1 第五次习题课讲义

1.1 作业答案

Problem 1.1 P189.1

设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处大于零的可测函数, 且满足

$$\int_E f(x)\,dx = 0,$$

试证明 $m(E) = 0$.

Proof. 直接说几乎处处大于零在积分意义下和处处大于零一样, 然后积分单调性似乎也没问题, 但是还是写的更有实分析味道比较好.

$$E = \bigcap_n E_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \cup \underbrace{N}_{\text{null set}}.$$

那么有

$$0 = \int_E f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} m(E_n) \Rightarrow m(E_n) = 0 \Rightarrow m(E) = 0.$$

□

Problem 1.2 P143.9

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 若有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) \leq f(x) \quad (x \in E; k = 1, 2, \cdots),$$

则对于 E 的任一可测子集 e, 有

$$\lim_{k\to\infty} \int_e f_k(x)\,dx = \int_e f(x)\,dx.$$

Proof. “用不了 DCT 就试试 Fatou.”

$$\int_e f dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_k \int_e f_k \,\mathrm{d}x \leq \limsup_k \int_e f_k \,\mathrm{d}x \leq \int_e f \,\mathrm{d}x.$$

□

Problem 1.3 P149.3

若 $f \in L(E)$, 则

$$m\big(\{x \in E :\ |f(x)| > k\}\big) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k \to \infty).$$

Proof. 这个就是 Chebyshev 不等式,

$$m(\{|f| > k\}) \leq \int_{|f|>k} \frac{|f|}{k} \,\mathrm{d}x \leq \frac{||f||_1}{k} = O(k) \quad \text{as } k \to \infty.$$

□

Problem 1.4 P159.4

设 $f \in L(E)$, 记

$$E_k = \{x \in E :\ |f(x)| < 1/k\},$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\,dx=0.$$

Proof. 直接用 DCT 就行,

$$\lim_k\int_{E_k}|f|\,\mathrm{d}x=\lim_k\int|f|\chi_{E_k}\,\mathrm{d}x\xlongequal{|f|\chi_{E_k}\le|f|}\int|f|\chi_{\{|f|=0\}}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

Problem 1.5 P190.9

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数, 试证明对 $E\subset[0,1]$, $m(E)=t$, 有

$$\int_{[0,t]}f(x)\,dx\le\int_E f(x)\,dx.$$

Proof. 直观上是显然的, 但是要写清楚需要具体算一算. 记 $[0,t]=A$,

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{[0,t]}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int f(x)(\chi_E-\chi_A)\,\mathrm{d}x\\&=\int f(x)(\chi_{E\setminus A}-\chi_{A\setminus E})\,\mathrm{d}x\\&\ge[f(\inf(E\setminus A))-f(\sup(A\setminus E))]m(E\setminus A)\ge0.\end{aligned}$$

□