Problem 3.11 P232.1

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续, 且有

$$|f'(x)| \le M, \qquad \text{a.e. } x \in [a,b],$$

则

$$|f(y)-f(x)| \le M|x-y|, \qquad x,y \in [a,b].$$

Proof. 微积分基本定理, 这是显然的. □

Problem 3.12 P232.2

设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上. 若有

$$|f(y)-f(x)| \le M|y-x|, \qquad x,y \in [a,b],$$

则

$$|f'(x)| \le M, \qquad \text{a.e. } x \in [a,b].$$

Proof. Lipschitz 蕴含绝对连续, 然后几乎处处可导, 按照定义求导就行. □

Problem 3.13 P232.3

设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数列. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上收敛, 则其和函数在 $[a,b]$ 上绝对连续.

Proof. 直接走定义可能会稍微麻烦, 我们可以考虑写成积分来做. 注意

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

那么有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) \xlongequal{Tonelli} \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a).$$

积分有绝对连续性, 那么就做完了. □

Problem 3.14 P218.8

试证明 $f \in BV([a,b])$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的递增函数 $F(x)$, 使得

$$|f(x') - f(x'')| \le F(x'') - F(x'), \qquad a \le x' < x'' \le b.$$

Proof. 充分性是显然的, 因为变差能被 F 的变差控制, 而单增函数是有界变差的. 现在看必要性, 由 Jordan 分解, 有两个递增函数 f_1, f_2 满足

$$f = f_1 - f_2.$$

那么不难看出取控制函数为

$$F = f_1 + f_2$$

即可. □

Problem 3.15 P218.10

设 $f \in BV([a,b])$. 若有
$$V_a^b(f) = f(b) - f(a),$$
试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增.

Proof. 直接证明, 考虑 $a < x \leq y << b$, 那么有

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = V_a^b f &\geq |f(b) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \\ &\geq |f(y) - f(x) - (f(b) - f(a))| + |f(y) - f(x)| \geq |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

这表明 $f(y) \geq f(x)$. $\square$

Problem 3.16 P222.1

设 $E \subset [0,1]$. 若存在 ℓ 满足 $0 < \ell < 1$, 使得对 $[0,1]$ 中任意的子区间 $[a,b]$, 均有
$$m(E \cap [a,b]) \geq \ell(b-a),$$
试证明 $m(E) = 1$.

Proof. 这个题考虑示性函数 χ_E, 那么根据条件, 用 Lebesgue 微分定理, 那么
$$\chi_E \geq \ell \quad \text{a.e.}$$
这就是说 $m(E) = 1$. $\square$

Problem 3.17 P222.2

对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, 试问: $[0,1]$ 中的 Lebesgue 点是什么?

Proof. $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. $\square$