序列:

$$\lim_{k,j\to\infty} \|f_k - f_j\|_p = 0$$

完备性证明

- $p \in [1, +\infty)$:

$$L^p\text{Cauchy} \xRightarrow{Chebyshev} \text{依测度Cauchy}$$

$$\Longrightarrow \text{依测度收敛}$$

$$\xRightarrow{Riesz} \exists a.e.\ \text{收敛子列}$$

$$\xRightarrow{Fatou} L^p\ \text{收敛}$$

回忆Chebyshev不等式：

$$m[|f| \geqslant \epsilon] \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\epsilon}\right)^p$$

完备性证明续

$$\int_E |f - f_k|^p \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_E |f_{n_j} - f_k|^p < \epsilon^p, \qquad k \gg 1$$

$$\Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L^p} f, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^p$$

完备性证明续

- $p=+\infty$：

$$
\begin{aligned}
L^\infty\text{Cauchy} &\Longrightarrow \text{在}E\setminus Z\text{一致Cauchy}\\
&\Longrightarrow \text{在}E\setminus Z\text{一致收敛}\\
&\Longrightarrow \text{依}L^\infty(E\setminus Z)\text{收敛}\\
&\Longrightarrow L^\infty(E)\ \text{收敛}
\end{aligned}
$$

完备性证明续

证明:　$\forall \epsilon > 0, \exists$零测集$Z_{kj}$:

$$\sup_{x\in E\backslash Z_{kj}} |f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \|f_k - f_j\|_\infty + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad (k, j \gg 1)$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in E\backslash Z} |f_k(x) - f_j(x)| < \epsilon, \qquad (k, j \gg 1, \quad Z = \bigcup_{k,j=1}^{\infty} Z_{kj})$$

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)\chi_{E\backslash Z}(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \|f_k - f\|_{L^\infty} \leqslant \epsilon, \qquad f = (f - f_k) + f_k \in L^\infty$$

计数测度情形

- 测度空间$(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu = \text{计数测度})$

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \left\| \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\ell^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

- 测度空间$(\mathbb{Z}_n, 2^{\mathbb{Z}_n}, \mu = \text{计数测度})$

$$\mathbb{R}^n = L^2(\mathbb{Z}_n, d\mu) = \ell^2(\mathbb{Z}_n).$$

- σ-有限测度空间(X,μ), (Y,ν),
- $f: X\times Y\to\mathbb{R}$可测,
- $p\in[1,+\infty]$.

则

$$\left(\int_Y\left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right)^{1/p}\leqslant\int_X\left(\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p}d\mu(x)$$

若$p\in(1,\infty)$, 且不等式两边有限，则等式成立仅当

$$|f(x,y)| \xlongequal{a.e.} \varphi(x)\phi(y),$$

其中$\varphi(x),\phi(y)$是非负可测函数。

例题1: 反向Hölder不等式

- 反向Hölder不等式: 设$p, q \in (-\infty, 1)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\|fg\|_{L^1(E)} \geqslant \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^q(E)}$$

- 等号成立条件:

$$\text{等号成立} \xLeftrightarrow[\exists\text{常数}\lambda\geqslant 0]{p,q\in(-\infty,1)} |f(x)|^p \xlongequal{a.e.} \lambda |g(x)|^q, \quad \text{或} g(x) \xlongequal{a.e.} 0.$$

反向Hölder不等式的证明

不妨设$p > 0$, $g \neq 0$, 共轭指数

$$u = \frac{1}{p}, \qquad v = \frac{1}{1-p}.$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p} &= \|f^p g^p g^{-p}\|_{L^1}^{1/p} \\
&\leqslant \left(\|f^p g^p\|_{L^u} \|g^{-p}\|_{L^v}\right)^{1/p} \\
&= \frac{\|fg\|_{L^1}}{\|g\|_{L^q}}.
\end{aligned}$$

- $L^p[a,b]$关于p严格↓ (Hölder不等式)
- $L^p(\mathbb{R})$ 对不同的p互不包含.

$$L^p(\mathbb{R}) \supset A^p := \left\{ f_\alpha, g_\beta : \beta < \frac{1}{p} < \alpha \right\}$$

$$f_\alpha := \frac{1}{x^\alpha}\chi_{[1,+\infty)} \in L^p(\mathbb{R}) \iff \alpha > \frac{1}{p}$$
$$g_\beta := \frac{1}{x^\beta}\chi_{(0,1)} \in L^p(\mathbb{R}) \iff \beta < \frac{1}{p}$$

临界值$\frac{1}{p}$

例题3: p范数的极限

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \xlongequal{m(E)\in(0,+\infty)} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

证明: $$\|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)} m(E)^{1/p}$$

$$\xRightarrow{\text{取上极限}} \quad \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

p范数的极限续

$$\forall\ M < \|f\|_{L^\infty(E)}$$

$$\Longrightarrow A = \Big\{x \in E: \quad |f(x)| > M\Big\}, \qquad m(A) > 0$$

$$\Longrightarrow \|f\|_{L^p(E)} \geqslant M\, m(A)^{1/p},$$

$$\xrightarrow{\text{取下确界}} \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(E)} \geqslant \|f\|_{L^\infty(E)}$$

例题4: Hölder不等式的推广

- $f, g \in L^+(E)$, $\quad p, q \in [1, \infty)$, $\quad r \in [1, +\infty]$. $\quad$ 约定$0^0 = 1$.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

$$\Longrightarrow \int_E f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_q^{1-\frac{q}{r}} \Big(\int_E f^p(x) g^q(x) dx \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

证明

$$fg = (f^p g^q)^{\frac{1}{r}} (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}}) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

$$\int_E fgdm \leqslant \left(\int_E f^p g^q dm\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_E (f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} dm\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$(f^{1-\frac{p}{r}} g^{1-\frac{q}{r}})^{r'} = (f^p)^{r'(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} (g^q)^{r'(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}$$

$r'(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$与$r'(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$倒数共轭

例题5

- $f\in L^p(\mathbb{R}^n), g\in L^q(\mathbb{R}^n), \quad p,q,r$同上例题, $r\neq\infty$

$$h(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt$$

$$\Longrightarrow \|h\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$$

证明思路： 计算$\int_{\mathbb{R}^n}(h(x))^r dx$, 利用前例题+Fubini定理