回顾：Lebesgue积分=Riemann积分+测度论

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal[\text{由微元法看蛋糕表示}]{f\text{非负有界可测}} \int_0^M m(f^{-1}[y,+\infty))dy$$

曲边梯形面积位于$[y, y+dy)$的面积微元=$f^{-1}[y,+\infty) \times [y, y+dy)$

$$\begin{aligned} (x,y) \in \text{蛋糕的第}y \geqslant 0\text{层} \quad &\Longleftrightarrow \quad (x,y) \in \text{曲边梯形} \\ &\Longleftrightarrow \quad y \leqslant f(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}[y,+\infty). \end{aligned}$$

上次内容:

- 集合论可披挂上的外衣
    - 集合具有结构:　势、包含、并、交、叉、极限;
    - 集合视为函数具有结构:　加、减、乘、除、极限.

(极限=级数=积分=导数)

注记

$$\text{集合论} \xrightarrow{\text{添加各种数学结构}} \text{数学各学科}$$

数学结构:

- 代数结构: 向量空间结构, 模结构, 乘法结构
- 序结构
- 内积结构, 范数结构
- 拓扑结构
- 积分结构
- 微分结构

本次内容:

- 集合的势是全序关系.
  - 最大势和最小势
  - 势的运算
  - 两个最重要的势$\aleph_0$和$\aleph$ (ℵ读“阿列夫”)
- 存在不可测集合

- 偏序集合$(X,\leqslant)$: X上关系满足

(1) 自身性: $\forall\ x\in X \Longrightarrow x\leqslant x$

(2) 反对称性: $x\leqslant y,\quad y\leqslant x \xRightarrow{\forall x,y\in X} x=y$

(3) 传递性: $x\leqslant y,\quad y\leqslant z \xRightarrow{\forall x,y,z\in X} x\leqslant z$

- 全序集合$(X,\leqslant)$: 还满足

(4) 全序性: $\forall\ x,\ y\in X \Longrightarrow x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x.$

势是全序

Theorem 1

Cantor-Bernstein定理: $\quad \bar{\bar{X}} \leqslant \bar{\bar{Y}}, \quad \bar{\bar{Y}} \leqslant \bar{\bar{X}} \Longrightarrow \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{Y}}$

势是全序

证: 存在单射$f: X \longrightarrow Y$ 和$g: Y \longrightarrow X$.

$$\forall x \in X \quad \xRightarrow{\text{利用}f^{-1}\text{和}g^{-1}\text{拉回}} \quad x \xrightarrow{g^{-1}} g^{-1}(x) \xrightarrow{f^{-1}} \cdots$$

(情形1) 一直继续下去, 称$x \in X_\infty$ (乒乓和局)

(情形2) 终止到X中, 称$x \in X_X$ (X负)

(情形3) 终止到Y中, 称$x \in X_Y$ (Y负)

$$\xRightarrow{\text{由此导出X的剖分}} \quad X = X_\infty \sqcup X_X \sqcup X_Y.$$

$$Y = Y_\infty \sqcup Y_X \sqcup Y_Y \quad \text{(对称结果)}.$$

注记：两人f, g对垒，拉回好处：区分胜负。

势是全序(续)

断言: $f(X_\infty) = Y_\infty$.

(1). $\forall\, y \in f(X_\infty) \xRightarrow[\exists x \in X_\infty]{\exists\text{拉回}} y := f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$一直持续

$\Longrightarrow y \in Y_\infty$

(2). $\forall\, y \in Y_\infty \xRightarrow{\exists\text{拉回}} y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$

$\Longrightarrow y = f(x), \quad x \in X_\infty$

$\Longrightarrow y \in f(X_\infty)$.

续2

断言: $f(X_X) = Y_X$

(1). $\forall\ y \in f(X_X) \xRightarrow[\exists x \in X_X]{\exists\text{拉回}} y := f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$终止到X

$\Longrightarrow y \in Y_X$

(2). $\forall\ y \in Y_X \xRightarrow{\exists\text{拉回}} y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{g^{-1}} \cdots$终止到X

$\Longrightarrow y = f(x), \quad x \in X_X$

$\Longrightarrow y \in f(X_X).$

续3

$$\xrightarrow[\text{f是单射}]{\text{由构造}} \quad f: X_\infty \longrightarrow Y_\infty, \qquad f: X_X \longrightarrow Y_X \text{必是双射}.$$

$$g: Y_Y \longrightarrow X_Y \text{双射}. \qquad (\text{对称结果}).$$

$$\Longrightarrow \quad h: X \longrightarrow Y \text{ 双射}:$$

$$h|_{X_\infty \sqcup X_X} = f, \qquad h|_{X_Y} = g^{-1}.$$

- 无最大势定理: $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}} \qquad (X \neq \phi)$.

证明: 反证法: 存在满射$f: X \longrightarrow 2^X$.

$$\Longrightarrow \left\{x \in X:\ x \notin f(x)\right\} \in 2^X = f(X)$$

$$\Longrightarrow \text{存在} x_0 \in X: \qquad f(x_0) = \left\{x \in X:\ x \notin f(x)\right\}$$

(1) $x_0 \in f(x_0) \Longrightarrow x_0 \notin f(x_0)$

(2) $x_0 \notin f(x_0) \Longrightarrow x_0 \in f(x_0)$

- 最小势定理: 无限集合中最小势为可数无限集合的势

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}.$$

证明: 任意无限集合包含可列子集.

连续统的势

- 连续统的势定义为实数集合的势:

$$c := \aleph := \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

- $\aleph_0 < \aleph, \qquad \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = \aleph$

Cantor连续统假设

- Cantor连续统假设:

$$\aleph_0 \leqslant \overline{\overline{X}} \leqslant \aleph \quad\Longrightarrow\quad \overline{\overline{X}} = \aleph_0 \text{或者} \aleph.$$

- Zermelo－Fraenkel公理体系 $\not\Rightarrow$ Cantor连续统假设为真或非真.

- 注记:

选择公理	Cantor连续统假设
集合论	势理论

势的运算

- 势作为运算与加法、乘法、幂运算可交换(有限情形的推广):

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{A_1}} + \overline{\overline{A_2}} &:= \overline{\overline{A_1 \sqcup A_2}} \\
\overline{\overline{A_1}} \cdot \overline{\overline{A_2}} &:= \overline{\overline{A_1 \times A_2}} \\
\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} &:= \overline{\overline{A^B}}
\end{aligned}
$$

记号: $A^B = \{f : B \longrightarrow A\text{单值映照}\}$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1,2,\cdots,n\}}$$

势的幂运算

- 定理: $\overline{\overline{2^A}} = 2^{\overline{\overline{A}}}$

证: $2^{\overline{\overline{A}}} \xlongequal{\text{def}} \overline{\overline{\{0,1\}^A}} \xlongequal{\text{特征函数=集合}} \overline{\overline{2^A}}$

注记：记号A^B来源于势的运算.

记号2^A来源于$\{0,1\}^A \equiv 2^A$.

势的增长序列

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < c < 2^c < 2^{2^c} < \cdots$$

p进制表示定理: $p = 2, 3, \cdots$.

- $\forall\ x \in (0,1),\ \exists\ !\ a_n \in \{0,1,\cdots,p-1\}$, 有无穷多项$a_n$非零,

$$\xrightarrow{\text{唯一表示}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = 0.a_1a_2\cdots(p),$$

- 当且仅当x 是p进制下的有穷小数, 表示唯二:

$$x \xlongequal{a_n \neq 0} 0.a_1a_2\cdots a_n(p) = 0.a_1\cdots a_{n-1}(a_n-1)(p-1)(p-1)\cdots(p).$$

(唯二表示特点: 各项全为0或全为p-1, 仅有限项例外)

- 定理: $c^{\aleph_0} = c$.

证: 单射 (数列视为实数)

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (0,1)^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & (0,1] \\ \{x_1, x_2, \cdots\} & \longmapsto & 0.\underbrace{x_{11}}\ \underbrace{x_{21}x_{12}}\ \underbrace{x_{31}x_{22}x_{13}}_{\text{对角线方法}}\ \cdots \end{array}$$

采用十进制表示(无穷项非零):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots \\ x_2 &= 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots \\ x_3 &= 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots \\ \cdots \end{aligned}$$

注记: 数列视为数.

- 定理: $c^c = 2^c$.

  证: 构造

$$\text{单射}\quad \mathrm{Graph}:[0,1]^{\mathbb{R}} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$$
$$f \longmapsto \mathrm{Graph}\, f$$

$$c^{\aleph_0} = c \Longrightarrow c^2 = c \Longrightarrow \overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = \overline{\overline{\mathbb{R}^{\{1,2\}}}} = c^2 = \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

- 定理: $2^{\aleph_0} = c$.

证: 满射 $\psi : 2^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\psi(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{2^n}, & \text{if } A\text{有下界} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(将整数集合$A \subset \mathbb{Z}$视为二进制数).

$$2^{\aleph_0} \geqslant c = c^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

- $\overline{\overline{X_n}} = \aleph_0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = \aleph_0.$

- $\overline{\overline{X_n}} = c, \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}} = c.$

例题

- 凸函数$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$除去一个可数集可微.