例题

- $m(E) > 0 \xRightarrow{E\subset\mathbb{R}} (E+E)^\circ \neq \emptyset.$

    - E把某个开区间差不多充满, 不妨设该开区间为$(0,1)$, 而且

    $$m(A) > \frac{3}{4}, \qquad A := E \cap (0,1).$$

    - 假设$E+E$无内点. 取

    $$x_0 \in (1, \frac{3}{2}) \setminus (E+E).$$

    - 两个互不相交的子集:

    $$A \subset (0,1), \qquad x_0 - A \subset (1, \frac{3}{2}) - (0,1) \subset (0, \frac{3}{2})$$

    $$\Longrightarrow m((x_0 - A) \sqcup A)) > \frac{3}{2}. \quad \text{矛盾}$$

例题

- 若$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$在一个正测集上有界(例如局部有界), 具有可加性, 则它具有线性性.

证明: 我们要证$f(x)=f(1)x$.

$$f\text{在正测集}E\text{有界}\xrightarrow[{[-\delta,\delta]\subset E-E}]{\text{Steinhaus定理}} f\text{在原点附近}[-\delta,\delta]\text{有界}.$$

由线性性

$$nf(\frac{m}{n})=f(m)=mf(1)\Longrightarrow f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1).$$

$$\begin{aligned}|f(x)-f(1)x| &\xlongequal[\text{取 } r\in\mathbb{Q}:\ |x-r|<\delta/n]{\forall\text{ 固定}x,n} \left|\frac{1}{n}f(n(x-r))+(r-x)f(1)\right| \\ &\leqslant \frac{M}{n}+\frac{\delta}{n}|f(1)|\to 0\end{aligned}$$

例题

- 设$T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$是可逆线性变换, E是$\mathbb{R}^n$中可测集. 则

$$m(TE) = |\det T| m(E).$$

证明: $T =$ 初等变换的复合. 这包括伸缩、换序、仿射变换。

(1) $E=[0,1)^n$.

对于仿射变换, $n=2$情形:

$$y_1:=Tx_1=x_1+x_2,\quad y_2:=Tx_2=x_2.$$

$x_2=0$	$x_1=1$	$x_2=1$	$x_1=0$
$y_2=0$	$y_1-y_2=1$	$y_2=1$	$y_1=y_2$

T将标准正方形$[0,1)\times[0,1)$映照为平行四边形, 底边为$[0,1)$区间, 高为1.

$$\Longrightarrow\quad m(TE)\xlongequal{E=[0,1)^n}|\det T|m(E).$$

(2) $\quad E =$ 开集.

对$\mathbb{R}^n$进行二进制加密剖分, G的每个点必落在某个二进制方体.

$$\Longrightarrow \quad G = \bigsqcup_{\text{可列}} ([0,1)^n\text{伸缩平移}).$$

归结于情形(1).

$$m(TG) = |\det T| m(G).$$

(3) E可测.

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus Z \Longrightarrow TE = \bigcup_{k=1}^{\infty} TG_k \setminus TZ$$

$$\begin{aligned}
m^*(TZ) &= \inf\{m(\tilde{G}) : \text{开集}\tilde{G} \supset TZ\} \\
&= \inf\{m(TG) : \text{开集}G \supset Z\} \qquad (T\text{是同胚}, G := T^{-1}\tilde{G}) \\
&= |\det T|\ \inf\{m(G) : \text{开集}G \supset Z\} \\
&= |\det T|\ m(Z) = 0.
\end{aligned}$$

$$E\text{可测} \Longrightarrow TE\text{可测}$$

$$\begin{aligned}
m(TE) &= \inf\{m(\tilde{G}) : \text{开集}\tilde{G} \supset TE\} \\
&= \inf\{m(TG) : \text{开集}G \supset E\} \qquad (T\text{是同胚}, G := T^{-1}\tilde{G}) \\
&= |\det T| \ \inf\{m(G) : \text{开集}G \supset E\} \\
&= |\det T| \ m(E).
\end{aligned}$$

例题

$$\mathbb{R}^n \neq \bigcup_{\text{可列}} \text{超平面}$$

本节主要内容

Ch3 可测函数

- 可测函数
- 可测函数关于运算的封闭性

Ch2和Ch3关系: 提升

集合论		特征函数的函数论	函数论
A	=	χ_A	$f = (\chi_A, +, \cdot, \lim)$
可测集	=	可测函数	可测函数
$m(A)$	=	$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\, dm(x)$	$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dm(x)$
测度		积分	积分
Ch2			Ch3

实分析中的陷阱：来自测度值域的代数性质

- 测度论中的陷阱:

$$m(E_1) - m(E_2) = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(做测度减法的运算需要避开的陷阱)

- 积分论中的陷阱:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_1}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_2}(x)dx = (+\infty) - (+\infty) \text{ 无意义.}$$

(可测函数=$(\chi_A, +, \cdot, \lim)$)可能不可积, 需要剔除陷阱, 产生可积子类)

可测函数起源

- 曲边梯形面积的推广中, 对y轴进行分割, 非负有界函数围成的曲边梯形面积有定义的前提条件是函数可测. 这源于没有一把万能的尺子来定义测度.
- 曲边梯形面积是带有符号的面积, 在实轴上方为正, 否则为负. 为了避开$+\infty-(+\infty)$陷阱, 需要将可测函数类缩小到可积函数类.
- 在抽象理论中, 可测函数是与连续函数地位相同的函数类, 分别隶属于实分析和点集拓扑. 广义实值可测函数类对于代数和极限运算封闭. 可积函数全体构成Banach空间.

可测函数

- 抽象可测函数

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\Gamma_Y)\subset\Gamma_X$$

(可测集的原像是可测集)

- 抽象连续函数

$$f:(X,\tau(X))\longrightarrow(Y,\tau(Y))\text{连续}\quad\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad f^{-1}(\tau(Y))\subset\tau(X)$$

(开集的原像是开集)

可测函数等价刻画

- 可测函数利用生成元刻画

$$f:(X,\Gamma_X)\longrightarrow(Y,\Gamma_Y)\text{可测}\quad\Longleftrightarrow\quad f^{-1}(\mathscr{F})\subset\Gamma_X,\ \ \sigma(\mathscr{F})=\Gamma_Y.$$

(生成元集合$\mathscr{F}$中可测集的原像可测)

证明: $\Gamma := \{E\in\Gamma_Y : f^{-1}(E)\subset\Gamma_X\}$

$$\mathscr{F}\subset\Gamma,\qquad \Gamma\text{是}\sigma\text{代数}\Longrightarrow\Gamma_Y\subset\Gamma$$

例题

- 存在[0, 1]区间的同胚, 不满足: 可测集的原像是可测集.
  - 取[0, 1]严格单调的同胚:
    $$f := \frac{1}{2}(\text{Cantor函数}+\text{恒等函数}).$$
  - [0, 1]的剖分:
    $$\begin{aligned} [0,1] &= C \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}, \qquad |I_{n,k}| = \frac{1}{3^n} \\ f[0,1] &= f(C) \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} f(I_{n,k}), \qquad f[0,1] = [0,1]. \end{aligned}$$

续

- 在开区间$I_{n,k}$上:

$$f|_{I_{n,k}} \xlongequal[\text{限制于}I_{n,k}]{\text{Cantor 函数为常数}} \frac{1}{2}\text{常数} + \frac{1}{2}\text{恒等}\Big|_{I_{n,k}} = \text{平移}+\frac{1}{2}\text{伸缩}.$$

$$\Longrightarrow m(f(I_{n,k})) = \frac{1}{2}m(I_{n,k}), \qquad m(f(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k})) = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow m(f(C)) = \frac{1}{2}.$$

续

$$m(f(C)) > 0 \Longrightarrow \text{存在不可测集} W \subset f(C)$$

- $g := f^{-1}, \qquad Z := g(W) \subset g(f(C)) = C.$

- Lebesgue可测集Z的原像$g^{-1}(Z) = W$不是Lebesgue集.

注记： 零测集Z不是Borel集. (否则$W = g^{-1}(Z) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$)

Lebesgue可测函数

- 设E是$\mathbb{R}^n$ 上可测集.

$$\mathscr{L}(E) := \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \cap E = E\text{上Lebegue } \sigma\text{代数}.$$

- $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue 可测:

$$f : (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))\text{可测}.$$

- 值域$\mathbb{R}$中, 默认的σ代数是Borelσ代数$\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

- Borel σ代数是拓扑学和测度论的桥梁, 兼顾连续和可测.
  - 连续必可测
  - 集合的可测和函数的可测相容$A = \chi_A$.

Borel σ代数生成元

- Borel σ代数的生成

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\tau(\mathbb{R})) \\
&= \sigma\Big\{(a,+\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a,+\infty): \quad a \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \sigma\Big\{[a,b): \quad a<b, \quad a,b \in \mathbb{R}\Big\}.
\end{aligned}
$$

注意: $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus (b-\frac{1}{n},+\infty)) \cap (a,+\infty)$.

- Lebesgue可测函数判别准则.

$$
\begin{aligned}
& f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue可测} \\
= \quad & \text{开集的原像可测} \\
= \quad & \text{右半开直线}(a, +\infty)\text{的原像可测} \\
= \quad & \text{半开半闭有界区间}[a, b)\text{的原像可测.}
\end{aligned}
$$

Lebesgue可测函数的积分=Riemann积分+测度论

- Lebesgue可测函数的积分

$$\int_a^b f(x)dm(x) \overset{0\leqslant f<M}{=\!=\!=\!=} \int_0^M m(f^{-1}[y,+\infty)) \downarrow dy.$$

扩充实轴$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \quad &:= \quad \text{可测集E上Lebesgue可测函数全体} \\ \mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, \overline{\mathbb{R}}) \quad &:= \quad \text{可测集E上}\overline{\mathbb{R}}\text{值Lebesgue可测函数全体}. \end{aligned}$$

- 研究$\overline{\mathbb{R}}$值Lebesgue可测函数的理由.
  - $\mathscr{L}(E,\overline{\mathbb{R}})$关于上、下极限运算封闭, 比$\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$具有优越性.
  - 将a.e.相等视为恒等时

$$L^1(E,\mathbb{R}) = L^1(E,\overline{\mathbb{R}}).$$

扩充实轴可视为闭区间

- 扩充实轴与闭区间的双射对应:

$$\begin{aligned} \Phi : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

- 类似单点紧化

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间:

$$\text{距离拉回}(\Phi\text{是等距})$$

$$\mathrm{dist}(x, y) := |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

扩充实轴的拓扑

- $\overline{\mathbb{R}}$是度量空间：开集拉回(Φ是同胚),

- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$取子空间拓扑

$$(X,\tau)\text{是拓扑空间} \xRightarrow[\text{子空间拓扑}]{E\subset X} (E,\tau|_E)\text{是拓扑空间}.$$

- $\overline{\mathbb{R}}$是紧集, 类似单点紧化.

- $\overline{\mathbb{R}}$中的拓扑:

$$\tau(\overline{\mathbb{R}}) = \text{由}(a,b),\ (a,+\infty],\ [-\infty,b)\text{生成}.$$

- 扩充实数的Borel σ 代数.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) &= \sigma(\tau(\overline{\mathbb{R}})) \\
&= \sigma\{(a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \sigma\{[a,+\infty] : a \in \mathbb{R}\} \\
&= \{A \sqcup B : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\quad B = \emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty,-\infty\}\}
\end{aligned}
$$

- 扩充实值Lebesgue可测函数判别准则.

$$
\begin{aligned}
& f: E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ Lebesgue可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & f: (E, \mathscr{L}(E)) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})) \text{ Lebesgue可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{开集的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{右半开直线的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{半开半闭有界区间的原像可测}, \{+\infty\}, \{-\infty\}\text{的原像可测}
\end{aligned}
$$

- 良定性:

  实值函数$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$可自然地视为扩充实值函数$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

  两者可测性一致.

- 复合运算:

$$f \in C(\mathbb{R}^n), \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n\text{可测} \Longrightarrow f \circ g\text{可测}.$$

证: $\forall$ 开集$G \subset \mathbb{R}^n \Longrightarrow (f \circ g)^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$可测.