# 2 第六次习题课讲义

## 2.1 作业答案

**Problem 2.1 P162.7**

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, 且有 $E\subset(0,+\infty)$,

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

则

$$\int_E f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\neq 1.$$

***Proof.*** 反证, 若等号成立, 那么

$$0=\int_E f(x)(1-\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

但 $f(x)(1-\cos x)\geq 0$, 所以 $f(x)(1-\cos x)=0$ a.e. 于 $E$. 注意 $\{x>0:\cos x=1\}$ 至多可数, 故 $1-\cos x>0$ a.e. 于 $E$, 从而 $f=0$ a.e. 于 $E$, 这就和 $\int_E f=1$ 矛盾. □

**Problem 2.2 P162.8**

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f_n\in L^1(\mathbb{R})$ $(n=1,2,\cdots)$, 且有

$$\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{n^2}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

则

$$f_n(x)\to f(x),\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

***Proof.*** 之前的习题课讲过 $L^p$ 收敛推出 a.e. 收敛的证明, 这里是一样的道理. 对任意 $\epsilon>0$, 令

$$E_n^\epsilon=\{|f_n-f|>\epsilon\},$$

那么由 Chebyshev 不等式,

$$\sum_n m(E_n^\epsilon)\leq\frac{1}{\epsilon}\sum_n\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\epsilon}\sum_n\frac{1}{n^2}<\infty.$$

因此 $m(\limsup_n E_n^\epsilon)=0$. 这就证明了几乎处处收敛. □

**Problem 2.3 P163.9**

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n|<\ln n$ $(n=2,3,\cdots)$, 则

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

***Proof.*** 这种问题一般是先取绝对值用 Tonelli, 说明这个积分是良定的, 然后再用 Fubini, 这个过程是标准的. 那么

$$\int_2^{+\infty}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^{-x}\,\mathrm{d}x\leq\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)\int_2^{+\infty}n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}n^{-2}<\infty.$$

所以可以逐项积分, 于是

$$\int_{[2,+\infty)}\sum_{n=2}^{\infty}a_n n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\int_2^{+\infty}n^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\ln n}n^{-2}.$$

□

**Problem 2.4 P163.10**

设定义在 $E \times \mathbb{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足:

1. 对每一个 $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x,y)$ 是 $E$ 上的可测函数;
2. 对每一个 $x \in E$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

若存在 $g \in L^1(E)$, 使得对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 有

$$|f(x,y)| \leq g(x), \qquad \text{a.e. } x \in E,$$

则函数

$$F(y) = \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数.

***Proof.*** 用 DCT. 任取 $y_k \to y$, 由关于 $y$ 的连续性可知

$$f(x,y_k) \to f(x,y), \qquad x \in E.$$

同时由题设有统一控制 $|f(x,y_k)| \leq g(x) \in L^1(E)$. 因此

$$F(y_k) = \int_E f(x,y_k)\,\mathrm{d}x \to \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}x = F(y).$$

由序列刻画连续性, $F$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. □

**Problem 2.5 P192.32**

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 且 $xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 令

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

若有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

试证明 $F \in L(\mathbb{R})$.

***Proof.*** 由总积分为零, 当 $x > 0$ 时有 $F(x) = -\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. 因此

$$\int_0^{+\infty} |F(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

另一方面,

$$\int_{-\infty}^{0} |F(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (-t)|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

右端之和正是 $||xf||_{L^1}$, 故 $F \in L^1(\mathbb{R})$. □

**Problem 2.6 P192.33**

求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx)\,\mathrm{d}x$$

的值.

***Proof.*** 对 $x > 0$, $\arctan(nx) \to \frac{\pi}{2}$, 且

$$|\cos x \arctan(nx)| \le \frac{\pi}{2} \cos x \in L^1 \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由 DCT,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

□

**Problem 2.7 P192.34**

设 $f \in L^1((0,a))$,

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (a > x > 0),$$

试证明 $g \in L^1((0,a))$, 且有

$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

***Proof.*** 还是标准的, 先证明可积性, 由 Tonelli 定理,

$$\int_0^a |g(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^a \int_x^a \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = ||f||_{L^1(0,a)} < \infty.$$

于是可以用 Fubini 定理交换次序:

$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(t)}{t} \int_0^t \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□