

**Problem 1.6 P159.3**

设  $f \in L^1((0, +\infty))$ , 试证明函数

$$g(x) = \int_{[0, \infty)} \frac{f(t)}{x+t} dt$$

在  $(0, +\infty)$  上连续.

**Proof.** 注意细节, 首先积分本身良定 (这个最好提一下). 只要证明内闭连续即可, 然后对  $x > 0$ , 考虑  $x_n \rightarrow x$ , 当  $n$  充分大, 用  $\frac{2|f(t)|}{x}$  当控制函数用 DCT 即可.  $\square$

**Problem 1.7 P160.6**

设  $f_k \in L^1(E)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 且  $f_k(x)$  在  $E$  上一致收敛于  $f(x)$ . 若  $m(E) < +\infty$ , 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Proof.** 这是数分题. 将积分如下放缩即可

$$\left| \int_E (f - f_n) \right| \leq m(E) \sup_x |f_n(x) - f(x)|.$$

$\square$

**Problem 1.8 P190.10**

设  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$  是紧集, 试证明

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{E+\{y\}} |f(x)| dx = 0.$$

**Proof.** 用  $|f|$  做控制函数即可.  $\square$

**Problem 1.9 P190.12**

设  $f \in L(\mathbb{R})$ ,  $a > 0$ , 试证明级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + n\right)$$

在  $\mathbb{R}$  上几乎处处绝对收敛, 且其和函数  $S(x)$  以  $a$  为周期, 且  $S \in L^1([0, a])$ .

**Proof.** 经典交换次序题, 往年考过类似方法. 首先将级数在  $[0, a]$  上积分, 用 MCT 交换次序.

$$\int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{x}{a} + n\right) \right| dx \stackrel{\text{换元}}{=} a \|f\|_{L^1} < \infty.$$

这就说明级数几乎处处有限 (也就是几乎处处绝对收敛). 良好定义后, 看出级数周期性是显然的.  $\square$

**Problem 1.10 P191.13**

设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $p > 0$ , 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} f(nx) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

**Proof.** 感觉是实分析特色习题, 先去考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} f(nx).$$

良定性就像 1.9 一样, 去积分交换次序.

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} f(nx) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-p} f(nx) dx \stackrel{\text{换元}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+p)} \|f\|_{L^1} < \infty.$$

然后用级数收敛的性质就做完了. □

**Problem 1.11 P191.14**

设  $x^s f(x)$ ,  $x^t f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上可积, 其中  $s < t$ , 试证明积分

$$\int_{[0, +\infty)} x^u f(x) dx, \quad u \in (s, t)$$

存在且是  $u \in (s, t)$  的连续函数.

**Proof.** 这类权重问题可以想想谁在哪是主导项, 我们不难设计出控制函数

$$x^s |f(x)| \chi_{x < 1} + x^t |f(x)| \chi_{x \geq 1}.$$

然后用 DCT, 存在性和连续性就都出来了. □

**Problem 1.12 P191.15**

设  $f(x)$  是  $(0, 1)$  上的正值可测函数. 若存在常数  $c$ , 使得

$$\int_{[0, 1]} (f(x))^n dx = c \quad (n = 1, 2, \dots),$$

试证明存在可测集  $E \subset (0, 1)$ , 使得  $f(x)$  几乎处处等于  $\chi_E(x)$ . 再问: 若  $f(x)$  不是非负的又如何?

**Proof.** 首先证明  $f \leq 1$  a.e., 这个就是标准的拆测度证明 (参考 1.1), 考虑  $E_k := \{f \geq 1 + \frac{1}{k}\}$ , 代入条件对  $n$  取极限就知道  $E_k$  零测, 再对  $k$  取极限就得到了上界.

现在再来处理下界, 拆成  $\{f < 1\}$  和  $\{f = 1\}$  就行, 代入条件取极限得到  $c = m(\{f = 1\})$ , 然后令  $n = 1$  说明另一块几乎处处为零. 也就是说,  $f(x) = \chi_{\{f=1\}}$ .

至于不是非负的情况, 考虑  $f^2$  说明  $f^2 = \chi_E$ , 然后令  $n = 1, 2$  拆开来就行了. □

**Problem 1.13 P191.16**

设  $f \in L^1([0, 1])$ , 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} n \ln \left( 1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) dx = 0$$

( $\ln(1 + x^2) \leq x$ ,  $x \geq 0$ ).

**Proof.** 把提示里的不等式带进去用 DCT 就行, 几乎处处收敛到零是显然的 (因为可积函数几乎处处有限). □

**Problem 1.14 P191.17**

设  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $f \in L^1(E_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

**Proof.** 注意到  $f \chi_{E_k} \rightarrow f \chi_E$ , 用  $|f| \chi_{E_1}$  控制就行. □