3 第七次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P192.22

试证明

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-t^2}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Proof. 这个题和实分析关系不大, 一种方法是记住 Gaussian 是 Fourier 变换的不动点 (会差一个系数, 看你背哪个定义), 另一种方法是分部积分解 ODE. 这里展示第二种方法. 令

$$J(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{2\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x.$$

对某个 t, 取 $2|x|e^{-x^2}$ 为导数的控制函数, 然后 DCT 得到积分号下求导. 又由分部积分,

$$\begin{aligned} J'(t) &= \int_{\mathbb{R}} 2\mathrm{i}xe^{-x^2}e^{2\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} (e^{-x^2})'e^{2\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = -2tJ(t). \end{aligned}$$

这里边界项为零. 因此 $J(t) = J(0)e^{-t^2} = \sqrt{\pi}e^{-t^2}$. 取实部并注意虚部是奇函数积分, 得

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-t^2}.$$

□

Problem 3.2 P192.23

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_k\in L^1(\mathbb{R}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$, 且对于任一可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x \le \int_E f_{k+1}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

Proof. 这题的条件和之前一个作业题一样. 先证单调性, 在

$$A_k = \{x : f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$$

用第一个条件, 可得 $f_k(x)$ 关于 k 递增.

令 $F(x) = \lim_k f_k(x)$. 对任一可测集 E, 由 MCT 作用于 $f_k - f_1 \ge 0$ 可得

$$\int_E (F-f_1)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E (f_k - f_1)\,\mathrm{d}x = \int_E (f-f_1)\,\mathrm{d}x.$$

因而对任一可测集 E 都有

$$\int_E (F-f)\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是 $F = f$ a.e. 这就证明了 $f_k \to f$ a.e. □

Problem 3.3 P192.24

设 $\{f_k(x)\}$, $\{g_k(x)\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数列, 且有

$$|f_k(x)| \leq g_k(x), \qquad x \in E,$$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \qquad \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x),$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proof. 这个题就是广义 DCT, 之前习题课讲过. 这个技巧必须掌握! 考虑对 $g_k + f_k$ 和 $g_k - f_k$ 分别用 Fatou 引理即可. □

Problem 3.4 P193.25

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的有界函数, 其不连续点集记为 D. 若 D 只有可列个极限点, 试证明 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数.

Proof. 由 Lebesgue 定理, 只要证明 D 是零测集. 记 D' 为 D 的极限点集, 那么 D' 可列, $D \setminus D'$ 中的每个点都是 D 的孤立点. 对每个 $x \in D \setminus D'$, 可取有理端点区间 (p_x, q_x) 使得

$$x \in (p_x, q_x), \qquad (p_x, q_x) \cap D = \{x\}.$$

不同的 x 对应的有理端点区间不能相同, 所以 $D \setminus D'$ 至多可列. 因此 D 可列, 从而 $m(D) = 0$. □

Problem 3.5 P193.26

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数. 若对于每一点 $x \in \mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)$$

存在, 试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的.

Proof. 记

$$L(x) = \lim_{h\to 0} f(x+h).$$

因为这个极限处处存在, f 在 x 处不连续当且仅当 $f(x) \neq L(x)$. 对 $n \geq 1$, 令

$$D_n = \{x \in [a, b] : |f(x) - L(x)| \geq 1/n\}.$$

下面说明 D_n 没有聚点. 若 $x_j \in D_n$, $x_j \to x_0$, 且 $x_j \neq x_0$, 由 $L(x_0)$ 的定义可知, 当 j 充分大时 $f(x_j)$ 接近 $L(x_0)$. 同时在 x_j 附近取足够小的去心邻域, 其中的函数值仍然接近 $L(x_0)$, 故 $L(x_j)$ 也接近 $L(x_0)$. 于是 $|f(x_j) - L(x_j)| < 1/n$, 矛盾.

因而每个 D_n 在紧区间 $[a, b]$ 中至多可数. 不连续点集

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

至多可数, 所以 $m(D) = 0$. 由 Lebesgue 定理, f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. □

Problem 3.6 P193.27

设 $E \subset [0,1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的充分必要条件是

$$m(\overline{E} \setminus E^\circ) = 0.$$

Proof. 在 $(0,1)$ 内部, χ_E 的不连续点正好是 E 的边界点, 那么直接由 Lebesgue 定理就证完了. $\square$

Problem 3.7 P211.1

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的非负函数. 若 $f \notin L^1([a,b])$, 试问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数吗?

Proof. 我们默认原函数逐点可导 (因为这个是完全数分的概念), 那么答案是不存在, 因为 Lebesgue 定理, 计算积分得到矛盾. $\square$

Problem 3.8 P211.2

设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $G(x)$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$F'(x) > 0, \qquad a \le x \le b.$$

试证明 $h(x) = F(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

Proof. 本题有两种做法, 如果知道 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 的 precise representative(这说明 F 是绝对连续的), 那么直接用 N-L 公式即可. 具体为

$$H(x) = F(x)G(x) - \int_a^x G(t)\,dF(t).$$

任取 $c \in (a,b)$. 当 $x \neq c$ 时,

$$H(x) - H(c) = F(x)G(x) - F(c)G(c) - \int_c^x G(t)\,dF(t).$$

整理为

$$\frac{H(x)-H(c)}{x-c} = F(x)\frac{G(x)-G(c)}{x-c} - \frac{1}{x-c}\int_c^x \big(G(t)-G(c)\big)\,dF(t).$$

由连续性即可完成证明.

或者你知道 Stieltjes 积分, 那么 F 作为一个 NBV 函数, 可以实现为一个 Borel 测度, 也就是

$$F(x) - F(a) = \mu_F([a,x]).$$

那么只要证明 $\mu_F \ll m$. 利用 LRN 分解和密度定理, 对 $\mu_{F,s}$-a.e. x, 有

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu_F(x-r,x+r)}{2r} = F(x) < \infty.$$

这表明 $\mu_{F,s} = 0$, 那就完成了. $\square$

Problem 3.9 P241.2

设 $\{x_n\} \subset [a,b]$, 试作 $[a,b]$ 上的递增函数, 其不连续点恰为 $\{x_n\}$.

Proof. 对每个 n, 定义

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \chi_{(x_n,b]}(x), & x_n < b, \\ \chi_{\{b\}}(x), & x_n = b. \end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\varphi_n(x)$$

即可. $\square$

Problem 3.10 P241.3

设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的递增函数, $E \subset (a,b)$. 若对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $(a_i, b_i) \subset (a,b)$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \qquad \sum_i \big[f(b_i) - f(a_i)\big] < \epsilon,$$

试证明

$$f'(x) = 0, \qquad \text{a.e. } x \in E.$$

Proof. 这是 BV 函数 Lebesgue 定理的直接应用, 计算 E 上的积分后是显然的. □