3 第三次习题课讲义

3.1 作业答案

Problem 3.1 P78.1

设 $E \subset [0,1]$, 若 $m(E)=1$, 试证明 $\bar{E}=[0,1]$; 若 $m(E)=0$, 试证明 $\mathring{E}=\varnothing$.

Proof. 第一部分是直接的, 因为

$$1=m([0,1]) \geq m(\bar{E}) \geq m(E)=1 \Rightarrow m(\bar{E})=1.$$

第二部分是反证法, 若 E 有内点, 就有开球 $B \subset E$, 但是 $0<m(B) \leq m(E)=0$, 这不可能! □

Problem 3.2 P78.2

设 $\{A_n\}$ 是互不相交的可测集列, $B_n \subset A_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 试证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

Proof. 这个题相当于用分离性让外测度具有分离可加性, 某种意义上来说, 能从外测度的定义直接看出来. 当然更直接的办法是用 Carathéodory 条件去拆这个集合.

$$\begin{aligned}
m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \cap A_1\right)+m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus A_1\right) \\
&= m^*(B_1)+m^*\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n\right) \\
&= \cdots \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} m^*\left(B_n\right).
\end{aligned}$$

对 N 取极限即可得到

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n).$$

用次可加性得到另一侧不等式, 从而完成了证明.

Remark. 同学们一定要熟练使用 Carathéodory 条件, 很多外测度定义上讲不清楚的事情其实可以直接简化成集合计算, 失去直观性得到的就是论证的极大简化. 以及同学们别把 Carathéodory 条件和 Carathéodory 定理搞混了, 后者是指从外测度构造完备测度的定理.

□

Problem 3.3 P78.5

设 $E \subset \mathbb{R}$, 且 $0<\alpha<m(E)$, 试证明存在 E 中的有界闭集 F, 使得 $m(F)=\alpha$.

Proof. 本题需要指出的是, 直接使用测度连续性构造出来的集合不一定是紧集, 应该先用内正则性收缩出紧集, 然后再用连续性. 首先内正则性, 得到紧集 $K \subset E$, 满足 $\alpha<m(K)<m(E)$. 构造正半轴上的函数 $f(x)=m(K \cap [-x,x])$. 这个函数是连续的, 因为

$$f(x+\delta)-f(x)=m(K \cap [-x-\delta, x+\delta])-m(K \cap [-x,x])=m(K \cap ([-x-\delta, x)) \cup (x, x+\delta]) \leq 2\delta.$$

因此我们利用介值性, 存在 $x_0 > 0$, 使得 $m(K \cap [-x_0, x_0]) = \alpha$. 现在令 $F = K \cap [-x_0, x_0]$, 那么 $m(F) = \alpha$. ∎

Problem 3.4 P94.9

设 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集, 且有

$$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k - 1,$$

试证明

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{k} E_i\right) > 0.$$

Proof. 一般来说并集比交集好处理一些 (因为定义里唯一非平凡内容就是并集), 因此我们考虑补集. 此时条件就变成了

$$1 > \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i^c) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right).$$

而这正好等价于题目结论. ∎

Problem 3.5 P84.2

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集, $B \subset \mathbb{R}^n$. 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B).$$

Proof. 由 Carathéodory 条件, 有

$$m^*(B) = m * (A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A).$$

上下相减即得结论. 其中第一个等式来自 B 用 A 拆分, 第二个等式来自 $A \cup B$ 用 A 拆分. ∎

Problem 3.6 P95.12

$\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集合列, $m^*(A) < +\infty$. 令 $E_k = A \cap B_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, 试证明

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = m^*(E).$$

Proof. 如果要模仿测度连续性的证明, 那拆集合的时候出现的不等号就会比较麻烦, 因此这里通过等测包给出一个更干净的证明. 设 H 是 A 的等测包, 那么

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \leq m(H \cap B) + m(H \setminus B) = m(H) = m^*(A).$$

这就说明 $H \cap B_k$ 是 E_k 的等测包. 从而有

$$\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) = \lim_{k \to \infty} m^*(H \cap B_k) = \lim_{k \to \infty} m^*(H \cap B) = m^*(E).$$

本题也有一个不用等测包的方法, 要利用3.5. 不妨设 B_k 测度有限 (不然用不了连续性).

$$\begin{aligned}\lim_{k \to \infty} m^*(E_k) &= \lim_{k \to \infty} m^*(A \cap B_k) = \lim_{k \to \infty} (m^*(A) + m^*(B_k) - m^*(A \cup B_k)) \\ &\leq m^*(A) + m^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) - m^*(A \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)) = m^*(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)) = m^*(E).\end{aligned}$$

这样就给出了上界, 而下界是显然的, 从而完成了证明 (道理上就是用两次 Carathéodory 条件, 因此也可以不用3.5).

Remark. 改作业的时候改到了海量不同证法, 其中参考3.2也是一种比较好的证法, 总之这道题本质还是去用 Carathéodory 条件去拆集合, 感觉用等测包反而不是一个很合适的办法 (所以同学们在参考往年答案的时候应该带着自己的思考). 同时这道题在改的时候发现很多同学不加证明/引用的使用了周民强书上的外测度的 Fatou 引理, 这种习惯不太好, 会给读者带来了不必要的负担, 考试的时候完全不建议这样写.

□

Problem 3.7 P95.13

$E \subset \mathbb{R}^n$, $H \supset E$ 且 H 是可测集. 若 $H - E$ 的任一可测子集皆为零测集, 试问: H 是 E 的等测包吗?

Proof. 取 E 的等测包 $H' \subset H$, 那么

$$m(H) = m(H') + m(\underbrace{H \setminus H'}_{\subset H \setminus E}) = m(H') = m^*(E).$$

□

Problem 3.8 P95.14

试证明点集 E 可测的充分必要条件是: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2, $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 \cap G_2) < \epsilon.$$

Proof. 其实本题是第一次习题课的补充内容. 根据条件, 存在一列开集 $\{G_n\}_{n\geq 1}$, $G_n \supset E$, 使得

$$m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}.$$

令

$$G = \bigcap_{n\geq 1} G_n,$$

那么

$$m^*(G - E) \leq m^*(G_n - E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1,$$

故 $G - E$ 是零测集 (外测度为零), 故可测, 从而

$$E = G - (G - E)$$

也是可测. 另一方面, 由于 E, E^c 可测, 故对任意的 $\epsilon > 0$, 存在开集 G_1, G_2, $G_1 \supset E$, $G_2 \supset E^c$, 使得

$$m(G_1 - E) < \frac{\epsilon}{2}, \quad m(G_2 - E^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

从而

$$m(G_1 \cap G_2) = m\big((G_1 - E) \cup (G_2 - E^c)\big) < \epsilon.$$

□