

Theorem 1

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

Borel集是Lebesgue可测集续

证明: (1) 有界开矩体 I 是Lebesgue可测集:

设 I_k 是 I 的同心相似收缩

$$\text{dist}(I_k, I^c) = \frac{1}{k} \implies \text{dist}(E \cap I_k, E \cap I^c) \stackrel{\forall E \subset \mathbb{R}^n}{\geq} \frac{1}{k}.$$

距离外测度

$$\implies m^*(E \cap I_k) + m^*(E \cap I^c) = m^*((E \cap I_k) \sqcup (E \cap I^c)) \leq m^*(E).$$

上式取极限(利用下列事实)

$$0 \leq m^*(E \cap I) - m^*(E \cap I_k) \leq m^*(E \cap (I \setminus I_k)) \leq m^*(I \setminus I_k) = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

(2) 开集和Borel集是Lebesgue可测集:

开集 $\stackrel{\text{Lindelof}}{=} \bigcup_{\text{可列}} \text{有界开矩体},$

Borel σ 代数 \subset Lebesgue σ 代数

例题

- (X, Γ, μ) 是概率测度空间, $A_n \in \Gamma, \mu(A_n) = 1$. 则 $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

本节主要内容

- 测度的性质
 - σ 可加性的极限形式和积分形式
 - 正则性
 - 完备性

具体 \implies 抽象

计算 \implies 结构

测度空间 (X, Γ, μ) : X 是非空集合, $\Gamma \subset 2^X$ 是 σ -代数.

• $\mu : \Gamma \rightarrow [0, +\infty]$ 是测度:

• $\mu(\emptyset) = 0$

• $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k), \quad \forall A_k \in \Gamma$

测度特点

- 测度值域 $[0, +\infty]$ 代数性质 (对减法不封闭)

⇒ 影响到测度的分析性质.

- 测度论中的陷阱:

$(+\infty) - (+\infty)$ 无意义, 可以取 $[-\infty, +\infty]$ 中的任意值.

(做测度减法的运算需要避开的陷阱)

§3 测度性质

- (X, Γ, μ) 是测度空间, $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Gamma$.

$$(1) \quad A_1 \subset A_2 \subset \cdots \xrightarrow{\text{从下连续}} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right).$$

$$(2) \quad A_1 \supset A_2 \supset \cdots \xrightarrow[\text{从上连续}]{\mu(A_1) < \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right).$$

(条件为了避开陷阱, $\bigcap_{k=1}^{\infty} [k, +\infty) = \emptyset$.)

$$(3) \quad \mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

测度下半连续

$$(4) \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < +\infty$$

$$\implies \mu\left(\varliminf_{k \rightarrow \infty} A_k\right) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \leq \overline{\varliminf}_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\overline{\varliminf}_{k \rightarrow \infty} A_k\right).$$

测度 σ 可加性的极限形式

- 概率测度连续: 保极限.

测度的积分解读(初步体验交换次序五个等价定理)

集合论

函数论

$$A = \chi_A$$

$$\mu(A) = \int_X \chi_A(x) d\mu(x)$$

测度

积分

测度性质的积分解读

(1) 测度的从下连续性是单调收敛定理的雏形:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{A_n}(x) d\mu(x) \stackrel{\chi_{A_n} \uparrow}{=} \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) d\mu(x).$$

(2) 测度的从上连续性是Lebesgue控制收敛定理的雏形:

$$|\chi_{A_n}| \leq |\chi_{A_1}| \in L^1(X)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{A_n}(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) d\mu(x).$$

测度性质的积分解读续

(3) 测度下半连续是Fatou引理的雏形:

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_{A_n} d\mu(x).$$

(4) (X, Γ, μ) , (Y, Σ, ν) 是 σ 有限测度空间, 则对 $\forall E \in \Gamma, F \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \chi_{E \times F}(x, y) d\mu(x) d\nu(y) &= \int_X \left(\int_Y \chi_{E \times F}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_{E \times F}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$

测度性质的证明

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_k \xrightarrow{A_k \uparrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \xrightarrow{A_0 := \emptyset} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}).$$

$$\xrightarrow[\forall k]{\text{可设 } \mu(A_k) < \infty} \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

$$(2) \quad \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k^c) \xrightarrow{A_k^c := A_1 \setminus A_k \uparrow} \mu(A_1) - \mu(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k)$$

$$\stackrel{\parallel}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k^c) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) = \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) & (\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Lebesgue测度的正则性(体现开集和可测集的血缘关系)

- Lebesgue测度是正则:

$$m(A) \underset{\substack{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ \text{收缩}}}{=} \inf_{A \subset G \text{ 开集}} m(G)$$
$$\underset{\substack{\text{膨胀} \\ \text{相当于内测度}}}{=} \sup_{K \subset A \text{ 紧集}} m(K)$$

- Littlewood 三原理之一: 可测集差不多是开集.

$$m(A) \stackrel{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}{=} \inf \{m(G) : A \subset G \text{ 开集}\}$$

(1a) $m(A) = \infty$: 取 $G = \mathbb{R}^n$.

(1b) $m(A) < \infty$: $\forall \epsilon > 0$, \exists 开矩体 I_k :

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(A) + \epsilon.$$

$$\text{取 } G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \implies m(A) \leq m(G) \leq m(A) + \epsilon.$$

$$m(A) = \sup \{m(K) : \text{紧集 } K \subset A\}.$$

(2a) A有界:

取以原点为中心的有界开矩体 $I \supset A$, 关于 I 取余集.

$$\xrightarrow[\forall \epsilon > 0]{(1b)} A^c \subset G_\epsilon \cap I = G_\epsilon \subset I, \quad m(G_\epsilon \setminus A^c) < \epsilon.$$

$$\xrightarrow{\text{取 } K = G_\epsilon^c \subset A} m(A \setminus K) = m(G_\epsilon \setminus A^c) = m(A \cap G_\epsilon) < \epsilon.$$

紧集	有界可测集	有界可测集	开集
$K = G^c$	A	A^c	$G = K^c$

$$A \subset I, \quad A^c = I \setminus A.$$

$$K \subset A \xrightarrow{\text{取余对合}} G \supset A^c$$

(2b) A无界:

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k), \quad (A_k := A \cap \overline{B(0, k)} \uparrow A).$$

(2b-1) $m(A) < \infty$:

$$\xrightarrow[\exists \text{紧集 } K \subset A_{k_0}]{\forall \epsilon > 0} m(K) \leq m(A) \leq m(A_{k_0}) + \frac{\epsilon}{2} \leq m(K) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

(2b-2) $m(A) = \infty$:

$\forall M > 0$, 取紧集 $K \subset A_{k_0}$ (利用有界情形):

$$2M < m(A_{k_0}) < m(K) + M \implies m(K) > M.$$

集合	有界	无界	内, 外
测度	有限	无限	inf, sup

$$m(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k), \quad A_k = A \cap B(0, k) \text{ 有界.}$$

完备化定理

- Lebesgue可测集是Borel集的完备化:

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} B_1 \subset A \subset B_2, \quad m(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

- 等测核和等测包

B_1	B_2
F_σ (弱化的紧集)	G_δ (弱化的开集)
等测核	等测包

Littlewood三原理之一:

开集	小测度集
强	弱
G_δ 集	零测集
弱	强

- Lebesgue 可测集刻画:

Lebesgue可测集 = Borel集 \pm 零测集.

Lebesgue可测集 = F_σ + 零测集 = G_δ - 零测集.

Lebesgue可测 = 开集 + 可列交 - 零测集 = 闭集 + 可列并 + 零测集.

Lebesgue可测集 正则性 紧集 + 小测度集.

Lebesgue可测集 正则性 开集 - 小测度集.

Lebesgue可测集两层次

- Lebesgue可测集两层次:

- (1) Caratheodory条件.

- (2) Borel集 \pm 零测集.

完备化定理的证明

$$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} B_1 \subset A \subset B_2, \quad m(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

(1) $A_k = A \cap B(0, k)$. (有界化)

(2) $K_{k,j} \subset A_k \subset G_{k,j}$, $m(G_{k,j} \setminus K_{k,j}) < \frac{1}{2^{k+j}}$. ($\frac{\epsilon}{2^k}$ 技巧)

(3) $\bigcup_k K_{k,j} \subset A \subset \bigcup_k G_{k,j}$, $\forall j$

(4) $B_1 := \bigcup_j \bigcup_k K_{k,j} \subset A \subset \bigcap_j \bigcup_k G_{k,j} =: B_2$. (收缩、膨胀)

(5) $B_2 \setminus B_1 \subset \bigcup_k G_{k,j} \setminus B_1 \subset \bigcup_k (G_{k,j} \setminus K_{k,j}) \implies m(B_2 \setminus B_1) \leq \frac{1}{2^j} \rightarrow 0$.

ϵ -room的精细化： $\frac{\epsilon}{2^k}$ 技巧：

- 涉及一次逼近：

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k}$$

- 涉及二次逼近：

$$A \longleftarrow \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \longleftarrow \{G_{k,j}, K_{k,j}\}_{k,j \in \mathbb{N}}.$$

$$\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+j}}$$

测度空间完备化

- 设 (X, Γ, μ) 是测度空间, 则其完备化 $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ 是完备测度空间, 其中

$$\bar{\Gamma} := \{A \cup Z : A \in \Gamma, Z \in \mathcal{N}\}$$

$$\mathcal{N} = \{Z \subset X : \exists N \in \Gamma, Z \subset N, \mu(N) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup Z) := \mu(A).$$

- Lebesgue测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), m)$

||

Borel测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$ 的完备化.

证明: 完备化定理 $\implies \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.

Lebesgue测度是体积推广, 是完备化测度

$\implies \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \supset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$.