Problem 3.9 P107.1

设 $f(x)$ 定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 E 上可测, 且

$$\{x \in E : f(x) > 0\}$$

是可测集, 则 $f(x)$ 在 E 上可测.

Proof. 直接按照定义来, 稍微做一下分类即可. 若 $a > 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f^2 > a^2\} \cap \{f > 0\}.$$

若 $a \leq 0$, 那么

$$\{f > a\} = \{f > 0\} \cup \{f^2 < a^2\}.$$

□

Problem 3.10 P109.6

设 $f \in C([a,b])$. 若有定义在 $[a,b]$ 上的函数 $g(x)$: $g(x) = f(x)$, a.e. $x \in [a,b]$, 试问: $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上必是几乎处处连续的吗?

Proof. 当然不是, 考虑 $f = \chi_{[0,1]}$, 而 g 为 Dirichlet 函数, 那么 $g(x) = f(x)$ a.e. $x \in [0,1]$, 但是 Dirichlet 函数不是几乎处处连续的.

Remark. 这个题说明, 零测集的扰动完全破坏了连续函数的刚性. 函数的刚性是一个可以感知到的性质, 一个好的例子是去对比连续泛函演算和 Borel 泛函演算的谱映照定理, 当刚性被破坏, 好的性质应该在什么意义下去考虑.

□

Problem 3.11 P126.2

设 $z = f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $g_1(x), g_2(x)$ 是 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值可测函数, 试证明

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$$

是 $[a,b]$ 上的可测函数.

Proof. 要证明可测性只要看像空间的基的原像是否可测, 这里 F 实际上可以看成 $F = f \circ h$, $h(x) = (g_1(x), g_2(x))$. 由于 f 是连续函数, 现在只要验证 h 是可测函数. $\mathbb{R}^2$ 上的拓扑基是开矩体, 那么对任意开矩体 $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$, 有

$$h^{-1}(R) = g_1^{-1}(\alpha, \beta) \cap g_2^{-1}(\gamma, \delta),$$

因为 g_1, g_2 都是可测的, 这个集合是可测的.

改作业改到用开圆盘论证的, 但是就应该写成 $\{(g_1(x) - a)^2 + (g_2(x) - b)^2 < r^2\}$ 是可测的, 不过似乎没人这样写. 用开集结构定理的方法不赖, 和用生成元是类似的. □

Problem 3.12 P126.3

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数, 试证明右导函数 $f'_+(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数.

Proof. 右导数就是右差商的极限, 因此实际上我们只要证明右连续函数是可测函数就可以了. 这里我们不假设同学们学过拓扑学 (因为用 Sorgenfrey 拓扑的 Lindelöf 性质就是显然的了). 现在我们考虑 $A = \{f > a\}$, 那么根据右连续性, 容易知

$$\bigcup_{x \in A} [x, x + \delta_x) = A,$$

但是这样重叠太多了, 没有办法证明这里能挑出一个可数覆盖从而证明可测性, 因此这里我们需要给 $\delta_x > 0$ 加一些条件,

$$\delta_x := \sup\{\delta : f(x) > a,\ f(x+\delta) > a\}.$$

那么此时我们知道 $[x, x+\delta_x)$ 与 $[y, \delta_y)$ 要么有包含关系要么完全不交, 因此我们就能取出代表元作为覆盖, 而这个覆盖一定是可数的, 因为覆盖中的每一个元素都包含了有理数, 相当于天然得到了一个从代表元到 $\mathbb{Q}$ 的嵌入, 因此是可数的, 那么我们就得到了可测性.

还有一种比较好的做法, 就是考虑阶梯函数逼近

$$\phi_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k+1/2^n)\chi_{[k/2^n,(k+1)/2^n)}(x).$$

证明这个函数逐点收敛要注意

$$x \le x_n = \frac{\lfloor 2^n x\rfloor + 1}{2^n} < x + \frac{1}{2^n}.$$

那么有

$$\phi_n(x) = f(x_n) \to f(x).$$

Remark. 这里我把做题思路写出来了, 希望没有完全做出来的同学能好好看看这里的思路.

□

Problem 3.13 P119.1

设在可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上, $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 且依测度收敛于 $g(x)$, 试问: 是否有关系式

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E?$$

Proof. 首先要想到怎么把 a.e. 相等变成一个可以估计的测度问题, 也就是去考虑

$$m(\{|f-g| > \epsilon\}) \stackrel{?}{=} 0.$$

然后这里我们就要用集合的三角不等式,

$$\{|f-g| > \epsilon\} \subset \{|f-f_n| > \epsilon/2\} \cup \{|f_n - g| > \epsilon/2\}.$$

因此我们就做完了, 因为

$$\begin{aligned} m(|f-g| > \epsilon) &\stackrel{\forall n}{\le} m(|f-f_n| > \epsilon/2) + m(|f_n - g| > \epsilon) \\ &\stackrel{\text{condition}}{\le} \limsup_n m(|f-f_n| > \epsilon/2) + m(|f_n - g| > \epsilon/2) = 0. \end{aligned}$$

另一种做法是用 Riesz 定理, $f_n \to f$ a.e., 而又有子列 $f_{n_k} \to f$ a.e., 那么 $f = g$ a.e.. □

Problem 3.14 P119.4

试问: $f_n(x) = \cos^n x$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[0, \pi]$ 上依测度收敛列吗?

Proof. 是的, 直观上看就是端点附近是 1, 然后其他地方都能收敛到 0, 因此我们直接证明 f_n 依测度收敛到 0. 按照如下计算即可.

$$m(|f_n| > \epsilon) \le 2m([0, \arccos \epsilon^{1/n})) \to 0.$$

□

Problem 3.15 P127.12

设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上都依测度收敛于零, 试证明 $\{f_k(x)\cdot g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于零.

Proof. 其实也是集合的三角不等式, 因为

$$\{|f_n g_n| > \epsilon\} \subset \{|f_n| > \sqrt{\epsilon}\} \cup \{|g_n| > \sqrt{\epsilon}\}.$$

然后和3.13一样就行了. □

Problem 3.16 P109.7

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上几乎处处连续的函数, 试问是否存在 $g \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$g(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}?$$

Proof. 当然不存在, 因为可以考虑 $f = \chi_{[0,\infty]}$. 这时任何一个连续函数 g 在跳跃点 $x = 0$ 处都有邻域 U, 使得 g 在 U 上的扰动 $< 1/2$, 那么就给出一个正测集 $U \cap (-\infty, 0)$, 使得 $g \neq f$.

Remark. 不过同学们要意识到, 这里如果是允许一个小测度的误差, 那么是可以构造的, 方法是用 Lusin 定理 +Tietze 扩张.

□