Borel-Cantelli引理: 集合极限论中最重要引理

- 设(X,Γ,μ)是测度空间, $A_n\in\Gamma$ $(\forall\ n)$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<+\infty \quad\Longrightarrow\quad \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n)=0$$

证明:

$$\begin{aligned}
0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k) &\geqslant \lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\downarrow)(\geqslant\lim_{n\to\infty}\mu(A_n))\\
&= \mu(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)\quad (\text{由假设}\ \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\text{测度有限})\\
&= \mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n)
\end{aligned}$$

注记: 对于外测度类似结果成立.

例题1

- 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}<+\infty,\quad \lambda_n>0,\quad a_n\in\mathbb{R}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{|x-a_n|}<\infty,\quad a.e.\quad x\in\mathbb{R}.$$

证明: $A_n=B(a_n,\sqrt{\lambda_n})$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty}|A_n|=\sum_{k=1}^{\infty}2\sqrt{\lambda_n}<+\infty.$

$$\mathbb{R}\xlongequal{Borel-Cantelli}\underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n}_{\text{零测集}}\bigsqcup\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n^c$$

$$x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n^c\xrightarrow{\exists N(x)}x\in A_n^c\qquad \text{即}|x-a_n|\geqslant\sqrt{\lambda_n}\quad(\forall\ n>N(x))$$

$$\Longrightarrow\frac{\lambda_n}{|x-a_n|}\leqslant\sqrt{\lambda_n}\qquad(\forall\ n>N(x))$$

例题2

- 设$\alpha > 2$. 记$p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$.

$$E = \{x \in [0,1] : \exists\ \text{无穷个有理数} \frac{p}{q} \in [0,1] \text{满足} |x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^\alpha}\}.$$

证明: $m(E) = 0$.

证明: 固定$p, q \in \mathbb{N}$, 记$A_{p,q} = \{x \in [0,1] : |x - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^\alpha}\}$.

$$A_q := \bigcup_{p=1}^{q} A_{p,q}, \qquad m(A_{p,q}) \leqslant \frac{2}{q^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \qquad E \subset A = \varlimsup_{q\to\infty} A_q, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} m(A_q) < \infty$$

$$\xRightarrow{Borel-Cantelli} \qquad m(A) = 0$$

例题1

- $\forall$不可测集合$K_0 \subset \mathbb{R}$, 存在$K_1 \subset K_0$, K_1中的Lebesgue可测集必为零测集。
  - 不妨设$m^*(K_0) < \infty$.
  - 不妨设$\lambda > 0$:

$$\lambda := \sup_{E \in \Gamma} m(E), \qquad \Gamma := \left\{ E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) : E \subset K_0 \right\}$$

  - 上确界可达到:

$$\text{取} \lim_{k\to\infty} m(E_k) \xlongequal{E_k \in \Gamma} \lambda$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda \leqslant m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leqslant \sup_{E\in\Gamma} m(E) = \lambda$$

  - $K_0 = K_1 \sqcup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $\quad K_1$满足要求(反证).

例题2

- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \overset{\exists \epsilon_0>0}{\Longleftrightarrow} m^*(E \setminus A) \geqslant \epsilon_0, \qquad \forall\, A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$
  - 必要性: 反证法：假设存在$A_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$

$$m^*(E \setminus A_k) \leqslant \frac{1}{k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Longrightarrow E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sqcup Z \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{这是因为} m(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leqslant m^*(E \setminus A_k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

  - 充分性: 反证法：假设$E \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

$$\xrightarrow{\text{测度正则性}} \forall\, \epsilon > 0, \exists \text{ 闭} F \subset E: \quad m(E \setminus F) < \epsilon.$$

例题3

- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLeftrightarrow{\exists \epsilon_0 > 0} m^*(G \setminus E) \geqslant \epsilon_0, \qquad \forall\, E \subset G \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$
  - 不可测集无法用可测集合收缩或膨胀逼近.
- $E \notin \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xRightarrow{\exists \epsilon_0 > 0} m(A \cap B) \geqslant \epsilon_0,\ \forall\, A, B$是包含$E$的可测集.
  - 证明: $m(A \cap B) \geqslant m^*((A \cap B) \setminus E) \geqslant \epsilon_0.$
  - 不可测集与其余集无法用可测集厘清, 它们无休止地纠缠在一起 （$m^*(A \setminus E) \geqslant \epsilon_0, \quad m^*(A^c \setminus E) \geqslant \epsilon_0$）.

总结

- 测度σ可加性的极限表述

- Lebesgue测度的正则性:　(可测集和开集、紧集的关系)

  Lebesgue测度与Lebesgue可测集相伴而生, Lebesgue测度的正则性由可测集和开集、紧集的关系体现.

  Littlewood 三原理之一

- Lebesgue测度的完备性:　(可测集=Borel集+零测集)

Lebesgue 可测集

- $\exists!$测度空间 $(\mathbb{R}^n,\ \Gamma,\ m)$:

$$\Gamma = \text{Lebesgue}\sigma\text{代数} = \text{Lebesgue可测集全体},$$
$$m = \text{Lebesgue测度}.$$

  - $\Gamma \supset \mathbb{R}^n$中开集全体 (Borel集可测)
  - $\forall\ A \subset B \in \Gamma,\quad m(B) = 0 \Longrightarrow A \in \Gamma.$ (完备测度)
  - 所有闭矩体 $\in \Gamma$, 其测度 $=$ 其体积 (体积推广)
  - $m(A) = m(x + A),\qquad \forall\ A \in \Gamma.$ (平移不变)

- Lebesgue σ代数 $=\!=\!=$ $\langle$Borel σ代数 + 所有的零测集$\rangle$.

本节主要内容

- Littlewood 三原理之一:　可测集与开集、闭集的关系
- 外测度的性质
- 正测集的性质:　测度的密度

Steinhaus 定理　(联系测度论和拓扑学)

Littlewood 三原理之一：可测集与开集、闭集的关系

下列等价:

- A是$\mathbb{R}^n$中Lebesgue可测集
- $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \mathbb{R}^n$中闭集F和开集G :

$$F \subset A \subset G, \qquad m^*(A \setminus F) < \epsilon, \qquad m^*(G \setminus A) < \epsilon.$$

- Littlewood 三原理之一:

可测集=闭集+小测度集=开集-小测度集.

有界可测集=紧集+小测度集=开集-小测度集.

- 与测度正则性不同:

$$A = \mathbb{R}^n, \quad F\text{不能取紧集}$$

$$m(F) \gg 1, \qquad m^*(A \setminus F) = +\infty.$$

注记

Littlewood三原理之一:

开集	+	小测度集	G_δ 集	+	零测集
强		弱	弱		强

注记

测度论需要处理 inf, 这是极限的另一面目

- 若用闭矩体覆盖再收缩定义外测度, 则

  等测包可取为F_σ集.

- 记$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n - \frac{\epsilon}{2^n}, r_n + \frac{\epsilon}{2^n}), \quad \overline{G} \supset \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$m(G) \leqslant 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n} = 2\epsilon, \qquad m(\overline{G}) = +\infty.$$

等价刻画的证明

- $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLongrightarrow[F\subset A\subset G]{\forall\epsilon>0,\exists \text{ 闭}F\text{开}G} m^*(A \setminus F) < \epsilon, \qquad m^*(G \setminus A) < \epsilon.$

$$\begin{aligned} A_k &:= A \cap B(0,k) \uparrow A, \\ A_k &\subset G_k, \\ m(G_k \setminus A_k) &< \frac{\epsilon}{2^k} \\ \text{取}G &:= \bigcup_k G_k \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus A_k) \Longrightarrow m^*(G \setminus A) < \epsilon.$$

续1

利用取余集将外收缩变为内膨胀:

对于A^c, 存在开集$\widetilde{G}$:

$$A^c \subset \widetilde{G}, \quad m^*(\widetilde{G} \setminus A^c) < \epsilon.$$

取$F := \widetilde{G}^c$, 则

$$A \setminus F = A \cap \widetilde{G} = \widetilde{G} \setminus A^c.$$

续2

- $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \xLeftarrow[F\subset A\subset G]{\forall\epsilon>0,\exists\text{ 闭}F\text{开}G} m^*(A\setminus F)<\epsilon, \qquad m^*(G\setminus A)<\epsilon.$

(1) $K_k \subset A \subset G_k, \qquad m(G_k \setminus K_k) < \frac{\epsilon}{2^k}.$ $\qquad (\frac{\epsilon}{2^k}$技巧$)$

(2) $B_1 := \bigcup_k K_k \subset A \subset \bigcap_k G_k =: B_2. \qquad m(B_2 \setminus B_1) = 0$

(3) $A = G_\delta \setminus Z = F_\sigma \cup Z \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$

$$\text{开矩体体积平移不变性} \xrightarrow[\text{遗传}]{\text{提升}} \text{外测度}.$$

- $m^*(x_0 + E) = m^*(E)$.

证明: $\forall \bigcup_k I_k \supset E \Longrightarrow m^*(x_0 + E) \leqslant \sum_k |x_0 + I_k| = \sum_k |I_k|$

$$\Longrightarrow m^*(x_0 + E) \leqslant m^*(E)$$

$$m^*(E) \leqslant m^*((-x_0) + (x_0 + E)) \leqslant m^*(x_0 + E).$$

- 若A可测, 则x_0+A可测, 且测度相同.

证明:

$$A=\bigcap_k G_k\setminus Z \Longrightarrow x_0+A=\bigcap_k (x_0+G_k)\setminus(x_0+Z)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n).$$

其中

$$m^*(x_0+Z)=m^*(Z)=0.$$

外测度等测包

- E的等测包H:

$$H \supset E, \qquad H\text{是}G_\delta\text{集}, \qquad m^*(H) = m^*(E).$$

- 注记：$H \setminus E$ 可能不是零测集, 否则E可测.

- 注记：测度性质 $\xrightarrow{\text{等测包}}$ 外测度性质.

续

注记: $\quad m^*(E)=\inf\Big\{m(G):\text{开}G\supset E\Big\}.$

注记的证明: (1) $m^*(E)=\infty$:

$$G\supset E\Longrightarrow m^*(G)\geqslant m^*(E)=\infty$$

(2) $m^*(E)<\infty$:

$$\forall\,\epsilon>0,\exists\, I_k\text{开矩体}:\quad \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq m^*(E)+\epsilon$$

$$\Longrightarrow G:=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,\quad \text{开}G\supset E,\quad m(G)\leq\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leq m^*(E)+\epsilon.$$

续

等测包存在性的证明:

(1) $m^*(E) = \infty$:

$$H = \mathbb{R}^n$$

(2) $m^*(E) < \infty$:

$$\text{取开集} G_k \supset E, \quad m(G_k) \leqslant m^*(E) + \tfrac{1}{k}.$$

$$\begin{aligned} H := \bigcap_k G_k \quad &\Longrightarrow \quad m^*(E) \leqslant m(H) \leqslant m(G_k) \leqslant m^*(E) + \frac{1}{k} \\ &\Longrightarrow \quad m^*(E) = m(H). \end{aligned}$$

- 下半连续性 (Fatou引理的另一面目)

$$m^*(\underline{\lim}\, E_k) \leqslant \underline{\lim}\, m^*(E_k).$$

- 单调收敛定理的另一面目

$$m^*(\lim E_k) \xlongequal{E_k\uparrow} \lim m^*(E_k)$$

外测度性质(续)

证明: (1) 设H_k 是E_k的等测包, 则

$$
\begin{aligned}
m^*(\underline{\lim}\, E_k) &\leqslant m(\underline{\lim}\, H_k) \\
&\leqslant \underline{\lim}\, m(H_k) \qquad (\textit{Fatou}\text{引理}) \\
&= \underline{\lim}\, m^*(E_k).
\end{aligned}
$$

(2) 设$E_k \uparrow$, 则

$$
\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \overset{E_k\uparrow}{\leqslant} m^*(\lim_{k\to\infty} E_k) \overset{(1)}{\leqslant} \underline{\lim}_{k\to\infty} m^*(E_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k).
$$

Theorem 1

$$\sup_{\text{非退化矩体}I}\frac{m(I\cap E)}{m(I)}\xlongequal{E\subset\mathbb{R}^n\text{可测}}\begin{cases}1, & m(E)>0\\ 0, & m(E)=0.\end{cases}$$

测度的密度(续)

证明:

- 不妨设E是有界正测集: 这是因为$m(E\cap B(0,n_0))\uparrow m(E)$.

- 只要证明第一种情形。反证法: 假设

$$\sup_{I\text{矩体}}\frac{m(I\cap E)}{m(I)}=\lambda\in(0,1).$$

$\forall\ \epsilon>0$, 取开矩体I_k:

$$E\subset\bigcup_k I_k,\qquad \sum_k |I_k|<m(E)+\epsilon.$$

$$\Longrightarrow m(E)\ \leqslant\ m(\bigcup_k(I_k\cap E))\leqslant\sum_k\lambda m(I_k)<\lambda(m(E)+\epsilon)\quad \text{矛盾}$$

Theorem 2 (Steinhaus)

$$\underset{(\text{测度论})}{m(E) > 0} \xrightarrow{E\subset\mathbb{R}^n} \underset{(\text{拓扑学})}{0 \in (E-E)^\circ}$$

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{大集合(正测集)}\\ \text{测度论}}} \xrightarrow{\text{集合减法}} \underbrace{E-E}_{\substack{\text{大集合(含内点)}\\ \text{拓扑学}}}$$

$$E-E \overset{\quad}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{cases} \text{拓扑学中的大集合(含内点)}, & m(E)>0 \\ \\ \text{待定}, & m(E)=0. \end{cases}$$

$$\mathbb{N}-\mathbb{N}=\mathbb{Z}, \qquad\qquad C-C=[-1,1].$$

续

- $C-C \xlongequal{C\text{是Cantor集}} [-1,1].$ $\qquad C+C=[0,2].$

证明: $\forall x\in(0,1] \xlongequal{\exists\, I\sqcup J\subset\mathbb{N}} \sum_{n\in I}\frac{1}{3^n}+\sum_{n\in J}\frac{2}{3^n}$

$$\Longrightarrow \quad x=\frac{1}{2}(a+b),\quad a=\sum_{n\in I}\frac{2}{3^n}+\sum_{n\in J}\frac{2}{3^n},\quad b=\sum_{n\in J}\frac{2}{3^n}$$

$$\Longrightarrow \quad [0,1]=\frac{1}{2}(C+C),\qquad C=\lim C_n=\lim(1-C_n)=1-C$$

$$\Longrightarrow \quad C-C=C-(1-C)=C+C-1=2[0,1]-1=[-1,1].$$

方法：

$$\text{从E出发} \xrightarrow[\text{添加I, 再去掉E}]{\text{通过交运算}} \text{到达I.}$$

续

- 取开矩体I

$$\frac{m(I\cap E)}{m(I)}=\lambda \xRightarrow[\lambda>1-\frac{1}{2^{n+1}}]{\delta=\text{I的最小边长}} (\frac{-\delta}{2},\frac{\delta}{2})^n\subset E-E.$$

反证法: 存在$x_0 \in (\frac{-\delta}{2}, \frac{\delta}{2})^n$ $(\delta =$ I的最小边长).

$$x_0 \notin E - E \quad \Longrightarrow x_0 + E\text{与}E\text{不相交}$$

$$\Longrightarrow x_0 + I \cap E\text{与}I \cap E\text{不相交}$$

$$\Longrightarrow m((x_0 + I \cap E) \sqcup (I \cap E)) \leqslant m((x_0 + I) \cup I)$$

$$\text{左边} = 2m(I \cap E) = 2\lambda m(I)$$

$$\text{右边} = m(x_0 + I) + m(I) - m((x_0 + I) \cap I)) \leqslant (2 - \frac{1}{2^n})m(I).$$

由此得到矛盾. 我们利用了以下事实：$x_0 + I$是I的扰动,

$$(x_0 + I) \cap I \supset \text{方体，其体积} \geqslant (\frac{1}{2})^n |I|.$$