

## 4 第四次习题课讲义

### 4.1 作业答案

#### Problem 4.1 P119 5

若  $f_n(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), 在  $E \subset \mathbb{R}$  上依测度收敛于  $f(x) \equiv 0$ , 试问: 是否有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_n(x)| > 0\}) = 0?$$

*Proof.* 考虑  $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,1]}$ , 可见结论错误. □

#### Problem 4.2 P119 6

设  $E \subset \mathbb{R}$  上的可测函数列  $\{f_k(x)\}$  满足

$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

若  $f_k(x)$  在  $E$  上依测度收敛到 0, 试问:  $f_k(x)$  在  $E$  上是否几乎处处收敛到 0?

*Proof.* 有单调性, 子列当然能控制整体. 用 Riesz 定理就行了. □

#### Problem 4.3 P123 1

设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的实值可测函数, 试问: 是否存在  $g \in C(\mathbb{R})$ , 使得

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0?$$

*Proof.* 当然不行, 这个题的道理和 3.16 是一样的, 考虑  $\chi_{[0,\infty]}$  即可. □

#### Problem 4.4 P123 2

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可测, 试证明存在多项式列  $\{P_n(x)\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

*Proof.* 思路是 Lusin 定理和 Weierstrass 逼近定理. 利用 Lusin 定理, 可以找到一系列连续函数几乎处处收敛到  $f$ . 一个比较好说清楚的写法是, 直接用 Lusin 定理, 然后相当于得到了依测度收敛序列, 用 Riesz 定理就得到几乎处处收敛子列. 然后用 Weierstrass 定理, 写过程用放缩就行, 比如

$$\lim_n |f(x) - p_n(x)| \leq \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + \liminf_n |f_n(x) - p_n(x)| \leq \liminf_n |f(x) - f_n(x)| + \|f_n - p_n\|_\infty.$$

但是这里还有最后一个问题, 就是 Lusin 定理在使用的时候, 要假定函数是几乎处处有限的. 因此在构造连续函数逼近时, 第一步应该将  $f$  改造成  $\frac{f}{1+|f|}$ , 然后先逼近, 再拉回即可. 这里反函数是  $\frac{x}{1-|x|}$ . 用广义实值化的  $\tan$  和  $\arctan$  也是一样的. □

*Remark.* 改作业的时候发现只有极少数同学注意到这一点, 所以我直接放过去了, 但是同学们还是注意细节.